บทที่ 3

ปริภูมิเวกเตอร์

ในบทนี้จะศึกษาปริภูมิเวกเตอร์ ปริภูมิย่อย การตรวจสอบการเป็นปริภูมิเวกเตอร์และปริภูมิย่อย การรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ การเป็นอิสระเชิงเส้นของเวกเตอร์ ทั้งยังศึกษาการแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ ซึ่งจะนำไปสู่การหาฐานหลักและมิติของปริภูมิเวกเตอร์ในบทต่อไป โดยการนิยามปริภูมิเวกเตอร์จะเกี่ยวข้องกับฟิลด์ ซึ่งอาจจะเป็นฟิลด์ของจำนวนจริง ฟิลด์ของจำนวนเชิงซ้อน หรือฟิลด์อื่น ๆ ดังนั้น ก่อนที่จะให้นิยามปริภูมิเวกเตอร์ เราจะกล่าวถึงระบบหนึ่งที่เรียกว่า ฟิลด์ ซึ่งประกอบด้วยเซต 1 เซต และการดำเนินการบนเซต 2 ชนิด ดังรายละเอียดต่อไปนี้

3.1 ฟิลด์ (Field)

นิยาม 3.1 กำหนดให้ F เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ถ้ามีการดำเนินการ $\oplus$ และ $\odot$ ใน F ที่มีสมบัติต่อไปนี้

สำหรับสมาชิก a,b,c ใด ๆ ใน F

1. $a \oplus b \in F$
2. $a \oplus b = b \oplus a$
3. $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
4. มีสมาชิก 0 ใน F เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a \oplus 0 = a = 0 \oplus a$ สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน F
5. มีสมาชิกใน F เพียงตัวเดียวเท่านั้น เขียนแทนด้วย $-a$ โดยที่ $-a \oplus a = 0$ สำหรับทุกสมาชิก a ใน F
6. $a \odot b \in F$
7. $a \odot b = b \odot a$
8. $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$
9. มีสมาชิก 1 ใน F เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a \odot 1 = a = 1 \odot a$ สำหรับแต่ละสมาชิก a ใน F
10. มีสมาชิกใน a^{-1} ใน F เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a \odot a^{-1} = 1 = a^{-1} \odot a$ สำหรับทุกสมาชิก a ใน F โดยที่ $a \neq 0$

11. $a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$

แล้วเรียก $(F, \oplus, \odot)$ ว่าเป็น **ฟีลด์** (Field) ภายใต้การบวก $\oplus$ และการคูณ $\odot$ หรือเขียนสั้น ๆ ว่า " F เป็นฟีลด์" และสมาชิกของ F ถูกเรียกว่า **สเกลาร์** (Scalar)

นิยาม 3.2 K เรียกว่าเป็น **ฟีลด์ย่อย** (Subfield) ของ F ถ้า K เป็นเซตย่อยของ F และ K เป็นฟีลด์

ตัวอย่างเช่น สำหรับการดำเนินการบวกและคูณที่เป็นการบวกและการคูณจำนวนในระบบจำนวนจริงตามปรกติ จะได้ว่า

1) เซตของจำนวนเต็มบวก $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ ไม่เป็นฟีลด์ (เพราะไม่มีสมบัติข้อ 5)

2) เซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ ไม่เป็นฟีลด์ (เพราะไม่มีสมบัติข้อ 10)

3) เซตของจำนวนตรรกยะ $(\mathbb{Q})$ เป็นฟีลด์

4) เซตของจำนวนจริง $(\mathbb{R})$ เป็นฟีลด์

5) เซตของจำนวนเชิงซ้อน $(\mathbb{C})$ เป็นฟีลด์

นอกจากนี้ จะเห็นว่า $\mathbb{Q}$ เป็นฟีลด์ย่อยของ $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{C}$

3.2 ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Space)

