

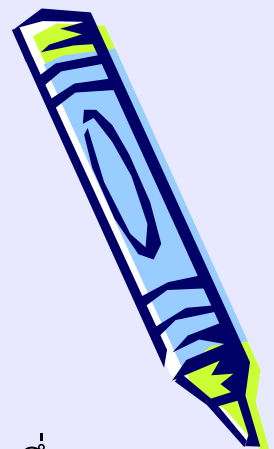


บทที่ 1 เมทริกซ์

4112106 พีชคณิตเชิงเส้น
อาจารย์รัชนิกร ทบประดิษฐ์



เมทริกซ์



เมทริกซ์

โดยทั่วไป เราสามารถพบเห็นข้อมูลหลายชนิดที่เขียนอยู่ในรูปกลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้มากมายในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น ร้านค้าแห่งหนึ่งซื้อเครื่องเขียนมาขาย 4 ชนิด คือ ปากกา ดินสอ ไม้บรรทัด และยางลบ โดยราคาต้นทุนคิดเป็นต่อชิ้น แสดงเป็นตารางได้ดังนี้

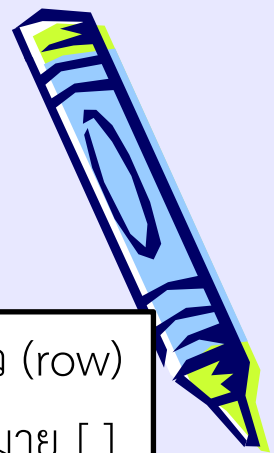
ชนิดเครื่องเขียน	ปากกา	ดินสอ	ไม้บรรทัด	ยางลบ
ราคา/ชิ้น	15	10	8	7

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น $[15 \ 10 \ 8 \ 7]$ หรือ $\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$





เมทริกซ์



นิยาม 1.1 เมทริกซ์มิติ $m \times n$ ประกอบด้วยจำนวนจริงที่เขียนเรียงเป็นแถว m แถว (row) และเขียนในแนวตั้ง n หลัก (Column) โดยปิดล้อมด้วยจำนวนจริงเหล่านี้ด้วยเครื่องหมาย [] หรือ () ซึ่งจำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ เรียกว่า สมาชิกของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 1

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

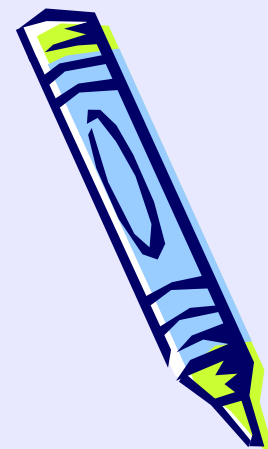
เป็นเมทริกซ์มิติ 3×2 , $[2 \quad -1 \quad 0 \quad 5]$ เป็นเมทริกซ์มิติ 1×4

และ $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2





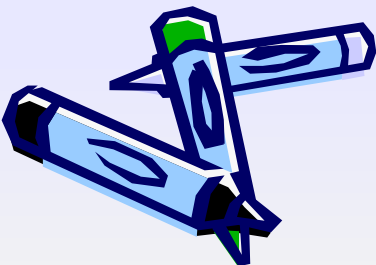
การดำเนินการบนเมทริกซ์



การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะได้ชื่อว่าเป็นเมทริกซ์ที่เท่ากัน เมื่อเมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตัว ซึ่งนิยามได้ดังนี้

นิยาม 1.2 ถ้า $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ จะกล่าวว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ A, B มีมิติเดียวกัน และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ i และ j





การดำเนินการบนเมทริกซ์

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a^2 & 6 \\ b^2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 4+b \\ 4 & a-2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า $a^2 = 25$ และ $a - 2 = -7$

