

## บทที่ 2

### อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

วิชาแคลคูลัสเป็นวิชาที่กล่าวถึงการเปลี่ยนแปลงทางคณิตศาสตร์และเครื่องมือหลักสำหรับศึกษาการเปลี่ยนแปลงจะเป็นกระบวนการที่เราเรียกว่า การหาอนุพันธ์ (differentiation) ในการศึกษาเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น มีความสำคัญต่อการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์ มีการนำอนุพันธ์ไปใช้อย่างแพร่หลายในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ การแพทย์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความหมายของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และกระบวนการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันในแต่ละวิธี

#### ความหมายอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน หมายถึง อัตราส่วนระหว่างผลต่างของตัวแปรตามต่อผลต่างที่น้อยที่สุดของตัวแปรอิสระ หรือผลที่ตัวแปรอิสระเปลี่ยนไปมีค่าเป็นกึ่งเท่าของตัวแปรอิสระที่เปลี่ยนไปโดยการเปลี่ยนไปของตัวแปรอิสระมีค่าน้อยที่สุด

พิจารณา  $y = f(x)$  จากฟังก์ชันเราจะเรียกตัวแปร  $x$  ว่าตัวแปรอิสระ และตัวแปร  $y$  ว่าตัวแปรตาม ถ้าตัวแปรอิสระ  $x$  เป็นเปลี่ยนแปลงไป  $x + \Delta x$  โดยที่  $\Delta x$  จะเป็นค่าบวกหรือลบก็ได้ แล้วตัวแปรตาม  $y$  จะเปลี่ยนแปลงไปเป็น  $y + \Delta y$  ตามไปด้วย

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

ซึ่งเราอาจกล่าวได้ว่า  $\Delta x$  คือสิ่งที่ทำให้ตัวแปรอิสระที่เปลี่ยนแปลงไป และ  $\Delta y$  คือผลของการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชัน ซึ่งจะอยู่ในรูป

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - y$$

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

จากสมการข้างต้น จะพบว่าผลการเปลี่ยนแปลงฟังก์ชัน  $\Delta y$  คือผลต่างของค่าฟังก์ชันที่เปลี่ยนแปลงไปกับค่าฟังก์ชันเดิม และเมื่อทำการหารสมการด้วย  $\Delta x$  จะได้ว่า

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

โดยเราจะเรียกว่า  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลง (Rate of Change)

จากการความหมายของอนุพันธ์ที่กล่าวเป็นข้างต้น คือ อัตราส่วนระหว่างผลต่างของตัวแปรตามต่อผลต่างที่น้อยที่สุดของตัวแปรอิสระ นั่นคือ  $\Delta x$  มีค่าน้อยที่สุด หรือกล่าวได้  $\Delta x$  มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) ดังนั้น เราสามารถนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้โดย

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**บทนิยามที่ 2.1** ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันที่มี  $x$  เป็นตัวแปรอิสระและ  $y$  เป็นตัวแปรตาม เรากล่าวว่า  $f$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่  $x$  ใด ๆ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad \text{หาค่าได้}$$

### สัญลักษณ์ของอนุพันธ์

การเขียนอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $y = f(x)$  เทียบกับ  $x$  มีหลายแบบ นอกจาก  $f'(x)$  แล้ว ยังมีสัญลักษณ์อื่น ดังนี้

$y'$  อ่านว่า วายไพรม์

$\frac{dy}{dx}$  อ่านว่า ดีวายบายดีเอ็กซ์ (ไม่ใช่ d คุณ y หารด้วย d คุณ x)

$\frac{df}{dx}$  อ่านว่า ดีเอฟบายดีเอ็กซ์

$\frac{d}{dx} f(x)$  อ่านว่า ดีบายดีเอ็กซ์ของ  $f(x)$

นอกจากนี้เรายังนิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่  $x = a$  อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f'(a) \quad , \quad \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} \quad , \quad \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a}$$

เราเรียกสัญลักษณ์  $\left. \right|_{x=a}$  ว่า สัญลักษณ์การคำนวณค่า (Evaluating Symbol) ซึ่งเราคำนวณนิพจน์โดยแทน  $x = a$

โดยอาศัยบทนิยามข้างต้นจะได้ว่า

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = x^2 - 9x$

วิธีทำ จาก  $f(x) = x^2 - 9x$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x+\Delta x)^2 - 9(x+\Delta x)] - [x^2 - 9x]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 9x - 9\Delta x] - [x^2 - 9x]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 9x - 9\Delta x - x^2 + 9x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 - 9\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(2x + \Delta x - 9)\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x - 9) \\
 &= 2x + 0 - 9 \\
 &= 2x - 9
 \end{aligned}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = x^2 - 9x$  คือ  $2x - 9$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

ก. ที่จุด  $x$  ใด ๆ

ข. ที่จุด  $x=1$

วิธีทำ ก. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่ จุด  $x$  ใด ๆ จาก  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x) - 5] - [3x^2 + 2x - 5]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 2x + 2\Delta x - 5] - [3x^2 + 2x - 5]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2x + 2\Delta x - 5 - 3x^2 - 2x + 5}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(6x + 3\Delta x + 2)\Delta x}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (6x + 3\Delta x + 2) \\
&= 6x + 0 + 2 \\
&= 6x + 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$  คือ  $6x + 2$

ข. หาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ที่จุด  $x = 1$  จาก  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$

$$\text{จาก } f'(x) = 6x + 2$$

$$\text{จะได้ว่า } f'(1) = 6(1) + 2 = 8$$

ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชัน  $f(x) = 3x^2 + 2x - 5$  ที่จุด  $x = 1$  คือ 8

**ตัวอย่างที่ 3** กำหนดฟังก์ชัน  $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & , x \leq 1 \\ x^3+1 & , x > 1 \end{cases}$  จงหาค่า  $f'(x)$

**วิธีทำ** เราจะแยกพิจารณาเป็น 3 กรณีดังต่อไปนี้

**กรณีที่ 1**  $x < 1$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3(x+\Delta x)-1] - [3x-1]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3x+3\Delta x-1] - [3x-1]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x+3\Delta x-1-3x+1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

ดังนั้น  $f'(x) = 3$

กรณีที่ 2  $x > 1$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[(x+\Delta x)^3 + 1] - [x^3 + 1]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1] - [x^3 + 1]}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 1 - x^3 - 1}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2]\Delta x}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \\
 &= 3x^2
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $f'(x) = 3x^2$

กรณีที่ 3  $x = 1$

เนื่องจาก  $x = 1$  ค่าทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันต่างกัน ดังนั้นเราจึงต้องพิจารณาอนุพันธ์ด้านซ้ายและอนุพันธ์ด้านขวาดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x^3 + 1] - [3(1) - 1]}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x + 1) \\
&= 1^2 + 1 + 1 = 3 \\
f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[3x - 1] - [3(1) - 1]}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 1 - 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x - 3}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3(x - 1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} 3 \\
&= 3
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากทั้งสามกรณีสรุปได้ว่า  $f'(x) = \begin{cases} 3 & , x \leq 1 \\ 3x^2 & , x > 1 \end{cases}$

### การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

จากหัวข้อที่ผ่านมา แสดงให้เห็นว่าเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้บทนิยาม แต่ค่อนข้างจะยุ่งยากและซับซ้อน ซึ่งในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต โดยใช้ทฤษฎีอนุพันธ์