นิยาม 3.3 ให้ V เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง ซึ่งมีสมาชิกเรียก **เวกเตอร์** (Vector) พร้อมด้วยการดำเนินการ 2 ชนิด คือ การบวก $\boxed{+}$ ระหว่างสมาชิกของ V และการคูณ $\boxed{\cdot}$ ระหว่างสมาชิกของฟีลด์ F กับสมาชิกของ V เรียก V พร้อมด้วยการดำเนินการทั้งสองว่า **ปริภูมิเวกเตอร์** (Vector Space) หรือกล่าวว่า "$(V, \boxed{+}, \boxed{\cdot})$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F" ถ้าการดำเนินการทั้งสองชนิดสอดคล้องกับสมบัติ 10 ข้อ ต่อไปนี้

สำหรับสมาชิก $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ ใด ๆ ใน V และสมาชิก a, b ใด ๆ ใน F

1. $\underline{x} \boxed{+} \underline{y} \in V$
2. $\underline{x} \boxed{+} \underline{y} = \underline{y} \boxed{+} \underline{x}$
3. $\underline{x} \boxed{+} (\underline{y} \boxed{+} \underline{z}) = (\underline{x} \boxed{+} \underline{y}) \boxed{+} \underline{z}$
4. มีสมาชิก $\underline{0}$ ใน V ซึ่ง $\underline{x} \boxed{+} \underline{0} = \underline{x} = \underline{0} \boxed{+} \underline{x}$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $\underline{x}$ ใน V
5. สำหรับแต่ละสมาชิก $\underline{x}$ ใน V มีสมาชิกใน V เพียงตัวเดียวเท่านั้นเขียนแทนด้วย $-\underline{x}$ ที่

$\underline{x} \boxplus (-\underline{x}) = \underline{0}$

6. $a \boxdot \underline{x} \in V$
7. $a \boxdot \left(\underline{x} \boxplus \underline{y}\right) = \left(a \boxdot \underline{x}\right) \boxplus \left(a \boxdot \underline{y}\right)$
8. $\left(a \boxplus b\right) \boxdot \underline{x} = \left(a \boxdot \underline{x}\right) \boxplus \left(b \boxdot \underline{x}\right)$
9. $\left(a \boxdot b\right) \boxdot \underline{x} = a \boxdot \left(b \boxdot \underline{x}\right)$
10. มีสมาชิก 1 ใน F ซึ่ง $1 \boxdot \underline{x} = \underline{x}$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก $\underline{x}$ ใน V

ข้อตกลง 1. ถ้า $\left(V, \boxplus, \boxdot\right)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F จะเขียนสั้น ๆ ว่า “V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์

F (Vector Space Over Field F)” โดยมีสมาชิกของ V เป็นเวกเตอร์ และสมาชิกในฟีลด์

F เป็นสเกลาร์ เรียก $\boxplus$ ว่า **การบวกเวกเตอร์** (Vector Addition) และเรียก $\boxdot$ ว่า **การคูณ**

เวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ (Scalar Multiplication)

2. ถ้าเขียนว่า “V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ” จะหมายถึง $\left(V, \boxplus, \boxdot\right)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ของ

จำนวนจริง (Real Vector Space)

3. ผลบวกของเวกเตอร์ $\underline{x}$ กับ $\underline{y}$ คือ $\underline{x} \boxplus \underline{y}$ จะเขียนแทนด้วย $\underline{x} + \underline{y}$

4. ผลคูณของเวกเตอร์ $\underline{x}$ กับสเกลาร์ a คือ $a \boxdot \underline{x}$ จะเขียนแทนด้วย $a\underline{x}$

ในการประยุกต์บางเรื่องในปริภูมิเวกเตอร์ อาจมีสเกลาร์เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งถ้าเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเรียกปริภูมิเวกเตอร์ว่า **ปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ของจำนวนเชิงซ้อน** แต่ในที่นี้จะพูดเฉพาะสเกลาร์ที่เป็นจำนวนจริงเท่านั้น

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> กำหนดให้ นิยามการบวกเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3 = \left\{\left(x_1, x_2, x_3\right) \middle| x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\right\}$ ดังนี้

สำหรับทุก ๆ $\underline{x} = \left(x_1, x_2, x_3\right)$ และ $\underline{y} = \left(y_1, y_2, y_3\right)$ ใน $\mathbb{R}^3$