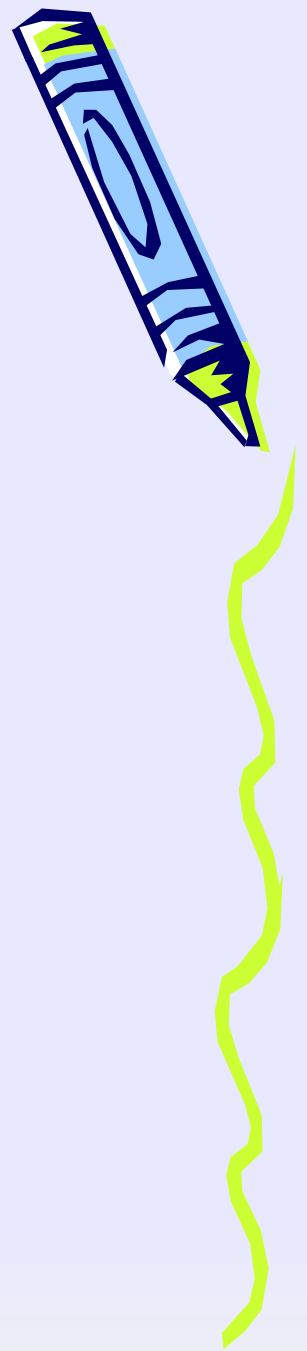
นั่นคือ $a = \pm 5$ และ $a = -5$

ดังนั้น $a = -5$

และจาก $b^2 = 4$ และ $4 + b = 6$

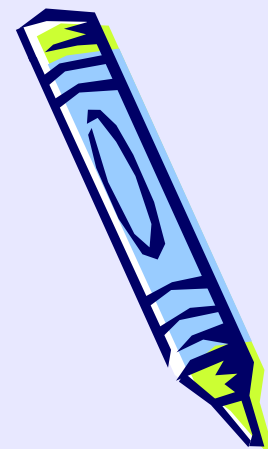
$b = \pm 2$ และ $b = 2$

ดังนั้น $b = 2$





การดำเนินการบนเมทริกซ์



ตัวอย่าง 3 จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2^a & \log b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & (\log b)^2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

วิธีทำ.....

.....

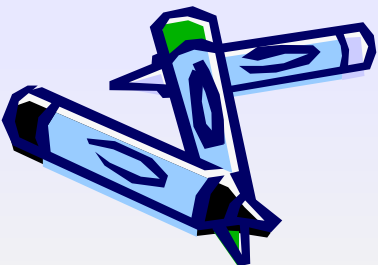
.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4 จงตรวจสอบว่า $A = B$ หรือไม่ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{25} & a^0 \\ \log_a 1 & \ln e^6 \end{bmatrix}$$





การบวก ลบเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

นิยาม 1.3 การบวกเมทริกซ์

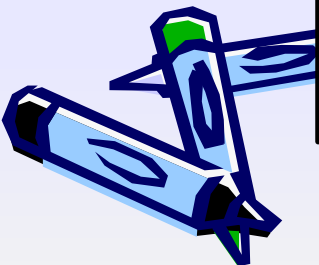
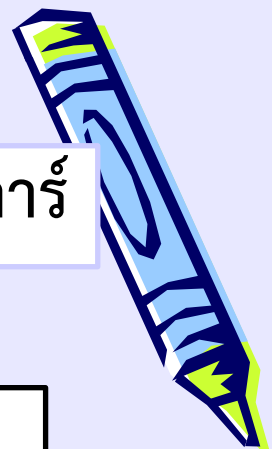
ถ้าเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากัน
แล้ว $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

นิยาม 1.4 การลบเมทริกซ์

ถ้าเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $A - B = A + (-B)$

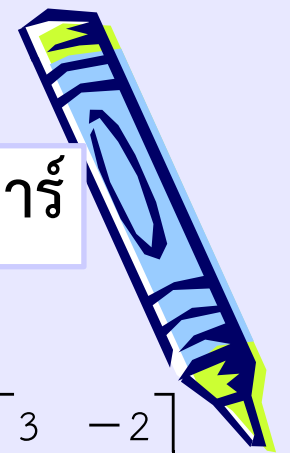
นิยาม 1.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นสเกลาร์ แล้ว $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$





การบวก ลบเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์



ตัวอย่าง 5 กำหนดเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

- จงหา $3A, -5B, 2C, -A+B, D-E$
- จงหา $A+B, B+A, E+D$

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

.....

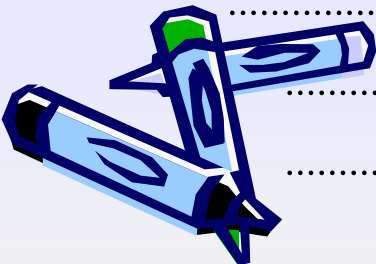
.....

.....

.....

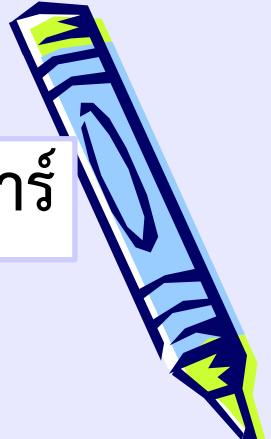
.....

.....





การบวก ลบเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์



ตัวอย่าง 6 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $2X+A = B$

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

.....

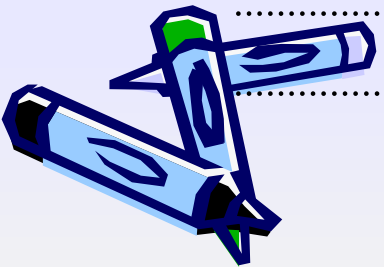
.....

.....

.....

.....

.....





การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

นิยาม 1.6 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ เป็นเมทริกซ์ แล้วผลคูณ AB คือเมทริกซ์ $AB = [c_{ij}]_{m \times p}$ โดยที่

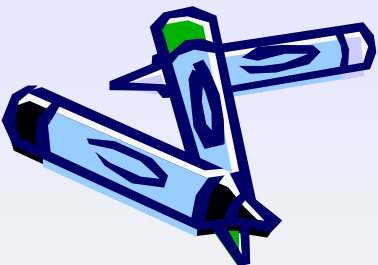
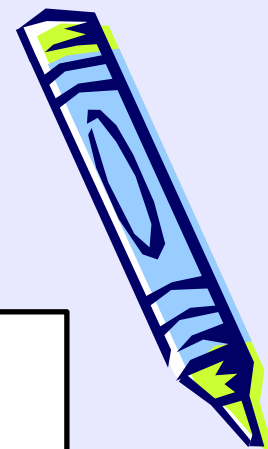
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

ตัวอย่าง 7 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

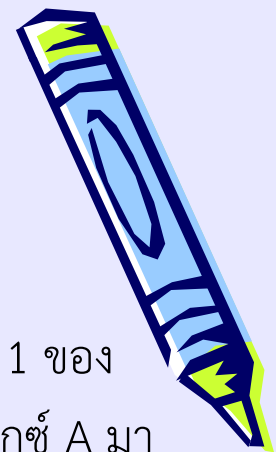
จะได้

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$





ทรานสโพสของเมทริกซ์



ทรานสโพสของเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการนำสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในหลักที่ 1 และนำสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในหลักที่ 2 และทำเช่นนี้จนหมดทุกแถว แทนทรานสโพสของ A ด้วย A^T หรือ A^t

นิยาม 1.7

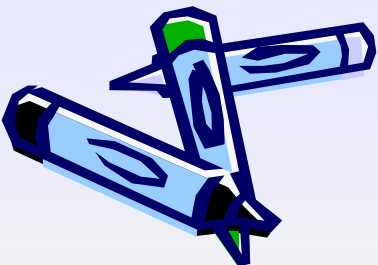
ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ทรานสโพสของ A แทนด้วย A^T โดยที่ $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

ตัวอย่าง 8 กำหนด

จะได้

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}, \quad B = [2 \quad 8 \quad 1]_{1 \times 3}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \quad \text{และ} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$





ทฤษฎีบท

ทรานสโพสของเมทริกซ์

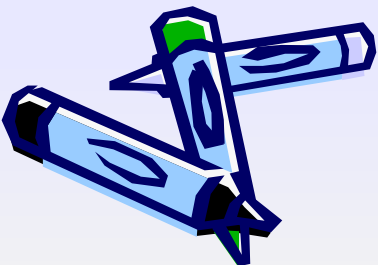
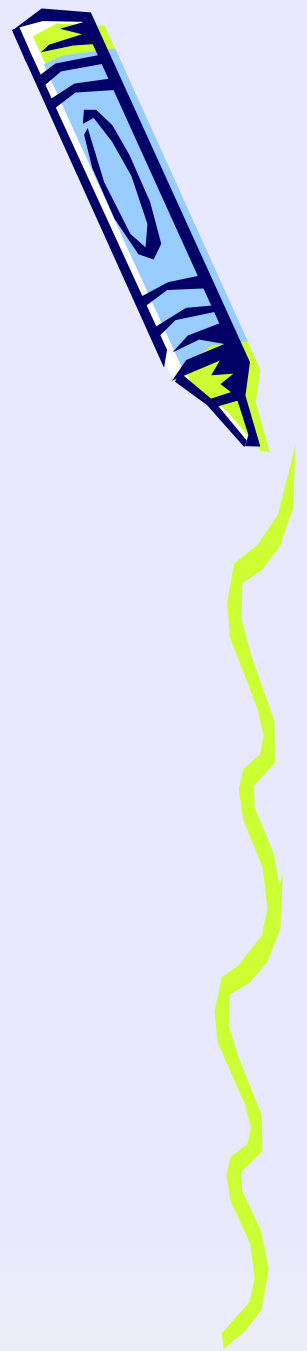
ถ้า k เป็นสเกลาร์ใด ๆ และ A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติแล้วจะได้ว่า

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$ และ $(A - B)^T = A^T - B^T$

3. $(AB)^T = B^T A^T$

4. $(kA)^T = kA^T$





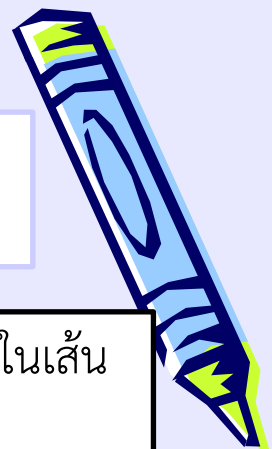
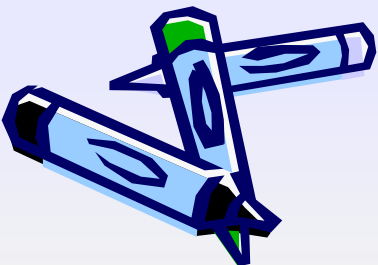
เมทริกซ์แบบต่าง ๆ

นิยาม 1.8 เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมทริกซ์จัตุรัส (เมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$) ที่มีสมาชิกในเส้นทแยงมุมหลักเป็นเลข 1 ทั้งหมด สมาชิกนอกแถวนี้เป็น 0 ใช้สัญลักษณ์ คือ I_n โดยจะเขียน I_n แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n นั่นคือ