**ทฤษฎีบทที่ 2.1** ให้  $f(x) = c$  เมื่อ  $c$  เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า  $\frac{d}{dx} f(x) = 0$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า  $y = 5$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ  $y = 5$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5) = 0$$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 ให้  $f(x) = x$  จะได้ว่า  $\frac{d}{dx}f(x) = 1$

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า  $y = 8x$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ  $y = 8x$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(8x) = 8\frac{d}{dx}(x) = 8$$

ตัวอย่างที่ 6 ถ้า  $y = -15x$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ  $y = -15x$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-15x) = -15\frac{d}{dx}(x) = -15$$

ทฤษฎีบทที่ 2.3 ให้  $f(x) = x^n$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนจริงแล้ว

จะได้ว่า  $\frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 7 ถ้า  $y = 2x^6$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ  $y = 2x^6$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^6) = 12x^{6-1}\frac{dx}{dx} = 12x^5\frac{dx}{dx} = 12x^5$$

ตัวอย่างที่ 8 ถ้า  $y = -5x^{10}$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ  $y = -5x^{10}$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(-5x^{10}) = -50x^{10-1} \frac{dx}{dx} = -50x^9$$

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ให้  $u = f(x)$  และ  $v = g(x)$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่  $x$

จะได้ว่า  $\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v)$

ทฤษฎีบทที่ 2.5 ให้  $u = f(x)$  และ  $v = g(x)$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่  $x$

จะได้ว่า  $\frac{d}{dx}(u-v) = \frac{d}{dx}(u) - \frac{d}{dx}(v)$

ทฤษฎีบทที่ 2.6 ให้  $c$  เป็นค่าคงตัว และ  $f(x)$  หาอนุพันธ์ได้ที่  $x$  และสมมติให้

$u = f(x)$  จะได้ว่า  $\frac{d}{dx}(cu) = c \frac{d}{dx}(u)$

ตัวอย่างที่ 9 ถ้า  $y = x^4 - 2x^3 + 11x$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = x^4 - 2x^3 + 11x$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^3 + 11x) \\ &= \frac{d}{dx}(x^4) - 2\frac{d}{dx}(x^3) + 11\frac{dx}{dx} \\ &= 4\left(x^{4-1}\frac{dx}{dx}\right) - 2\left((3)x^{3-1}\frac{dx}{dx}\right) + 11 \\ &= 4x^3 - 6x^2 + 11\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = 4x^3 - 6x^2 + 11$

ตัวอย่างที่ 10 ถ้า  $y = 2x^5 + x^4 - 8x^2 - 12$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = 2x^5 + x^4 - 8x^2 - 12$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^5 + x^4 - 8x^2 - 12) \\ &= 2\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^4) - 8\frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}(12) \\ &= 2(5)x^{5-1} + 4x^{4-1} - 8(2)x^{2-1} - 0 \\ &= 10x^4 + 4x^3 - 16x\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = 10x^4 + 4x^3 - 16x$

ตัวอย่างที่ 11 ถ้า  $y = x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}}$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( x^{\frac{3}{2}} - 5x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{3}} \right) \\ &= \frac{d}{dx} (x^{\frac{3}{2}}) - 5 \frac{d}{dx} (x^{\frac{1}{2}}) + 2 \frac{d}{dx} (x^{-\frac{1}{3}}) \\ &= \left( \frac{3}{2} \right) x^{\frac{3}{2}-1} - 5 \left( \frac{1}{2} \right) x^{\frac{1}{2}-1} + 2 \left( -\frac{1}{3} \right) x^{-\frac{1}{3}-1} \\ &= \left( \frac{3}{2} \right) \frac{x^{\frac{1}{2}}}{1/2} - 5 \left( \frac{1}{2} \right) \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-1/2} + 2 \left( -\frac{1}{3} \right) \frac{x^{-\frac{4}{3}}}{-4/3} \\ &= 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{4}{3}} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = 3x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{4}{3}}$  หรือ  $3\sqrt{x} + \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{4}{3}}$

ตัวอย่างที่ 12 ถ้า  $y = \sqrt{2x} - 9\sqrt{x}$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \sqrt{2x} - 9\sqrt{x}$  หรือ  $y = (2x)^{\frac{1}{2}} - 9x^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( (2x)^{\frac{1}{2}} - 9x^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{d}{dx} (2x)^{\frac{1}{2}} - 9 \frac{d}{dx} (x^{\frac{1}{2}}) \\ &= \frac{1}{2} (2x)^{\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dx} (2x) - 9 \left( \frac{1}{2} \right) x^{\frac{1}{2}-1} \\ &= \frac{1}{2} (2x)^{\frac{1}{2}-1} (2) \frac{dx}{dx} - \frac{9}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &= (2x)^{-\frac{1}{2}} - \frac{9}{2} x^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{9}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{9}{2\sqrt{x}}$$

**ทฤษฎีบทที่ 2.7** ให้  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ถ้า  $f(x) = u^n$  เมื่อ  $n$  เป็นจำนวนจริง

$$\text{จะได้ว่า } \frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1} \frac{d}{dx}(u)$$

**ตัวอย่างที่ 13** ถ้า  $y = (x-9)^5$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก  $y = (x-9)^5$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x-9)^5 \\ &= 5(x-9)^4 \frac{d}{dx}(x-9) \\ &= 5(x-9)^4 \left[ \frac{dx}{dx} - \frac{d}{dx}(9) \right] \\ &= 5(x-9)^4(1-0) \\ &= 5(x-9)^4 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = 5(x-9)^4$$

**ตัวอย่างที่ 14** ถ้า  $y = (2x^2+9x-7)^5$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก  $y = (2x^2+9x-7)^5$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^2+9x-7)^5 \\ &= 5(2x^2+9x-7)^4 \frac{d}{dx}(2x^2+9x-7) \\ &= 5(2x^2+9x-7)^4 \left[ 2 \frac{d}{dx}x^2 + 9 \frac{dx}{dx} - \frac{d}{dx}(7) \right] \\ &= 5(2x^2+9x-7)^4 [2(2x) + 9(1) - 0] \\ &= 5(2x^2+9x-7)^4(4x+9) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = 5(2x^2 + 9x - 7)^4(4x + 9)$$

ตัวอย่างที่ 15 ถ้า  $y = \sqrt{3+5x+4x^3}$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \sqrt{3+5x+4x^3}$  หรือ  $y = (3+5x+4x^3)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (3+5x+4x^3)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (3+5x+4x^3)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (3+5x+4x^3) \\ &= \frac{1}{2} (3+5x+4x^3)^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{d}{dx} (3) + 5 \frac{dx}{dx} + 4 \frac{d}{dx} (x^3) \right] \\ &= \frac{1}{2} (3+5x+4x^3)^{-\frac{1}{2}} [0 + 5(1) + 4(3)x^2] \\ &= \frac{1}{2} (3+5x+4x^3)^{-\frac{1}{2}} (5+12x^2) \\ &= \frac{1}{2} (5+12x^2) (3+5x+4x^3)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(5+12x^2)}{2} (3+5x+4x^3)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(5+12x^2)}{2(3+5x+4x^3)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(5+12x^2)}{2\sqrt{3+5x+4x^3}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{(5+12x^2)}{2\sqrt{3+5x+4x^3}}$$

