บทที่ 1

เมทริกซ์

4112106 พีชคณิตเชิงเส้น

อาจารย์รัชนีกร ทบประดิษฐ์

เมทริกซ์

เมทริกซ์

โดยทั่วไป เราสามารถพบเห็นข้อมูลหลายชนิดที่เขียนอยู่ในรูปกลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงกันในรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากได้มากมายในชีวิตประจำวัน ตัวอย่างเช่น ร้านค้าแห่งหนึ่งซื้อเครื่องเขียนมาขาย 4 ชนิด คือ ปากกา ดินสอ ไม้บรรทัด และยางลบ โดยราคาต้นทุนคิดเป็นต่อชิ้น แสดงเป็นตารางได้ดังนี้

ชนิดเครื่องเขียน	**ปากกา**	**ดินสอ**	**ไม้บรรทัด**	**ยางลบ**
ราคา/ชิ้น	15	10	8	7

ซึ่งสามารถเขียนสั้น ๆ เป็น $\begin{bmatrix} 15 & 10 & 8 & 7 \end{bmatrix}$ หรือ $\begin{bmatrix} 15 \\ 10 \\ 8 \\ 7 \end{bmatrix}$

เมทริกซ์

นิยาม 1.1 เมทริกซ์มิติ $m \times n$ ประกอบด้วยจำนวนจริงที่เขียนเรียงเป็นแถว m แถว (row) และเขียนในแนวดิ่ง n หลัก (Column) โดยปิดล้อมด้วยจำนวนจริงเหล่านี้ด้วยเครื่องหมาย [ ] หรือ ( ) ซึ่งจำนวนแต่ละจำนวนในเมทริกซ์ เรียกว่า **สมาชิกของเมทริกซ์**

ตัวอย่าง 1

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มิติ 3×2 , $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มิติ 1×4

และ $\begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2

การดำเนินการบนเมทริกซ์

การเท่ากันของเมทริกซ์

เมทริกซ์สองเมทริกซ์จะได้ชื่อว่าเป็นเมทริกซ์ที่เท่ากัน เมื่อเมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเท่ากัน และสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันเท่ากันทุกตัว ซึ่งนิยามได้ดังนี้

นิยาม 1.2 ถ้า $A = [a_{ij}]$ และ $B = [b_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์ จะกล่าวว่า $A = B$ ก็ต่อเมื่อ A, B มีมิติเดียวกัน และ $a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ i และ j

การดำเนินการบนเมทริกซ์

ตัวอย่าง 2 จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} a^2 & 6 \\ b^2 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 4+b \\ 4 & a-2 \end{bmatrix}$$

<u>**วิธีทำ**</u> จากโจทย์จะได้ว่า $a^2 = 25$ และ $a-2 = -7$

นั่นคือ $a = \pm 5$ และ $a = -5$

ดังนั้น $a = -5$

และจาก $b^2 = 4$ และ $4+b = 6$

$b = \pm 2$ และ $b = 2$

ดังนั้น $b = 2$

การดำเนินการบนเมทริกซ์

ตัวอย่าง 3 จงหาค่า a และ b เมื่อกำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 2^a & \log b \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & (\log b)^2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

<u>**วิธีทำ**</u>...

....

....

....

....

ตัวอย่าง 4 จงตรวจสอบว่า A = B หรือไม่ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} \sqrt{25} & a^0 \\ \log_a 1 & \ln e^6 \end{bmatrix}$$

การบวก ลบเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

นิยาม 1.3 การบวกเมทริกซ์

ถ้าเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากัน แล้ว $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times m}$

นิยาม 1.4 การลบเมทริกซ์

ถ้าเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ แล้ว $A - B = A + (-B)$

นิยาม 1.5 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ c เป็นสเกลาร์ แล้ว $cA = [ca_{ij}]_{m \times n}$

การบวก ลบเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ตัวอย่าง 5 กำหนดเมทริกซ์ดังต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 6 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 9 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

1. จงหา $3A, -5B, 2C, -A+B, D-E$
2. จงหา $A+B, B+A, E+D$

<u>**วิธีทำ**</u>...