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

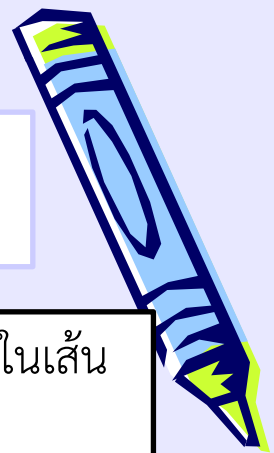
ตัวอย่าง 9 เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติต่าง ๆ กัน

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





เมทริกซ์แบบต่าง ๆ



นิยาม 1.9 เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมทริกซ์จัตุรัส (เมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$) ที่มีสมาชิกในเส้นทแยงมุมหลักเป็นเลข 1 ทั้งหมด สมาชิกนอกแถวนี้เป็น 0 ใช้สัญลักษณ์ คือ I_n โดยจะเขียน I_n แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n นั่นคือ

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

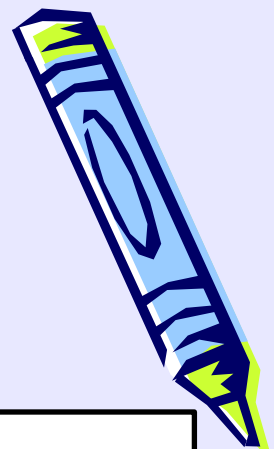
ตัวอย่าง 10 เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติต่าง ๆ กัน

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





เมทริกซ์แบบต่าง ๆ



นิยาม 1.10

จะเรียก เมทริกซ์จัตุรัส A ว่า **เมทริกซ์สมมาตร** (Symmetric matrix) ถ้า $A^T = A$

ตัวอย่าง 11 เมทริกซ์ต่อไปนี้นี้เป็นเมทริกซ์สมมาตร

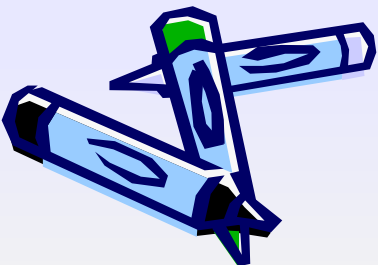
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

นิยาม 1.11

จะเรียก เมทริกซ์จัตุรัส A ว่า **เมทริกซ์สมมาตรเสมือน** (Skew-symmetric matrix) ถ้า $A^T = -A$

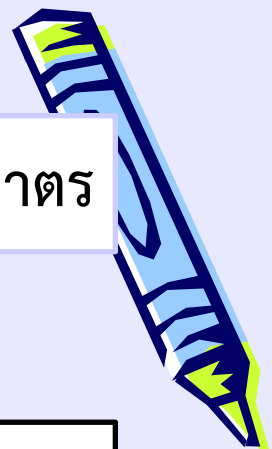
ตัวอย่าง 12 เมทริกซ์ต่อไปนี้นี้เป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$





เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร



เมทริกซ์ทแยงมุม

นิยาม 1.12

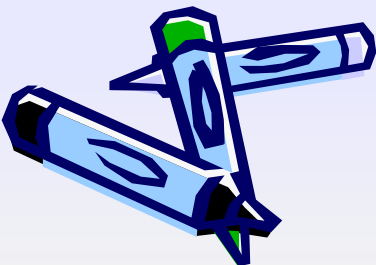
เมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เรียกว่า เมทริกซ์ทแยงมุม เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i \neq j$

รูปแบบทั่วไปของเมทริกซ์ทแยงมุม $n \times n$ มิติ เป็นดังนี้

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

หรืออาจเขียนย่อว่า

$$D = \text{diag}[d_1, d_2, \dots, d_n]$$





เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

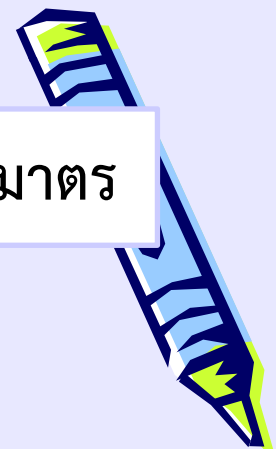
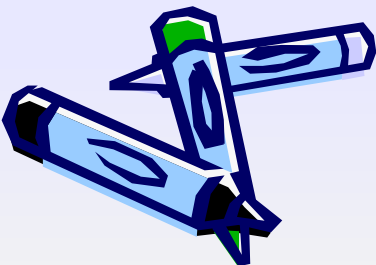
ตัวอย่าง 13 จงหา DA, AD, D^2, D^3, D^{-1} เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$DA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$AD = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$





เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

เมทริกซ์สามเหลี่ยม

นิยาม 1.13

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยม เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$ หรือ $\forall j > i$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall j > i$