ให้ $\underline{x} + \underline{y} = \left(x_1, x_2, x_3\right) + \left(y_1, y_2, y_3\right)$

$$= \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3\right)$$

และนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ดังนี้

ให้ a เป็นสเกลาร์

$$a\underline{x} = a(x_1, x_2, x_3)$$
$$= (ax_1, ax_2, ax_3)$$

จงแสดงว่า $\mathbb{R}^3$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

<u>พิสูจน์</u> จะแสดงว่าสมบัติทั้ง 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 เป็นจริง ดังนี้

ให้ $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3), \underline{y} = (y_1, y_2, y_3), \underline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ อยู่ใน $\mathbb{R}^3$ และ a,b เป็นสเกลาร์

1. $\underline{x} + \underline{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) \in \mathbb{R}^3$$

2. $\underline{x} + \underline{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$
$$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$$
$$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$$
$$= (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$$
$$= \underline{y} + \underline{x}$$

3. $\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3))$
$$= (x_1, x_2, x_3) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3))$$
$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3)$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3)$$
$$= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3)$$
$$= (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$$

4. มี $\underline{0} = (0,0,0) \in \mathbb{R}^3$ ซึ่ง

$$\underline{x} + \underline{0} = (x_1, x_2, x_3) + (0,0,0)$$
$$= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0)$$
$$= (x_1, x_2, x_3)$$
$$= (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3)$$
$$= (0,0,0) + (x_1, x_2, x_3)$$
$$= \underline{0} + \underline{x}$$

5. จาก $a\underline{x} = (ax_1, ax_2, ax_3)$

ให้ $a=-1$ จะได้ $(-1)(\underline{x})=-\underline{x}=(-x_1,-x_2,-x_3)$

ดังนั้น $\forall \underline{x}\in\mathbb{R}^3$ จะมี $-\underline{x}\in\mathbb{R}^3$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\underline{x}+(-\underline{x}) &= (x_1,x_2,x_3)+(-x_1,-x_2,-x_3)\\ &= (x_1-x_1,x_2-x_2,x_3-x_3)\\ &= (0,0,0)\\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned}a\underline{x} &= a(x_1,x_2,x_3)\\ &= (ax_1,ax_2,ax_3)\in\mathbb{R}^3\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}a(\underline{x}+\underline{y}) &= a((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3))\\ &= a(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)\\ &= (a(x_1+y_1),a(x_2+y_2),a(x_3+y_3))\\ &= (ax_1+ay_1,ax_2+ay_2,ax_3+ay_3)\\ &= (ax_1,ax_2,ax_3)+(ay_1,ay_2,ay_3)\\ &= a(x_1,x_2,x_3)+a(y_1,y_2,y_3)\\ &= a\underline{x}+a\underline{y}\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}(a+b)\underline{x} &= (a+b)(x_1,x_2,x_3)\\ &= ((a+b)x_1,(a+b)x_2,(a+b)x_3)\\ &= (ax_1+bx_1,ax_2+bx_2,ax_3+bx_3)\\ &= (ax_1,ax_2,ax_3)+(ay_1,ay_2,ay_3)\\ &= a(x_1,x_2,x_3)+a(y_1,y_2,y_3)\\ &= a\underline{x}+a\underline{y}\end{aligned}$$

9. $$\begin{aligned}(ab)\underline{x} &= (ab)(x_1,x_2,x_3)\\ &= ((ab)x_1,(ab)x_2,(ab)x_3)\\ &= (a(bx_1),a(bx_2),a(bx_3))\\ &= a(bx_1,bx_2,bx_3)\\ &= a(b(x_1,x_2,x_3))\\ &= a(b\underline{x})\end{aligned}$$

10. มี $1\in\mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 1\underline{x} &= 1(x_1, x_2, x_3) \\ &= (1x_1, 1x_2, 1x_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= \underline{x} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\mathbb{R}^3$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

▲

ตัวอย่าง 3.2 ให้ $V = \{ f \mid f : S \to \mathbb{R} \}$ โดย S เป็นเซตใดๆ

เมื่อนิยาม $(f+g)(x) = f(x) + g(x); \ \forall x \in S$

$(cf)(x) = cf(x); \quad \forall c \in \mathbb{R}$ และ $x \in S$

และ o เป็นฟังก์ชันศูนย์ซึ่ง $o(x) = 0; \ \forall x \in S$

จงแสดงว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

พิสูจน์ จะแสดงว่าสมบัติทั้ง 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 เป็นจริง ดังนี้