**ทฤษฎีบทที่ 2.8** ให้  $u = f(x)$  และ  $v = g(x)$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่

$$x \text{ จะได้ว่า } \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{d}{dx}(v) + v \frac{d}{dx}(u)$$

ตัวอย่างที่ 16 ถ้า  $y = (6x)(9x^2 + 2)$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = (6x)(9x^2 + 2)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(6x)(9x^2 + 2) \\ &= (6x)\frac{d}{dx}(9x^2 + 2) + (9x^2 + 2)\frac{d}{dx}(6x) \\ &= (6x)\left[9\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d2}{dx}\right] + (9x^2 + 2)\left[6\frac{dx}{dx}\right] \\ &= (6x)(18x) + (9x^2 + 2)(6) \\ &= 108x^2 + 54x^2 + 12\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = 108x^2 + 54x^2 + 12$

ตัวอย่างที่ 17 ถ้า  $y = (2x^2 + 1)(3x + 6)$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = (2x^2 + 1)(3x + 6)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(2x^2 + 1)(3x + 6) \\ &= (2x^2 + 1)\frac{d}{dx}(3x + 6) + (3x + 6)\frac{d}{dx}(2x^2 + 1) \\ &= (2x^2 + 1)\left[3\frac{dx}{dx} + \frac{d6}{dx}\right] + (3x + 6)\left[2\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d1}{dx}\right] \\ &= (2x^2 + 1)(3 + 0) + (3x + 6)(4x + 0) \\ &= (2x^2 + 1)(3) + (3x + 6)(4x) \\ &= 6x^2 + 3 + 12x^2 + 24x \\ &= 18x^2 + 24x + 3\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = 18x^2 + 24x + 3$

ตัวอย่างที่ 18 ถ้า  $y = (5x-3)(2x^4-11)$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = (5x-3)(2x^4-11)$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(5x-3)(2x^4-11x) \\ &= (5x-3)\frac{d}{dx}(2x^4-11x) + (2x^4-11x)\frac{d}{dx}(5x-3) \\ &= (5x-3)\left[2\frac{d}{dx}x^4 - 11\frac{dx}{dx}\right] + (2x^4-11x)\left[5\frac{dx}{dx} - \frac{d3}{dx}\right] \\ &= (5x-3)(8x^3-11) + (2x^4-11x)(5) \\ &= (40x^4 - 55x - 24x^3 + 33) + (10x^4 - 55x) \\ &= 50x^4 - 24x^3 - 110x + 33\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = 50x^4 - 24x^3 - 110x + 33$

ตัวอย่างที่ 19 ถ้า  $y = (x^2-3)^3(2x^2+7)^2$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = (x^2-3)^3(2x^2+7)^2$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^2-3)^3(2x^2+7)^2 \\ &= (x^2-3)^3\frac{d}{dx}(2x^2+7)^2 + (2x^2+7)^2\frac{d}{dx}(x^2-3)^3 \\ &= (x^2-3)^3 2(2x^2+7)\frac{d}{dx}[2x^2+7] + (2x^2+7)^2 3(x^2-3)^2\frac{d}{dx}[x^2-3] \\ &= (x^2-3)^3 2(2x^2+7)(4x) + (2x^2+7)^2 3(x^2-3)^2(2x) \\ &= 8x(x^2-3)^3(2x^2+7) + 6x(2x^2+7)^2(x^2-3)^2 \\ &= x(x^2-3)^2(2x^2+7)[8(x^2-3) + 6(2x^2+7)]\end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = x(x^2-3)^2(2x^2+7)[8(x^2-3) + 6(2x^2+7)]$

ทฤษฎีบทที่ 2.9 ให้  $u = f(x)$  และ  $v = g(x)$  เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่  $x$  จะ

ได้ว่า  $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{d}{dx}(u) - u\frac{d}{dx}(v)}{v^2}$

ตัวอย่างที่ 20 ถ้า  $y = \frac{x^4 - 6x}{5x^2 + 3}$  จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \frac{x^4 - 6x}{5x^2 + 3}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x^4 - 6x}{5x^2 + 3} \right) \\ &= \frac{(5x^2 + 3) \frac{d}{dx} (x^4 - 6x) - (x^4 - 6x) \frac{d}{dx} (5x^2 + 3)}{(5x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{(5x^2 + 3) \frac{d}{dx} (x^4 - 6x) - (x^4 - 6x) \frac{d}{dx} (5x^2 + 3)}{(5x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{(5x^2 + 3)(4x^3 - 6) - (x^4 - 6x)(10x)}{(5x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{(20x^5 - 30x^2 + 12x^3 - 18) - (10x^5 - 60x^2)}{(5x^2 + 3)^2} \\ &= \frac{10x^5 + 12x^3 - 90x^2 - 18}{(5x^2 + 3)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = \frac{10x^5 + 12x^3 - 90x^2 - 18}{(5x^2 + 3)^2}$

ตัวอย่างที่ 21 ถ้า  $y = \frac{x-1}{x-3x^5}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \frac{x-1}{x-3x^5}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x-1}{x-3x^5} \right) \\ &= \frac{(x-3x^5) \frac{d}{dx} (x-1) - (x-1) \frac{d}{dx} (x-3x^5)}{(x-3x^5)^2} \\ &= \frac{(x-3x^5)(1) - (x-1)(1-15x^4)}{(x-3x^5)^2} \\ &= \frac{(x-3x^5) - (x-15x^5-1+15x^4)}{(x-3x^5)^2} \\ &= \frac{12x^5 - 15x^4 + 1}{(x-3x^5)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{12x^5 - 15x^4 + 1}{(x - 3x^5)^2}$$

ตัวอย่างที่ 22 ถ้า  $y = \frac{3x-5}{x^2+2}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \frac{3x-5}{x^2+2}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{3x-5}{x^2+2} \right) \\ &= \frac{(x^2+2) \frac{d}{dx} (3x-5) - (3x-5) \frac{d}{dx} (x^2+2)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{(x^2+2)(3) - (3x-5)(2x)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{(3x^2+6) - (6x^2-10x)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{-3x^2+10x-6}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{1}{(x^2+2)^2} (-3x^2+10x-6) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x^2+2)^2} (-3x^2+10x-6)$$

ตัวอย่างที่ 23 ถ้า  $y = \frac{3x^2+4x+6}{x^4+8x+2}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \frac{3x^2+4x+6}{x^4+8x+2}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{3x^2+4x+6}{x^4+8x+2} \right) \\ &= \frac{(x^4+8x+2) \frac{d}{dx} (3x^2+4x+6) - (3x^2+4x+6) \frac{d}{dx} (x^4+8x+2)}{(x^4+8x+2)^2} \\ &= \frac{(x^4+8x+2)(6x+4) - (3x^2+4x+6)(4x^3+8)}{(x^4+8x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{(x^4 + 8x + 2)(6x + 4) - (3x^2 + 4x + 6)(4x^3 + 8)}{(x^4 + 8x + 2)^2}$$

ตัวอย่างที่ 24 ถ้า  $y = \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{12}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{12}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{12} \\ &= 12 \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{d}{dx} \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right) \\ &= 12 \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{\left[(5x^3 - 2) \frac{d}{dx} (4x^2 - x) - (4x^2 - x) \frac{d}{dx} (5x^3 - 2)\right]}{(5x^3 - 2)^2} \\ &= 12 \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{(2 - 16x + 10x^3 - 20x^4)}{(5x^3 - 2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = 12 \left(\frac{4x^2 - x}{5x^3 - 2}\right)^{11} \frac{(2 - 16x + 10x^3 - 20x^4)}{(5x^3 - 2)^2}$$