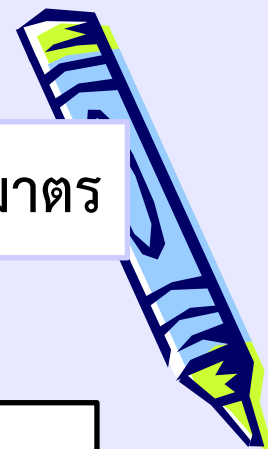
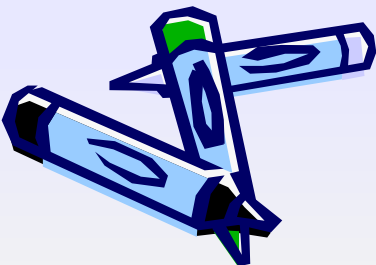
เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง





เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)

นิยาม 1.14 เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น เมทริกซ์สมมาตร เมื่อ $A^T = A$

ทฤษฎีบท

ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีมิติเท่ากัน และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้ว

- 1.) A^T เป็นเมทริกซ์สมมาตร
- 2.) $A + B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร
- 3.) $A - B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร
- 4.) kA เป็นเมทริกซ์สมมาตร



อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

นิยาม 1.15 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ และถ้า B เป็นเมทริกซ์ ที่ซึ่ง $AB = BA = I_n$ แล้ว จะเรียก B ว่า เป็นอินเวอร์สการคูณของ A

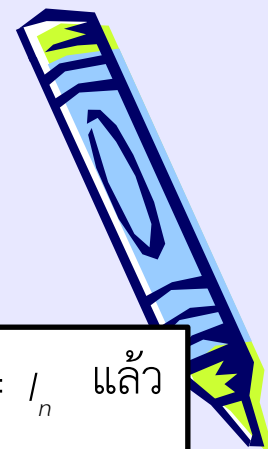
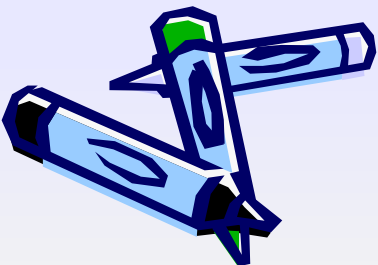
ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณไม่ได้ เรียก A ว่า **เมทริกซ์เอกฐาน** (singular matrix)

ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณได้ เรียก A ว่า **เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน** (non-singular matrix)

ตัวอย่าง 14 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $AB = BA = I_n$ แสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A





อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 15 จงแสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ.....

.....

.....

.....

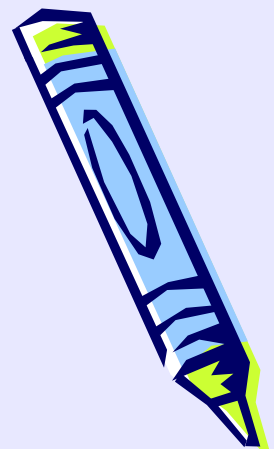
.....

.....

.....

.....

.....





อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท

ถ้า B และ C เป็นอินเวอร์สการคูณ ของ A แล้ว $B = C$

ทฤษฎีบท

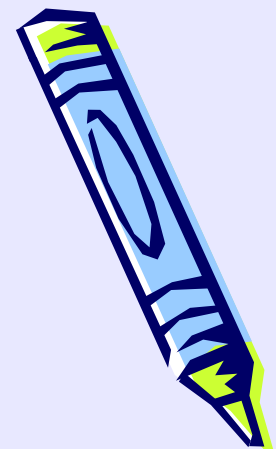
ถ้า $A = [a]$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว อินเวอร์สการคูณของ A หาได้จาก

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท

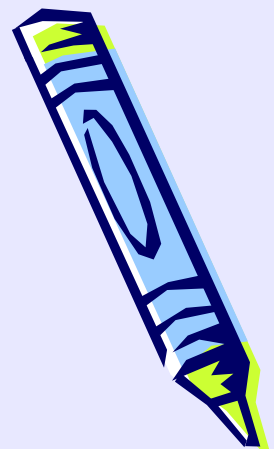
ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$ แล้ว อินเวอร์สการคูณของ A หาได้จาก

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$





อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์



ตัวอย่าง 16 จงหาอินเวอร์สการคูณของ A และ B

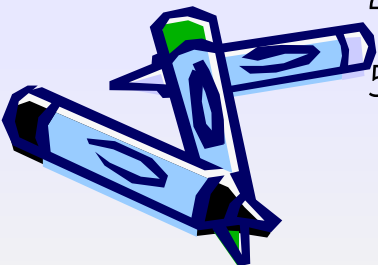
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

สมบัติของอินเวอร์สของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกัน และมีอินเวอร์สการคูณ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$
4. A^n มีอินเวอร์สการคูณ และ $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$
5. kA มีอินเวอร์สการคูณ และ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ สำหรับจำนวนจริง $k \neq 0$