ให้ f, g, h อยู่ใน

x อยู่ใน S

และ c, c_1, c_2 เป็นสเกลาร์

1. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$\therefore \ f + g \in V$

2. $$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ &= g(x) + f(x) \\ &= (g+f)(x) \end{aligned}$$

$\therefore \ f + g = g + f$

3. $\left(f+(g+h)\right)(x) = f(x)+(g+h)(x)$
$$= f(x)+\left(g(x)+h(x)\right)$$
$$= \left(f(x)+g(x)\right)+h(x)$$
$$= (f+g)(x)+h(x)$$
$$= \left((f+g)+h\right)(x)$$
$$\therefore\ f+(g+h) = (f+g)+h$$

4. มี $o \in V$ ซึ่ง
$$(o+f)(x) = o(x)+f(x)$$
$$= 0+f(x)$$
$$= f(x)$$
$$= f(x)+0$$
$$= f(x)+o(x)$$
$$= (f+o)(x)$$
$$\therefore o+f = f = f+o$$

5. จาก $(cf)(x) = cf(x)$

ให้ $c=-1$ จะได้ $(-f)(x) = -f(x)$

ดังนั้น $\forall f \in V$ จะมี $-f \in V$ ซึ่ง
$$\left(f+(-f)\right)(x) = f(x)+(-f)(x)$$
$$= f(x)-f(x)$$
$$= 0$$
$$= o(x)$$
$$\therefore\ f+(-f) = o$$

6. $(cf)(x) = cf(x) \in V$

7. $\left(c(f+g)\right)(x) = c(f+g)(x)$
$$= c\left(f(x)+g(x)\right)$$
$$= (cf)(x)+(cg)(x)$$
$$= (cf+cg)(x)$$
$$\therefore c(f+g) = cf+cg$$

8. $$\begin{aligned}((c_1+c_2)f)(x) &= (c_1+c_2)f(x)\\ &= c_1f(x)+c_2f(x)\\ &= (c_1f)(x)+(c_2f)(x)\\ &= (c_1f+c_2f)(x)\end{aligned}$$
$$\therefore (c_1+c_2)f = c_1f+c_2f$$

9. $$\begin{aligned}((c_1c_2)f)(x) &= (c_1c_2)f(x)\\ &= c_1(c_2f(x))\\ &= c_1(c_2f)(x)\end{aligned}$$
$$\therefore (c_1c_2)f = c_1(c_2f)$$

10. มี $1\in\mathbb{R}$ ซึ่ง
$$\begin{aligned}(1\cdot f)(x) &= 1\cdot f(x)\\ &= f(x)\end{aligned}$$
$$\therefore 1\cdot f = f$$

ดังนั้น V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

▲

ตัวอย่าง 3.3 ให้ $a,b,c\in\mathbb{R}$ และ

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,|\, ax+by+cz=0\}$$
$$\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)\in V, \underline{v}=(x_2,y_2,z_2)\in V \text{ และ } k\in\mathbb{R}$$

เมื่อนิยาม

$$\begin{aligned}\underline{u}+\underline{v} &= (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\\ &= (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)\end{aligned}$$

และ $$\begin{aligned}k\underline{u} &= k(x_1,y_1,z_1)\\ &= (kx_1,ky_1,kz_1)\end{aligned}$$

จงแสดงว่า V พร้อมทั้งการดำเนินการทั้งสองเป็นปริภูมิเวกเตอร์

พิสูจน์ จะแสดงว่าสมบัติทั้ง 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 เป็นจริง ดังนี้

ให้ $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1),\underline{v}=(x_2,y_2,z_2),\underline{w}=(x_3,y_3,z_3)$ อยู่ใน V และ a,b,c,k,l เป็นสเกลาร์

1. จาก $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)\in V$ จะได้ $ax_1+by_1+cz_1=0$

และ $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)\in V$ จะได้ $ax_2+by_2+cz_2=0$

$$\begin{aligned}\therefore \underline{u}+\underline{v}&=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\\&=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\\&\in V\end{aligned}$$