ในหัวข้อที่ผ่านมา ได้กล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต แต่ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันอดิศัยบางฟังก์ชัน เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันชี้กำลัง และฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก

### การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เรารู้จักกันดี ก็มี ฟังก์ชัน sine, cosine, tangent, secant, cosecant และ cotangent ซึ่งในหัวข้อนี้เราจะหาสูตรต่าง ๆ ของอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านี้ แต่จะเว้นการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่าง ๆ ดังจะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.10 ให้  $f(x) = \sin x$  แล้ว  $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \sin x = \cos x$

ทฤษฎีบทที่ 2.11 ให้  $f(u) = \sin u$  แล้ว  $\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 25 กำหนดให้  $y = \sin(5x+8)$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \sin(5x+8)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \sin(5x+8) \\ &= \cos(5x+8) \frac{d}{dx} (5x+8) \\ &= \cos(5x+8)(5) \\ &= 5 \cos(5x+8) \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = 5 \cos(5x+8)$

ตัวอย่างที่ 26 กำหนดให้  $y = \sin(1-3x) + \sin(2x^2 - 5)$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \sin(1-3x) + \sin(2x^2 - 5)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [\sin(1-3x) + \sin(2x^2 - 5)] \\ &= \frac{d}{dx} \sin(1-3x) + \frac{d}{dx} \sin(2x^2 - 5) \\ &= \cos(1-3x) \frac{d}{dx} (1-3x) + \cos(2x^2 - 5) \frac{d}{dx} (2x^2 - 5) \\ &= \cos(1-3x)(-3) + \cos(2x^2 - 5)(4x) \\ &= -3 \cos(1-3x) + 4x \cos(2x^2 - 5) \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = -3 \cos(1-3x) + 4x \cos(2x^2 - 5)$

ทฤษฎีบทที่ 2.13 ให้  $f(x) = \cos x$  แล้ว  $\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

ทฤษฎีบทที่ 2.14 ให้  $f(u) = \cos u$  แล้ว  $\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$

ตัวอย่างที่ 27 กำหนดให้  $y = \cos(x^3 - 8x)$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \cos(x^3 - 8x)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \cos(x^3 - 8x) \\ &= -\sin(x^3 - 8x) \frac{d}{dx} (x^3 - 8x) \\ &= -\sin(x^3 - 8x)(3x^2 - 8) \\ &= -(3x^2 - 8)\sin(x^3 - 8x) \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = -(3x^2 - 8)\sin(x^3 - 8x)$

ตัวอย่างที่ 28 กำหนดให้  $y = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 2x}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 2x}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[ \frac{\sin^2 x}{1 - \cos 2x} \right] \\ &= \frac{(1 - \cos 2x) \frac{d}{dx} \sin^2 x - \sin^2 x \frac{d}{dx} (1 - \cos 2x)}{(1 - \cos 2x)^2} \\ &= \frac{(1 - \cos 2x) \left( 2 \sin x \frac{d}{dx} \sin x \right) - \sin^2 x \left( \sin 2x \frac{d}{dx} 2x \right)}{(1 - \cos 2x)^2} \\ &= \frac{(1 - \cos 2x)(2 \sin x \cos x) - \sin^2 x(4 \sin 2x)}{(1 - \cos 2x)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{(\sin 2x)(1 - \cos 2x) - (4 \sin 2x) \sin^2 x}{(1 - \cos 2x)^2}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{(\sin 2x)(1 - \cos 2x) - (4 \sin 2x) \sin^2 x}{(1 - \cos 2x)^2}$$

**ตัวอย่างที่ 29** กำหนดให้  $y = \sqrt{\sin x \cos(3x-7)}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก  $y = \sqrt{\sin x \cos(3x-7)}$  จะได้ว่า  $y = (\sin x \cos(3x-7))^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (\sin x \cos(3x-7))^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (\sin x \cos(3x-7))^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} \sin x \cos(3x-7) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x \cos(3x-7)}} \left[ \sin x \frac{d}{dx} \cos(3x-7) + \cos(3x-7) \frac{d}{dx} \sin x \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x \cos(3x-7)}} \left[ \sin x (-3 \sin(3x-7)) + \cos(3x-7) \cos x \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sin x \cos(3x-7)}} \left[ -3 \sin x \sin(3x-7) + \cos(3x-7) \cos x \right] \\ &= \frac{\cos x \cos(3x-7) - 3 \sin x \sin(3x-7)}{2\sqrt{\sin x \cos(3x-7)}} \\ \text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos x \cos(3x-7) - 3 \sin x \sin(3x-7)}{2\sqrt{\sin x \cos(3x-7)}} \end{aligned}$$

สูตรอนุพันธ์ของ  $\tan x$ ,  $\cot x$ ,  $\sec x$  และ  $\operatorname{cosec} x$  หาได้โดยเขียนฟังก์ชันตรีโกณเหล่านี้ใน

รูปของ  $\sin x$  และ  $\cos x$  ดังแสดงในตัวอย่างจะได้

$$\frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \cot x$$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้ดังนี้ กำหนดให้  $u = f(x)$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ซึ่งหาอนุพันธ์ได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin u &= \cos u \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx} \cos u &= -\sin u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \tan u &= \sec^2 u \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx} \sec u &= \sec u \tan u \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \cot u &= -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx} & \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u &= -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 30 กำหนดให้  $y = \cot(2-3x^2)$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \cot(2-3x^2)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \cot(2-3x^2) \\ &= -\operatorname{csc}^2(2-3x^2) \frac{d}{dx} (2-3x^2) \\ &= -\operatorname{csc}^2(2-3x^2)(-6x) \\ &= 6x \operatorname{csc}^2(2-3x^2) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = 6x \operatorname{csc}^2(2-3x^2)$$

ตัวอย่างที่ 31 กำหนดให้  $y = \sqrt{2-3\tan^2 x}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \sqrt{2-3\tan^2 x}$  จะได้ว่า  $y = (2-3\tan^2 x)^{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (2-3\tan^2 x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} (2-3\tan^2 x)^{-\frac{1}{2}} \frac{d}{dx} (2-3\tan^2 x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2-3\tan^2 x}} (-3(2)\tan x(\sec^2 x)) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2-3\tan^2 x}} (-6\tan x \sec^2 x) \\ &= \frac{-3\tan x \sec^2 x}{\sqrt{2-3\tan^2 x}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{-3 \tan x \sec^2 x}{\sqrt{2-3 \tan^2 x}}$$

**ตัวอย่างที่ 32** กำหนดให้  $y = \operatorname{cosec} x + \sin(3x^2 - 1) + x - 3$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

**วิธีทำ** จาก  $y = \operatorname{cosec} x + \sin(3x^2 - 1) + x - 3$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} [\operatorname{cosec} x + \sin(3x^2 - 1) + x - 3] \\ &= \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x + \frac{d}{dx} \sin(3x^2 - 1) + \frac{dx}{dx} - \frac{d3}{dx} \\ &= -\operatorname{cosec} x \cot x + \cos(3x^2 - 1) \frac{d}{dx} (3x^2 - 1) + 1 - 0 \\ &= -\operatorname{cosec} x \cot x + (\cos(3x^2 - 1))(6x) + 1 \\ &= -\operatorname{cosec} x \cot x + 6x \cos(3x^2 - 1) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = -\operatorname{cosec} x \cot x + 6x \cos(3x^2 - 1) + 1$$

### การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันจากจำนวนจริงไปบนช่วงปิด  $[-1, 1]$  ซึ่งไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจึงทำให้ฟังก์ชันไซน์ผกผันไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้าเราจำกัดโดเมนของฟังก์ชันไซน์ให้อยู่ในช่วงปิด

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  จะทำให้ฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากช่วงปิด  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  ไปบนช่วง

$[-1, 1]$  ซึ่งจะทำให้ผกผันของฟังก์ชันไซน์เป็นฟังก์ชันและเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจากช่วงปิด

$[-1, 1]$  ไปบนช่วงปิด  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  และเราจะเรียกผกผันของฟังก์ชันไซน์ว่า ฟังก์ชันอาร์คไซน์ และ

เขียนแทนด้วย  $\arcsin$

ดังนั้น จะได้ว่า  $y = \arcsin x$  เมื่อ  $x \in [-1, 1]$  ก็ต่อเมื่อ  $x = \sin y$  เมื่อ

$y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  และจะหาอนุพันธ์ได้ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.15 ให้  $y = \arcsin x$  เมื่อ  $x \in [-1, 1]$  และ  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  จะได้ว่า

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

จากกฎลูกโซ่ ถ้า  $u = f(x)$  แล้วจะได้ว่า  $\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$

ในการทำงานเดียวกันเราสามารถจำกัดโดเมนของฟังก์ชัน cosine, tangent, cotangent, secant และ cosecant เพื่อให้ฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งจะช่วยให้ผกผันของฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสรุปได้ดังนี้ คือ

$$y = \arccos x \text{ เมื่อ } x \in [-1, 1] \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \cos y \text{ เมื่อ } y \in [0, \pi]$$

$$y = \arctan x \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{R} \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \tan y \text{ เมื่อ } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$y = \operatorname{arccot} x \text{ เมื่อ } x \in \mathbb{R} \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \cot y \text{ เมื่อ } y \in [0, \pi]$$

$$y = \operatorname{arcsec} x \text{ เมื่อ } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \sec y \text{ เมื่อ } y \in [0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$y = \operatorname{arccsc} x \text{ เมื่อ } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = \csc y \text{ เมื่อ } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$$

ตัวอย่างที่ 33 กำหนดให้  $y = \arcsin(4x-9)$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \arcsin(4x-9)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \arcsin(4x-9) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(4x-9)^2}} \frac{d}{dx} (4x-9) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-(4x-9)^2}} (4) \\ &= \frac{4}{\sqrt{1-(4x-9)^2}} \\ &= \frac{4}{\sqrt{1-(16x^2-72x+81)}} = \frac{4}{\sqrt{-16x^2+72x-80}} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{dy}{dx} = \frac{4}{\sqrt{-16x^2+72x-80}}$$

สรุปสูตรอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันได้ดังนี้ กำหนดให้  $u = f(x)$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ซึ่งหาอนุพันธ์ได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arcsin u &= \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \arccos u &= \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} ; |u| < 1 \\ \frac{d}{dx} \arctan u &= \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arcsec} u &= \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} u &= \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx} ; u \in \mathbb{R} \\ \frac{d}{dx} \operatorname{arccsc} u &= \frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} ; |u| > 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 34 กำหนดให้  $y = \operatorname{arccot} \frac{(1+x)}{(1-x)}$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \operatorname{arccot} \frac{(1+x)}{(1-x)}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \operatorname{arccot} \frac{(1+x)}{(1-x)} \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2 + (1+x)^2} \left( \frac{(1-x) - (1+x)(-1)}{(1-x)^2} \right) \\ &= \frac{-2}{2+2x^2} \\ &= -\frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}$

ตัวอย่างที่ 35 กำหนดให้  $y = \arctan\left(\frac{2}{3} \tan x\right)$  จงหา  $\frac{dy}{dx}$

วิธีทำ จาก  $y = \arctan\left(\frac{2}{3} \tan x\right)$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \arctan\left(\frac{2}{3} \tan x\right) \\ &= \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{3} \tan x\right)^2} \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} \tan x\right) \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \tan^2 x} \left(\frac{2}{3} \sec^2 x\right) \\ &= \frac{6 \sec^2 x}{9 + 4 \tan^2 x} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{dy}{dx} = \frac{6 \sec^2 x}{9 + 4 \tan^2 x}$

### การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันชี้กำลัง

ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมโดยนิยามนั้นจะมี  $e$  เข้ามาเกี่ยวข้องด้วย ซึ่ง  $e$  เป็น

ค่าคงตัว และมีค่าประมาณ 2.71828 เป็นค่า  $\lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$

$$\text{นั่นคือ } e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$$

เพื่อ่ายในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึม จึงกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของลอการิทึมดังต่อไปนี้ เมื่อ  $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, M > 0, N > 0$  และ  $M^n$  เป็นจำนวนจริง

1.  $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
2.  $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
3.  $\log_a M^n = n \log_a M$
4.  $\log_a a = 1$
5.  $\log_a 1 = 0$
6.  $a^{\log_a M} = M$
7.  $\log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M$  เมื่อ  $n \neq 0$
8.  $\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$
9.  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

ทฤษฎีบทที่ 2.16 ให้  $f(x) = \ln x$  เมื่อ  $x > 0$  แล้ว จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.17 ให้  $f(u) = \ln u$  เมื่อ  $u > 0$  และ  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 37 กำหนดให้  $f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 5)$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \ln(3x^2 - 6x + 5)$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \ln(3x^2 - 6x + 5) \\ &= \frac{1}{3x^2 - 6x + 5} \frac{d}{dx} (3x^2 - 6x + 5) \\ &= \frac{1}{3x^2 - 6x + 5} (6x - 6) \\ &= \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 5} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $f'(x) = \frac{6x - 6}{3x^2 - 6x + 5}$

ตัวอย่างที่ 38 กำหนดให้  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{4x-3}\right)$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{4x-3}\right)$  จะได้  $f(x) = \ln(x-1) - \ln(4x-3)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{4x-3}\right)$  จะได้  $f(x) = \ln(x-1) - \ln(4x-3)$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} [\ln(x-1) - \ln(4x-3)] \\ &= \frac{d}{dx} \ln(x-1) - \frac{d}{dx} \ln(4x-3) \\ &= \frac{1}{x-1} \frac{d}{dx} (x-1) - \frac{1}{4x-3} \frac{d}{dx} (4x-3) \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{4}{4x-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1(4x-3)-4(x-1)}{(x-1)(4x-3)} \\
&= \frac{4x-3-4x+4}{(x-1)(4x-3)} \\
&= \frac{1}{4x^2-7x+3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น  $f'(x) = \frac{1}{4x^2-7x+3}$

**ทฤษฎีบทที่ 2.18** ให้  $f(x) = \log_a x$  เมื่อ  $x > 0$  โดยที่  $a$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

**ทฤษฎีบทที่ 2.19** ให้  $f(u) = \log_a u$  เมื่อ  $u > 0$  เมื่อ  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่  $a$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u \ln a} \frac{du}{dx}$$