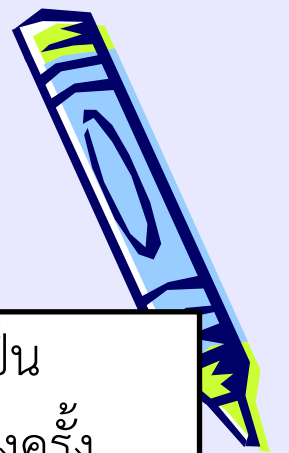
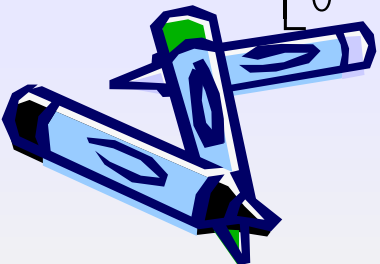
เมทริกซ์มูลฐาน

นิยาม 1.16 เมทริกซ์ E ที่มีมิติ $n \times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์มูลฐาน เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์

ตัวอย่าง 17 เมทริกซ์ต่อไปนี้นี้เป็นเมทริกซ์มูลฐาน

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} r_2' = 3r_2$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} r_1' = (1)r_1$

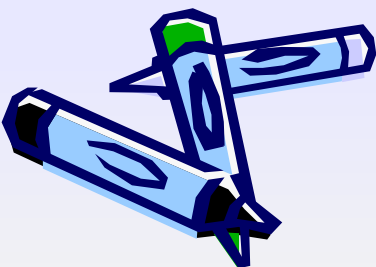
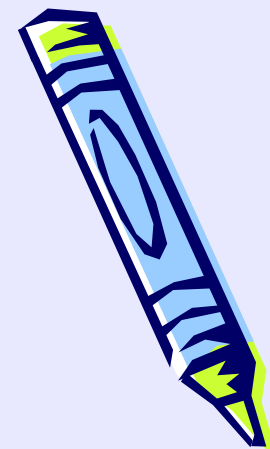




เมทริกซ์มูลฐาน

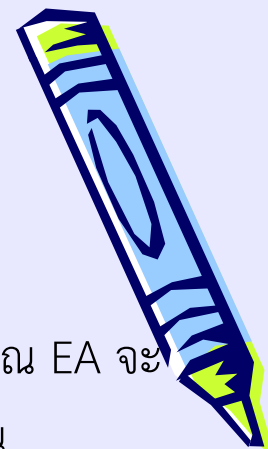
3.
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
 เพราะ
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r'_1 = r_3 \\ \\ r'_3 = r_1 \end{matrix}$$

4.
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
 เพราะ
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ r'_2 = r_2 + 4r_4 \\ \\ \end{matrix}$$





เมทริกซ์มูลฐาน



ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และ E เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่มีมิติ $m \times n$ แล้วผลคูณ EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดเดียวกับ E บน A เช่น

ให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×4

และ $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่เกิดจากการสลับแถวของ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} r'_1 = r_2 \\ r'_2 = r_1 \end{matrix}$

จะได้

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเหมือนกับการสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A





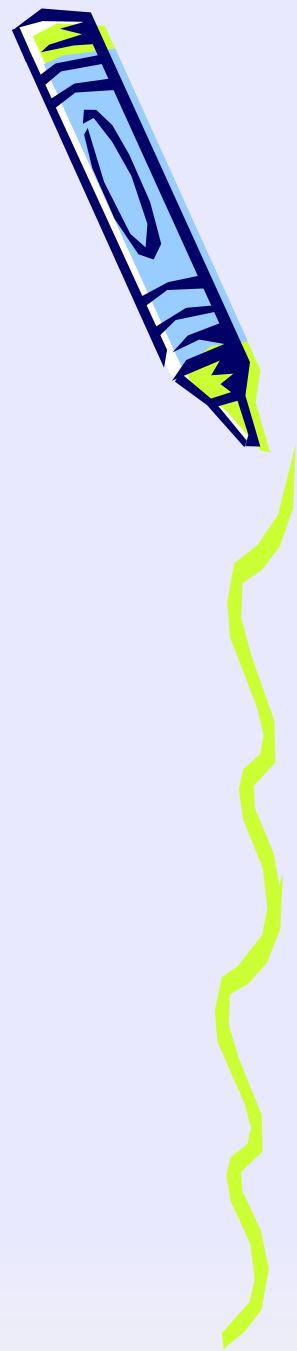
เมทริกซ์มูลฐาน

ตัวอย่าง 18 จงหาผลคูณ EA เมื่อ

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

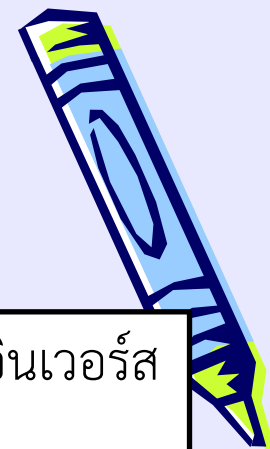
และ

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$





หาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A



ทฤษฎีบท เมทริกซ์มูลฐานทุกเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์สได้ และอินเวอร์สที่ได้จะเป็นเมทริกซ์มูลฐานด้วย

ทฤษฎีบท กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ ข้อมูลต่อไปนี้สมมูลกัน