....

....

....

....

....

....

การบวก ลบเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์

ตัวอย่าง 6 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$ จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ 2X+A = B

<u>**วิธีทำ**</u>...

....

....

....

....

....

....

....

การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

นิยาม 1.6 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์

ถ้า $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ เป็นเมทริกซ์ แล้วผลคูณ AB คือเมทริกซ์ $AB=[c_{ij}]_{m\times p}$ โดยที่

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

ตัวอย่าง 7 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

จะได้

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 7 & 10 \end{bmatrix}$$

ทรานสโพสของเมทริกซ์

ทรานสโพสของเมทริกซ์ A คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการนำสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 1 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในหลักที่ 1 และนำสมาชิกทั้งหมดในแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A มาเขียนเป็นสมาชิกในหลักที่ 2 และทำเช่นนี้จนหมดทุกแถว แทนทรานสโพสของ A ด้วย A^T หรือ A^t

นิยาม 1.7

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ทรานสโพสของ A แทนด้วย A^T โดยที่ $A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$

ตัวอย่าง 8 กำหนด

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} , \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{1 \times 3}$$

จะได้

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$ และ $$B^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

ทรานสโพสของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท

ถ้า k เป็นสเกลาร์ใด ๆ และ A, B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติแล้วจะได้ว่า

1. $\left(A^T\right)^T = A$

2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ และ $(A-B)^T = A^T - B^T$

3. $(AB)^T = B^T A^T$

4. $(kA)^T = kA^T$

เมทริกซ์แบบต่าง ๆ

นิยาม 1.8 เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมทริกซ์จัตุรัส (เมทริกซ์ที่มีมิติ n × n) ที่มีสมาชิกในเส้นทแยงมุมหลักเป็นเลข 1 ทั้งหมด สมาชิกนอกแถวนี้เป็น 0 ใช้สัญลักษณ์ คือ I โดยจะเขียน I_n แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n นั่นคือ

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 9 เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติต่าง ๆ กัน

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์แบบต่าง ๆ

นิยาม 1.9 เมทริกซ์เอกลักษณ์ คือ เมทริกซ์จัตุรัส (เมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$) ที่มีสมาชิกในเส้นทแยงมุมหลักเป็นเลข 1 ทั้งหมด สมาชิกนอกแถวนี้เป็น 0 ใช้สัญลักษณ์ คือ I โดยจะเขียน I_n แทน เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ n นั่นคือ

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 10 เมทริกซ์เอกลักษณ์มิติต่าง ๆ กัน

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์แบบต่าง ๆ

นิยาม 1.10

จะเรียก เมทริกซ์จัตุรัส A ว่า **เมทริกซ์สมมาตร** (Symmetric matrix) ถ้า $A^T = A$

ตัวอย่าง 11 เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์สมมาตร

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 7 & 8 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

นิยาม 1.11

จะเรียก เมทริกซ์จัตุรัส A ว่า **เมทริกซ์สมมาตรเสมือน** (Skew-symmetric matrix) ถ้า $A^T = -A$

ตัวอย่าง 12 เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

เมทริกซ์ทแยงมุม

นิยาม 1.12

เมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ เรียกว่า เมทริกซ์ทแยงมุม เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i \neq j$

รูปแบบทั่วไปของเมทริกซ์ทแยงมุม n × n มิติ เป็นดังนี้

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$$

หรืออาจเขียนย่อว่า

$$D = diag[d_i, d_2, \ldots, d_n]$$

เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

ตัวอย่าง 13 จงหา DA , AD , D^2 , D^3 , D^{-1} เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$DA = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -2 & -5 & -3 \\ 2 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

$$AD = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

เมทริกซ์สามเหลี่ยม

นิยาม 1.13

กำหนดเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยม เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$ หรือ $\forall j > i$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall i > j$

เรียก A ว่าเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง เมื่อ $a_{ij} = 0$ สำหรับ $\forall j > i$

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง

เมทริกซ์ทแยงมุม เมทริกซ์สามเหลี่ยม และเมทริกซ์สมมาตร

เมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix)