**ตัวอย่างที่ 38** กำหนดให้  $f(x) = \log_3(3x+5)$  จงหา  $f'(x)$

**วิธีทำ** จาก  $f(x) = \log_3(3x+5)$

$$\begin{aligned}
\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \log_3(3x+5) \\
&= \frac{1}{(3x+5) \ln 3} \frac{d}{dx}(3x+5) \\
&= \frac{1}{(3x+5) \ln 3} (3) \\
&= \frac{3}{(3x+5) \ln 3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น  $f'(x) = \frac{3}{(3x+5) \ln 3}$

ตัวอย่างที่ 39 กำหนดให้  $f(x) = \log(x^2 - 7x + 10)$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \log(x^2 - 7x + 10)$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \log(x^2 - 7x + 10) \\ &= \frac{1}{(x^2 - 7x + 10) \ln 10} \frac{d}{dx} (x^2 - 7x + 10) \\ &= \frac{1}{(x^2 - 7x + 10) \ln 10} (2x - 7) \\ &= \frac{2x - 7}{(x^2 - 7x + 10) \ln 10} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $f'(x) = \frac{2x - 7}{(x^2 - 7x + 10) \ln 10}$

ทฤษฎีบทที่ 2.20 ให้  $f(u) = e^u$  เมื่อ  $u > 0$  เมื่อ  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ที่หาอนุพันธ์ได้ จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.21 ให้  $f(u) = a^u$  เมื่อ  $u > 0$  เมื่อ  $u$  เป็นฟังก์ชันของ  $x$  ที่หาอนุพันธ์ได้ โดยที่  $a$  เป็นจำนวนจริงซึ่ง  $a > 0$  และ  $a \neq 1$  จะได้ว่า

$$\frac{d}{dx} f(u) = \frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่างที่ 40 กำหนดให้  $f(x) = e^{x^3} + 3e^{-\frac{x}{4}} - 5e^{2x}$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = e^{x^3} + 3e^{-\frac{x}{4}} - 5e^{2x}$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( e^{x^3} + 3e^{-\frac{x}{4}} - 5e^{2x} \right) \\ &= \frac{d}{dx} e^{x^3} + 3 \frac{d}{dx} e^{-\frac{x}{4}} - 5 \frac{d}{dx} e^{2x} \\ &= e^{x^3} \frac{d}{dx} (x^3) + 3e^{-\frac{x}{4}} \frac{d}{dx} \left( -\frac{x}{4} \right) - 5e^{2x} \frac{d}{dx} (2x) \\ &= e^{x^3} (3x^2) + 3e^{-\frac{x}{4}} \left( -\frac{1}{4} \right) - 5e^{2x} (2) \\ &= 3x^2 e^{x^3} - \frac{3}{4} e^{-\frac{x}{4}} - 10e^{2x} \end{aligned}$$

ดังนั้น  $f'(x) = 3x^2 e^{x^3} - \frac{3}{4} e^{-\frac{x}{4}} - 10e^{2x}$

ตัวอย่างที่ 41 กำหนดให้  $f(x) = e^{-3x} \log_5 x$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = e^{-3x} \log_5 x$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} (e^{-3x} \log_5 x) \\ &= e^{-3x} \frac{d}{dx} \log_5 x + \log_5 x \frac{d}{dx} e^{-3x} \\ &= e^{-3x} \frac{1}{x \ln 5} + \log_5 x \left[ e^{-3x} \frac{d}{dx} (-3x) \right] \\ &= e^{-3x} \frac{1}{x \ln 5} + \log_5 x \left[ e^{-3x} (-3) \right] \\ &= e^{-3x} \frac{1}{x \ln 5} - 3e^{-3x} \log_5 x \end{aligned}$$

ดังนั้น  $f'(x) = e^{-3x} \frac{1}{x \ln 5} - 3e^{-3x} \log_5 x$

ตัวอย่างที่ 42 กำหนดให้  $f(x) = \frac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^{-3x} - e^{3x}}$  จงหา  $f'(x)$

วิธีทำ จาก  $f(x) = \frac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^{-3x} - e^{3x}}$

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{-3x} + e^{3x}}{e^{-3x} - e^{3x}} \right) \\ &= \frac{(e^{-3x} - e^{3x}) \frac{d}{dx} (e^{-3x} + e^{3x}) - (e^{-3x} + e^{3x}) \frac{d}{dx} (e^{-3x} - e^{3x})}{(e^{-3x} - e^{3x})^2} \\ &= \frac{(e^{-3x} - e^{3x})(-3e^{-3x} + 3e^{3x}) - (e^{-3x} + e^{3x})(-3e^{-3x} - 3e^{3x})}{(e^{-3x} - e^{3x})^2} \\ &= \frac{(-3e^{-6x} + 3e^0 + 3e^0 - 3e^{6x}) - (-3e^{-6x} - 3e^0 - 3e^0 - 3e^{6x})}{(e^{-3x} - e^{3x})^2} \\ &= \frac{-3e^{-6x} + 3 + 3 - 3e^{6x} + 3e^{-6x} + 3 + 3 + 3e^{6x}}{(e^{-3x} - e^{3x})^2} \\ &= \frac{12}{(e^{-3x} - e^{3x})^2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f'(x) = \frac{12}{(e^{-3x} - e^{3x})^2}$$

### การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันปริยาย

โดยทั่วไปเราจะพบฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปของ  $y = f(x)$  ซึ่งเราจะเรียก  $y$  เป็นฟังก์ชันชัดแจ้ง (explicit function) ของ  $x$  ตัวอย่าง เช่น

$$y = x^2 + 4x + 2, \quad y = \sqrt{x^2 - 3}, \quad y = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{ เป็นต้น }$$

เมื่อพิจารณาสมการ  $y^2 + x^2 = 1$  ซึ่งเราทราบว่าเป็นสมการของวงกลมที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(0, 0)$  และมีรัศมีเท่ากับ 1 จากสมการนี้เราจะเรียก  $y$  เป็นฟังก์ชันปริยาย (implicit function) ของ  $x$  เนื่องจากค่า  $x$  หนึ่งค่า จะให้ค่าของ  $y$  สองค่าด้วยกัน นั่นคือ

$$y = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

โดยที่  $y = \sqrt{1-x^2}$  จะให้กราฟครึ่งวงกลมที่อยู่เหนือแกน  $x$  และ  $y = -\sqrt{1-x^2}$  จะให้กราฟครึ่งวงกลมที่อยู่ใต้แกน  $x$  เมื่อพิจารณาความชันของเส้นสัมผัส ณ จุด  $x$  ใด ๆ บนวงกลม จะสามารถหาได้จากการหาอนุพันธ์ของสมการวงกลมเทียบกับตัวแปร  $x$  นั่นคือ

$$\frac{d}{dx}(y^2) + \frac{d}{dx}(x^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

เนื่องจาก  $y$  เป็นฟังก์ชันของตัวแปร  $x$  ดังนั้นเราจึงใช้กฎลูกโซ่มาช่วยในการหาอนุพันธ์ นั่นคือ

$$2y \frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

ดังนั้น ความชันของเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด  $x$  ใด ๆ จะมีค่าเท่ากับ  $-\frac{x}{y}$