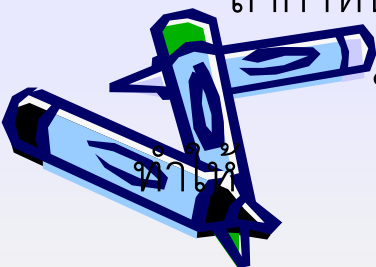
1. A มีอินเวอร์สการคูณ
2. $Ax = 0$ มีคำตอบชัดเจนเพียงคำตอบเดียว
3. $A = I_n$

วิธีการหาตัวผกผัน

ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และหาอินเวอร์สได้ จากทฤษฎี

ข้างต้น เราพบว่า $A = I_n$ แสดงว่าจะต้องมีเมทริกซ์มูลฐาน E_1, E_2, \dots, E_k

$$E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 A = I_n$$





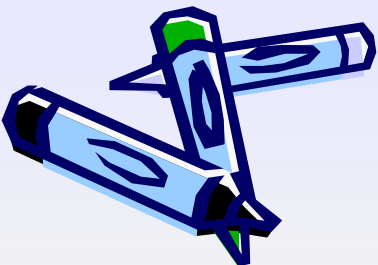
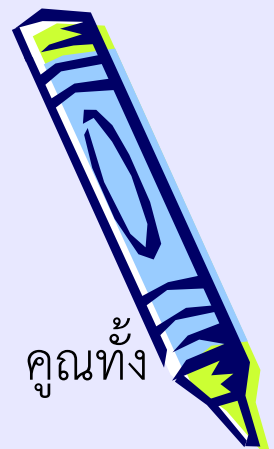
หาอินเวอร์สของเมทริกซ์

แต่เนื่องจากเมทริกซ์มูลฐานเหล่านี้มีอินเวอร์ส จึงนำ $E_k^{-1}, \dots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ คูณทั้งสองข้าง อย่างต่อเนื่องกันจะได้

$$\begin{aligned} A &= E_1^{-1} E_2^{-1} \dots E_k^{-1} I_n \\ &= (E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1)^{-1} \\ A^{-1} &= E_k E_{k-1} \dots E_2 E_1 \end{aligned}$$

ด้วยเหตุนี้จึงเกิดกระบวนการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A ดังนี้

1. เขียน $[A \mid I_n]$
2. ใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น $[A \mid I_n]$ จนได้ $[I_n \mid B]$
3. จะได้ $B = A^{-1}$





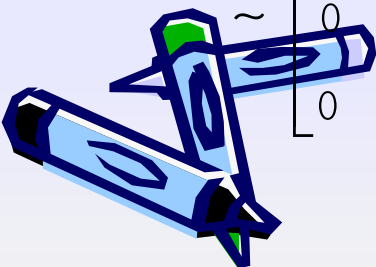
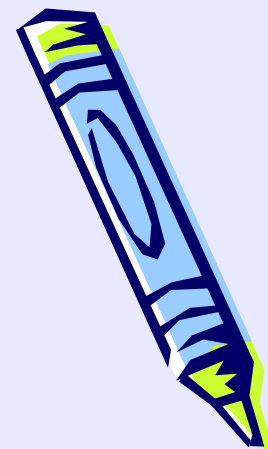
หาอินเวอร์สของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 19 จงหาอินเวอร์สการคูณของ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r_2' = r_2 - 2r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{array}$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] r_3' = r_3 + 2r_2 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] r_3' = -r_3$$





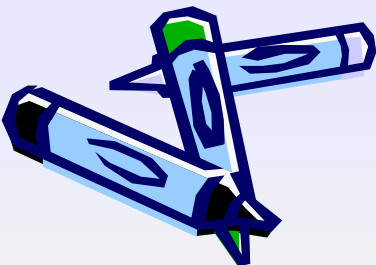
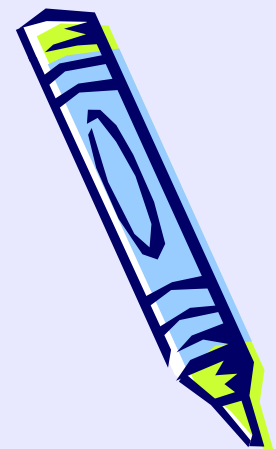
เมทริกซ์มูลฐานและวิธีหา A^{-1}

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} r'_1 = r_1 + 3r_3 \\ r'_2 = r_2 + 3r_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] r'_1 = r_1 - 2r_2$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$





เมทริกซ์มูลฐานและวิธีหา A^{-1}

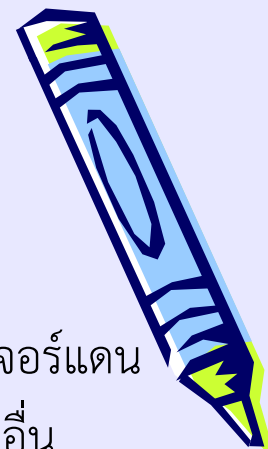
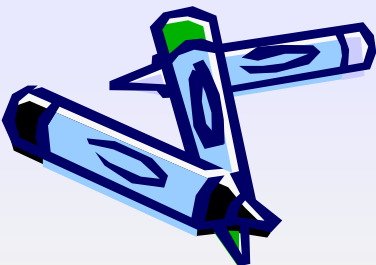
เราได้อธิบายวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้วิธีการกำจัดตัวแปรด้วยวิธีเกาส์-จอร์แดน แล้วต่อไปนี้จะแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรโดยวิธีอื่น