นิยาม 1.14 เมทริกซ์จัตุรัส A จะเรียกว่าเป็น เมทริกซ์สมมาตร เมื่อ $A^T = A$

ทฤษฎีบท

ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์สมมาตรที่มีมิติเท่ากัน และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้ว

1.) A^T เป็นเมทริกซ์สมมาตร

2.) A + B เป็นเมทริกซ์สมมาตร

3.) A - B เป็นเมทริกซ์สมมาตร

4.) kA เป็นเมทริกซ์สมมาตร

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

นิยาม 1.15 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ และถ้า B เป็นเมทริกซ์ ที่ซึ่ง $AB = BA = I_n$ แล้ว จะเรียก B ว่า **เป็นอินเวอร์สการคูณของ** A

ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณไม่ได้ เรียก A ว่า **เมทริกซ์เอกฐาน** (singular matrix)

ถ้า A หาอินเวอร์สการคูณได้ เรียก A ว่า **เมทริกซ์มิใช่เอกฐาน** (non-singular matrix)

ตัวอย่าง 14 ให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $AB = BA = I_n$ แสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 15 จงแสดงว่า B เป็นอินเวอร์สการคูณของ A เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>วิธีทำ</u>..

....

....

....

....

....

....

....

....

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท

ถ้า B และ C เป็นอินเวอร์สการคูณ ของ A แล้ว B = C

ทฤษฎีบท

ถ้า $A = [a]$ โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว อินเวอร์สการคูณของ A หาได้จาก

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $ad - bc \neq 0$ แล้ว อินเวอร์สการคูณของ A หาได้จาก

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

อินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 16 จงหาอินเวอร์สการคูณของ A และ B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

สมบัติของอินเวอร์สของเมทริกซ์

ทฤษฎีบท

กำหนด A, B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเดียวกัน และมีอินเวอร์สการคูณ

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$
4. A^{n} มีอินเวอร์สการคูณ และ $(A^{n})^{-1} = (A^{-1})^{n}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$
5. kA มีอินเวอร์สการคูณ และ $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ สำหรับจำนวนจริง $k \neq 0$

เมทริกซ์มูลฐาน

นิยาม 1.16 เมทริกซ์ E ที่มีมิติ $n \times n$ จะเรียกว่า **เมทริกซ์มูลฐาน** เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดใดชนิดหนึ่งเพียงครั้งเดียวบนเมทริกซ์เอกลักษณ์

ตัวอย่าง 17 เมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์มูลฐาน

1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \; r_2' = 3r_2$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; r_1' = (1)r_1$

เมทริกซ์มูลฐาน

3. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} r_1' = r_3 \\ r_3' = r_1 \end{matrix}$

4. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ เพราะ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $r_2' = r_2 + 4r_4$

เมทริกซ์มูลฐาน

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ m × n และ E เป็นเมทริกซ์มูลฐานมีมิติ m × n แล้วผลคูณ EA จะเป็นเมทริกซ์ที่เกิดจากการใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้นชนิดเดียวกับ E บน A เช่น

ให้ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2 × 4

และ $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์มูลฐานที่เกิดจากการสลับแถวของ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} r_1' = r_2 \\ r_2' = r_1 \end{matrix}$

จะได้

$$EA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

ซึ่งผลลัพธ์ที่ได้จะเหมือนกับการสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ของเมทริกซ์ A

เมทริกซ์มูลฐาน

ตัวอย่าง 18 จงหาผลคูณ EA เมื่อ

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

และ

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

หาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A

ทฤษฎีบท เมทริกซ์มูลฐานทุกเมทริกซ์เป็นเมทริกซ์ที่หาอินเวอร์สได้ และอินเวอร์สที่ได้จะเป็นเมทริกซ์มูลฐานด้วย

ทฤษฎีบท กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ ข้อมูลต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A มีอินเวอร์สการคูณ
2. $Ax = 0$ มีคำตอบชัดแจ้งเพียงคำตอบเดียว
3. $A = I_n$