**ตัวอย่างที่ 43** จงหา  $\frac{dy}{dx}$  ของสมการ  $2y^3 + xy = 5$

**วิธีทำ** จากโจทย์พิจารณาสมการ  $2y^3 + xy = 5$  พบว่า  $y$  เป็นฟังก์ชันปริยายของ  $x$

เราสามารถหา  $\frac{dy}{dx}$  ได้โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร  $x$  ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\frac{d}{dx}(2y^3 + xy) = \frac{d}{dx}(5)$$

$$2 \frac{d}{dx}(y^3) + \frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(5)$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$6y^2 \frac{dy}{dx} + \left[ x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right] = 0$$

$$6y^2 \frac{dy}{dx} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\left[ 6y^2 + x \right] \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{6y^2 + x}$$

ดังนั้น ค่าของ  $\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{6y^2 + x}$

ตัวอย่างที่ 44 จงหาค่าของ  $\frac{dx}{dy}$  เมื่อกำหนด  $4\sqrt{x} - x^2y = \sqrt{2y}$  ที่จุด  $(2, 1)$

วิธีทำ จากโจทย์พิจารณาสมการ  $4\sqrt{x} - x^2y = \sqrt{2y}$  พบว่า  $x$  เป็นฟังก์ชันปริยายของ  $y$

เราสามารถหา  $\frac{dx}{dy}$  ได้โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร  $y$  ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(4\sqrt{x} - x^2y) &= \frac{d}{dy}(\sqrt{2y}) \\ \frac{d}{dy}(4\sqrt{x}) - \frac{d}{dy}(x^2y) &= \frac{d}{dy}(\sqrt{2y})\end{aligned}$$

เนื่องจาก  $x$  เป็นฟังก์ชันของ  $y$  โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$4 \frac{d}{dy} \left( x^{\frac{1}{2}} \right) - \left[ x^2 \frac{d}{dy}(y) + y \frac{d}{dy}(x^2) \right] = \frac{d}{dy} \left( (2y)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$4 \left[ \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{dy} \right] - x^2 - 2xy \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} (2y)^{-\frac{1}{2}} (2)$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dx}{dy} - x^2 - 2xy \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2y}}$$

$$\left( \frac{2}{\sqrt{x}} - 2xy \right) \frac{dx}{dy} - x^2 = \frac{1}{\sqrt{2y}}$$

$$\left( \frac{2}{\sqrt{x}} - 2xy \right) \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2y}} + x^2$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2y}} + x^2}{\left( \frac{2}{\sqrt{x}} - 2xy \right)}$$

ดังนั้น ค่าของ  $\frac{dx}{dy}$  ที่จุด  $(2, 1)$  จะมีค่าเท่ากับ

$$\left. \frac{dx}{dy} \right|_{(2,1)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + 2^2}{\frac{2}{\sqrt{2}} - 2(2)(1)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + 4}{\frac{2}{\sqrt{2}} - 4}$$

ตัวอย่างที่ 45 จงหาค่าของ  $\frac{dy}{dx}$  และ  $\frac{dx}{dy}$  เมื่อกำหนด  $6xy^2 - x^2y = 2x - 3y$

วิธีทำ จากโจทย์พิจารณาสมการ  $6xy^2 - x^2y = 2x - 3y$  พบว่า

กรณีที่ 1  $y$  เป็นฟังก์ชันปริยายของ  $x$  เราสามารถหา  $\frac{dy}{dx}$  โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร

$x$  ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(6xy^2 - x^2y) &= \frac{d}{dx}(2x - 3y) \\ 6\frac{d}{dx}(xy^2) - \frac{d}{dx}(x^2y) &= 2\frac{dx}{dx} - 3\frac{d}{dx}y\end{aligned}$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}6\left[x\frac{d}{dx}(y^2) + y^2\frac{dx}{dx}\right] - \left[x^2\frac{d}{dx}(y) + y\frac{d}{dx}(x^2)\right] &= 2\frac{dx}{dx} - 3\frac{d}{dx}y \\ 6\left[2xy\frac{dy}{dx} + y^2\right] - \left[x^2\frac{dy}{dx} + 2xy\right] &= 2 - 3\frac{dy}{dx} \\ 12xy\frac{dy}{dx} + 6y^2 - x^2\frac{dy}{dx} - 2xy &= 2 - 3\frac{dy}{dx} \\ \left[12xy - x^2 + 3\right]\frac{dy}{dx} &= 2 + 6y^2 + 2xy \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{6y^2 + 2xy + 2}{-x^2 + 12xy + 3}\end{aligned}$$

กรณีที่ 2  $x$  เป็นฟังก์ชันปริยายของ  $y$  เราสามารถหา  $\frac{dx}{dy}$  โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร

$y$  ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dy}(6xy^2 - x^2y) &= \frac{d}{dy}(2x - 3y) \\ 6\frac{d}{dy}(xy^2) - \frac{d}{dy}(x^2y) &= 2\frac{dx}{dy} - 3\frac{d}{dy}y\end{aligned}$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
6\left[x\frac{d}{dy}(y^2)+y^2\frac{dx}{dy}\right]-\left[x^2\frac{d}{dy}(y)+y\frac{d}{dy}(x^2)\right] &= 2\frac{dx}{dy}-3\frac{dy}{dy} \\
6\left[2xy+y^2\frac{dx}{dy}\right]-\left[x^2+2xy\frac{dx}{dy}\right] &= 2\frac{dx}{dy}-3 \\
12xy+6y^2\frac{dx}{dy}-x^2-2xy\frac{dx}{dy} &= 2\frac{dx}{dy}-3 \\
\left[6y^2-2xy-2\right]\frac{dx}{dy} &= x^2-12xy-3 \\
\frac{dx}{dy} &= \frac{x^2-12xy-3}{6y^2-2xy-2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าของ  $\frac{dy}{dx} = \frac{6y^2+2xy+2}{-x^2+12xy+3}$

และค่าของ  $\frac{dx}{dy} = \frac{x^2-12xy-3}{6y^2-2xy-2}$

**ตัวอย่างที่ 46** จงหาค่าของ  $\frac{dy}{dx}$  เมื่อกำหนด  $x \cos y + y \sin x = 0$

**วิธีทำ** จากโจทย์พิจารณาสมการ  $x \cos y + y \sin x = 0$  พบว่า  $y$  เป็นฟังก์ชันปริยายของ  $x$

เราสามารถหา  $\frac{dy}{dx}$  ได้โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร  $x$  ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x \cos y + y \sin x) &= \frac{d}{dx}(0) \\
\frac{d}{dx}(x \cos y) + \frac{d}{dx}(y \sin x) &= \frac{d}{dx}(0)
\end{aligned}$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left[x\frac{d}{dx}(\cos y)+\cos y\frac{dx}{dx}\right]+\left[y\frac{d}{dx}(\sin x)+\sin x\frac{dy}{dx}\right] &= 0 \\
\left[-x\sin y\frac{dy}{dx}+\cos y\right]+\left[y\cos x+\sin x\frac{dy}{dx}\right] &= 0 \\
-x\sin y\frac{dy}{dx}+\sin x\frac{dy}{dx} &= -\cos y-y\cos x \\
[\sin x-x\sin y]\frac{dy}{dx} &= -\cos y-y\cos x \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{-\cos y-y\cos x}{\sin x-x\sin y}
\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าของ  $\frac{dy}{dx} = \frac{-\cos y - y \cos x}{\sin x - x \sin y}$