ทฤษฎีบท

ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณ มีมิติ $n \times n$ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีคำตอบเดียว คือ $X = A^{-1}B$ สำหรับแต่ละ B ที่มีมิติ $n \times 1$ ใด ๆ

ตัวอย่าง 20 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 8x_3 = 17 \end{cases}$$





เมตริกซ์มูลฐานและวิธีหา A^{-1}

วิธีทำ ระบบสมการข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ โดยที่

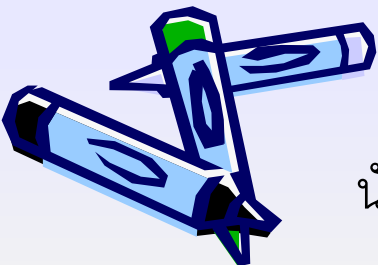
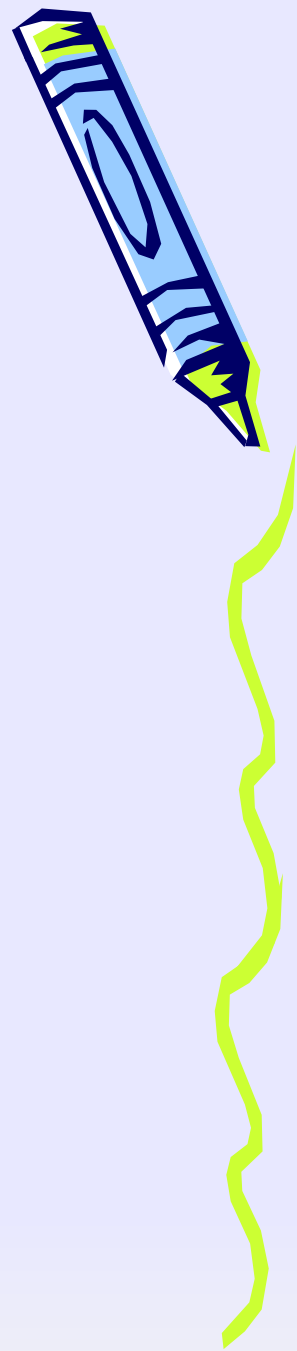
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง 18 ได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

จากทฤษฎีบท คำตอบของระบบสมการนี้ คือ

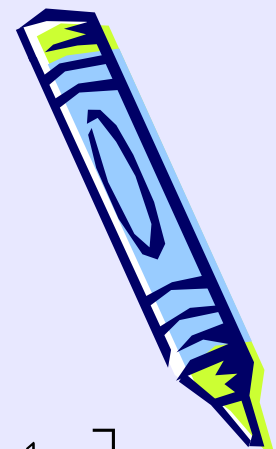
$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$





แบบฝึกหัด



1. จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ใดเท่ากันบ้าง เมื่อกำหนด $x^2 - x + 1 = 0$ และ

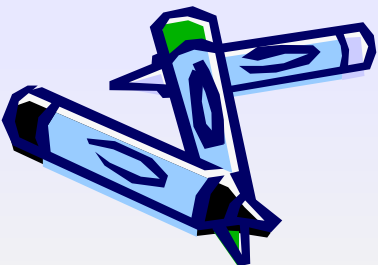
$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x - x^2 \\ 0 & x \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x - x^2 & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} x - 1 & 1 \\ 0 & x^2 + 1 \end{bmatrix}$$

2. จงหาเมทริกซ์ C เมื่อ $C = 2A + 4B$ โดยกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

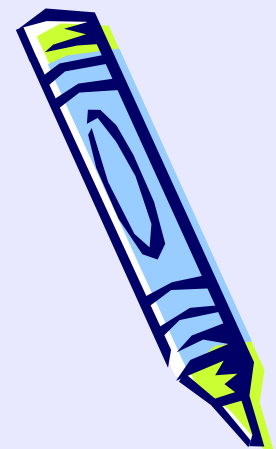
3. กำหนด $A = [3 \ 1 \ 5]^T$ และ $B = [0 \ 8 \ 4]$ จงหาเมทริกซ์ AB

4. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ A^2 และ A^3





แบบฝึกหัด



5. จงคำนวณหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$5.1 \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$5.2 \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

6. จงแสดงว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้^๓เป็นเมทริกซ์เอกฐาน หรือเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน และหากเป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน ให้หาอินเวอร์สการคูณด้วย

$$6.1 \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$6.2 \quad B = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}$$

7. จงหาค่าของ $B^T A^T + C^T A^T$ เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