<u>วิธีการหาตัวผกผัน</u>

ถ้ากำหนดให้ A เป็นเมตริกซ์ที่มีมิติ $n \times n$ และหาอินเวอร์สได้ จากทฤษฎีข้างต้น เราพบว่า $A = I_n$ แสดงว่าจะต้องมีเมตริกซ์มูลฐาน $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ทำให้

$$E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I_n$$

หาอินเวอร์สของเมทริกซ์

แต่เนื่องจากเมทริกซ์มูลฐานเหล่านี้มีอินเวอร์ส จึงนำ $E_k^{-1}, \ldots, E_2^{-1}, E_1^{-1}$ คูณทั้งสองข้าง อย่างต่อเนื่องกันจะได้

$$\begin{aligned} A &= E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_k^{-1} I_n \\ &= \left(E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1\right)^{-1} \\ A^{-1} &= E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 \end{aligned}$$

ด้วยเหตุนี้จึงเกิดกระบวนการหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ A ดังนี้

1. เขียน $\left[A \mid I_n\right]$
2. ใช้การดำเนินการตามแถวเบื้องต้น $\left[A \mid I_n\right]$ จนได้ $\left[I_n \mid B\right]$
3. จะได้ $B = A^{-1}$

หาอินเวอร์สของเมทริกซ์

ตัวอย่าง 19 จงหาอินเวอร์สการคูณของ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

<u>**วิธีทำ**</u>

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2' = r_2 - 2r_1 \\ r_3' = r_3 - r_1 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array}\right] r_3' = r_3 + 2r_2 \quad \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] r_3' = -r_3$$

เมทริกซ์มูลฐานและวิธีหา A^{-1}

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} r_1' = r_1 + 3r_3 \\ r_2' = r_2 + 3r_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] \quad r_1' = r_1 - 2r_2$$

ดังนั้น

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์มูลฐานและวิธีหา A^{-1}

เราได้อธิบายวิธีการแก้ระบบสมการเชิงเส้น โดยใช้วิธีการกำจัดตัวแปรด้วยวิธีเกาส์-จอร์แดน แล้วต่อไปนี้เราจะแก้ระบบสมการเชิงเส้นที่มีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปรโดยวิธีอื่น

ทฤษฎีบท

ถ้า A มีอินเวอร์สการคูณ มีมิติ n × n แล้วระบบสมการเชิงเส้น AX = B จะมีคำตอบเดียว คือ $X = A^{-1}B$ สำหรับแต่ละ B ที่มีมิติ n × 1 ใด ๆ

ตัวอย่าง 20 จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 3 \\ x_1 + 8x_3 = 17 \end{cases}$$

เมตริกซ์มูลฐานและวิธีหา A^{-1}

<u>วิธีทำ</u> ระบบสมการข้างต้นสามารถเขียนให้อยู่ในรูป AX = B โดยที่

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix}$$

จากตัวอย่าง 18 ได้ว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

จากทฤษฎีบท คำตอบของระบบสมการนี้ คือ

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2$

แบบฝึกหัด

1. จงตรวจสอบว่าเมทริกซ์ใดเท่ากันบ้าง เมื่อกำหนด $x^2 - x + 1 = 0$ และ

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & x - x^2 \\ 0 & x \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} x - x^2 & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix} \quad , \quad C = \begin{bmatrix} x - 1 & 1 \\ 0 & x^2 + 1 \end{bmatrix}$$

2. จงหาเมทริกซ์ C เมื่อ $C = 2A + 4B$ โดยกำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 5 & 6 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^T$ และ $B = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 4 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ AB

4. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ A^2 และ A^3

แบบฝึกหัด

5. จงคำนวณหาอินเวอร์สของเมตริกซ์ต่อไปนี้

5.1 $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

5.2 $$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

6. จงแสดงว่าเมทริกซ์ต่อไปนี้เป็นเมทริกซ์เอกฐาน หรือเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน และหากเป็นเมทริกซ์มิใช่เอกฐาน ให้หาอินเวอร์สการคูณด้วย

6.1 $$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

6.2 $$B = \begin{bmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{bmatrix}$$

7. จงหาค่าของ $B^T A^T + C^T A^T$ เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$