**ตัวอย่างที่ 47** จงหาค่าของ  $\frac{dy}{dx}$  เมื่อกำหนด  $e^{xy} + y \ln x = \cos 2x$

**วิธีทำ** จากโจทย์พิจารณาสมการ  $e^{xy} + y \ln x = \cos 2x$  พบว่า  $y$  เป็นฟังก์ชันปริยายของ  $x$

เราสามารถหา  $\frac{dy}{dx}$  ได้โดยหาอนุพันธ์เทียบตัวแปร  $x$  ทั้งสองข้างของสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(e^{xy} + y \ln x) &= \frac{d}{dx}(\cos 2x) \\ \frac{d}{dx}(e^{xy}) + \frac{d}{dx}(y \ln x) &= \frac{d}{dx}(\cos 2x)\end{aligned}$$

โดยกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}e^{xy} \frac{d}{dx}(xy) + \left[ y \frac{d}{dx}(\ln x) + \ln x \frac{dy}{dx} \right] &= \frac{d}{dx}(\cos 2x) \\ e^{xy} \left[ x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right] + \left[ y \frac{1}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} \right] &= -\sin 2x \frac{d}{dx}(2x) \\ e^{xy} \left[ x \frac{dy}{dx} + y \right] + \left[ y \frac{1}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} \right] &= -2 \sin 2x \\ xe^{xy} \frac{dy}{dx} + e^{xy} y + y \frac{1}{x} + \ln x \frac{dy}{dx} &= -2 \sin 2x \\ xe^{xy} \frac{dy}{dx} + \ln x \frac{dy}{dx} &= -2 \sin 2x - ye^{xy} - \frac{y}{x} \\ (xe^{xy} + \ln x) \frac{dy}{dx} &= -2 \sin 2x - ye^{xy} - \frac{y}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-2x \sin 2x - xye^{xy} - y}{x(xe^{xy} + \ln x)}\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าของ  $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x \sin 2x - xye^{xy} - y}{x(xe^{xy} + \ln x)}$

## บทสรุป

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน หมายถึง อัตราส่วนระหว่างผลต่างของตัวแปรตามต่อผลต่างที่น้อยที่สุดของตัวแปรอิสระ

การที่เราจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ก่อนอื่นต้องตรวจสอบก่อนว่าฟังก์ชันที่เราต้องการหาค่าอนุพันธ์นั้นมีอนุพันธ์หรือไม่ ซึ่งถ้าหากฟังก์ชันนั้นมีอนุพันธ์แล้วเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้เลยอาจจะหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น ๆ โดยใช้บทนิยามก็ได้ แต่ถ้าหากบางฟังก์ชันการใช้บทนิยามอาจจะเกิดความยุ่งยากและซับซ้อน ทำให้เกิดความไม่เหมาะสม เราสามารถใช้ทฤษฎีของการหาอนุพันธ์ หรือสูตรต่าง ๆ ที่มีการพิสูจน์ไว้แล้ว เพื่อความง่ายและสะดวก ซึ่งจำแนกได้หลายรูปแบบ เช่น การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต การหาอนุพันธ์ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลอการิทึมและฟังก์ชันเลขชี้กำลัง และการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย เราสามารถนำการหาอนุพันธ์ไปใช้อย่างแพร่หลายทั้งในทางวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ เศรษฐศาสตร์ การแพทย์และวิทยาการคอมพิวเตอร์ เพื่อแก้ปัญหาต่าง ๆ ได้อย่างถูกต้องและเหมาะสม

## แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาอนุพันธ์ของ  $f(x) = 2x^2 + x - 7$

1.1 ที่จุด  $x$  ใด ๆ

1.2 ที่จุด  $x = 2$

1.3 ที่จุด  $x = 3$

2. จงหาอนุพันธ์ของ  $f(x) = (3x^2 - 5)^2$

2.1 ที่จุด  $x$  ใด ๆ

2.2 ที่จุด  $x = 1$

2.3 ที่จุด  $x = 2$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$3.1 \quad f(x) = (3x^3 - 2x + 4)^9$$

$$3.2 \quad f(x) = \sqrt{x} - 6x^{10} + 12$$

$$3.3 \quad f(x) = (x^4 - 5x)(x - 9)$$

$$3.4 \quad f(x) = \frac{(2x^6 - x)^5}{\sqrt{3x^2 + 4x}}$$

$$3.5 \quad f(x) = (2x^6 - x)(3x^2 + 4x)$$

$$3.6 \quad f(x) = \frac{2x^4 + 9x^3 - 4x}{x^2 + 2}$$

$$3.7 \quad f(x) = \frac{(2x^6 - x)^{12}}{3x^2 + 4x}$$

$$3.8 \quad f(x) = \frac{(2x^6 - x)^{12} \sqrt{3x^2 + 4x}}{3x^2 + 4x}$$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$4.1 \quad y = \sin(x^{14} + 9x + 15)$$

$$4.2 \quad y = \sin 4x + \cos 3x$$

$$4.3 \quad y = \tan^2 x$$

$$4.4 \quad y = \cot(4x^{10} - 8)$$

$$4.5 \quad y = \sin x \cos 2x$$

$$4.6 \quad y = \sec(x^6 - 14)$$

$$4.7 \quad y = \cos(3x^5 - x) \tan(x - 3)$$

$$4.8 \quad y = \tan^{19}(x^5 - 1)$$

$$4.9 \quad y = \sec x \tan x$$

$$4.10 \quad y = \frac{\cot(3x^{20} - 4)}{x^3 - 5x} \sin x \cos 2x$$

5. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$5.1 \quad y = \arccos x^3$$

$$5.2 \quad y = \arctan 4x^2$$

$$5.3 \quad y = (\operatorname{arccot} \sqrt{x})^2$$

$$5.4 \quad y = \tan(\arcsin 2x^2)$$

$$5.5 \quad y = x \left( \operatorname{arccsc} \frac{1}{x} \right) + \sqrt{1+x^2}$$

$$5.6 \quad y = \operatorname{arcsec} \left( x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$$

6. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

$$6.1 \quad y = \ln(x^5 + 7x - 20)$$

$$6.2 \quad y = \log(4x^5 - 3x)$$

$$6.3 \quad y = 9^{5x^3 - 7x}$$

$$6.4 \quad y = e^{x^{10} - 1}$$

$$6.5 \quad y = \frac{\ln(3x^{20} - 4)}{x^3 - 5x}$$

$$6.6 \quad y = \ln(\cos^3 x)$$

$$6.7 \quad y = (\ln x + x)^2 \quad y = \ln(\cos^3 x)$$

$$6.8 \quad y = \ln(\cos^4 x)$$

$$6.9 \quad y = \left[ \ln(x^4 - 1) \right]^{10}$$

$$6.10 \quad y = e^x \ln x^2$$

7. ให้  $y$  เป็นฟังก์ชันปริยายของ  $x$  ซึ่งสอดคล้องกับสมการดังต่อไปนี้ จงหา  $\frac{dy}{dx}$

$$7.1 \quad 3yx^5 - x = 6$$

$$7.2 \quad x(3 - y^2) = \sin y$$

$$7.3 \quad y^5 x^6 - x = x^2$$

$$7.4 \quad \frac{x+y}{x-y} = x$$

$$7.5 \quad y^5 \sin x - y = 1$$

$$7.6 \quad \sqrt{x} + \sqrt{y} - \sqrt{xy} = 9$$

$$7.7 \quad e^y - \sin x = y - 2$$

$$7.8 \quad y \tan x^6 - 3 = x - y^2$$