เพราะว่า $a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2)$

$$\begin{aligned}&=ax_1+ax_2+by_1+by_2+cz_1+cz_2\\&=(ax_1+by_1+cz_1)+(ax_2+by_2+cz_2)\\&=0+0\\&=0\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\underline{u}+\underline{v}&=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)\\&=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)\\&=(x_2,y_2,z_2)+(x_1,y_1,z_1)\\&=\underline{v}+\underline{u}\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})&=(x_1,y_1,z_1)+((x_2,y_2,z_2)+(x_3+y_3+z_3))\\&=(x_1,y_1,z_1)+(x_2+x_3,y_2+y_3,z_2+z_3)\\&=(x_1+(x_2+x_3),y_1+(y_2+y_3),z_1+(z_2+z_3))\\&=((x_1+x_2)+x_3,(y_1+y_2)+y_3,(z_1+z_2)+z_3)\\&=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)+(x_3+y_3+z_3)\\&=((x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2))+(x_3+y_3+z_3)\\&=(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}\end{aligned}$$

4. จาก $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)\in V$ จะได้ $ax_1+by_1+cz_1=0$

จะมี $\underline{0}=(0,0,0)\in V$ เพราะว่า $a0+b0+c0=0+0+0=0$ ซึ่ง

$$\begin{aligned}\underline{u}+\underline{0}&=(x_1,y_1,z_1)+(0,0,0)\\&=(x_1+0,y_1+0,z_1+0)\\&=(x_1,y_1,z_1)\\&=(0+x_1,0+y_1,0+z_1)\\&=(0,0,0)+(x_1,y_1,z_1)\\&=\underline{0}+\underline{u}\end{aligned}$$

5. จาก $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)\in V$ จะได้ $ax_1+by_1+cz_1=0$

และเนื่องจาก $k\underline{u} = (kx_1, ky_1, kz_1)$

ให้ $\forall \underline{u} \in V$ จะมี $-\underline{u} \in V$

$$\begin{aligned}\underline{u} + (-\underline{u}) &= (x_1, y_1, z_1) + (-x_1, -y_1, -z_1) \\ &= (x_1 + (-x_1), y_1 + (-y_1), z_1 + (-z_1)) \\ &= (0,0,0) \\ &= \underline{0}\end{aligned}$$

6. จาก $\underline{u} = (x_1, y_1, z_1) \in V$ จะได้ $ax_1 + by_1 + cz_1 = 0$

$$\begin{aligned}\therefore \quad k\underline{u} &= k(x_1, y_1, z_1) \\ &= (kx_1, ky_1, kz_1) \\ &\in V\end{aligned}$$

เพราะว่า $a(kx_1) + b(ky_1) + c(kz_1) = k(ax_1) + k(by_1) + k(cz_1)$

$$\begin{aligned}&= k(ax_1 + by_1 + cz_1) \\ &= k0 \\ &= 0\end{aligned}$$

7. $$\begin{aligned}k(\underline{u} + \underline{v}) &= k((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)) \\ &= k(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ &= (kx_1 + kx_2, ky_1 + ky_2, kz_1 + kz_2) \\ &= (kx_1, ky_1, kz_1) + (kx_2, ky_2, kz_2) \\ &= k(x_1, y_1, z_1) + k(x_2, y_2, z_2)\end{aligned}$$

8. $$\begin{aligned}(k+l)\underline{u} &= (k+l)(x_1, y_1, z_1) \\ &= ((k+l)x_1, (k+l)y_1, (k+l)z_1) \\ &= (kx_1 + lx_1, ky_1 + ly_1, kz_1 + lz_1) \\ &= (kx_1, ky_1, kz_1) + (lx_1, ly_1, lz_1) \\ &= k(x_1, y_1, z_1) + l(x_1, y_1, z_1) \\ &= k\underline{u} + l\underline{u}\end{aligned}$$

9. $(k\,l)\underline{u} = (kl)(x_1, y_1, z_1)$

$$= ((kl)x_1, (kl)y_1, (kl)z_1)$$
$$= (k(lx_1), k(ly_1), k(lz_1))$$
$$= k(lx_1, ly_1, lz_1)$$
$$= k(l(x_1, y_1, z_1))$$
$$= k(l\underline{u})$$

10. มี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$1\underline{u} = (1x_1, 1y_1, 1z_1)$$
$$= (x_1, y_1, z_1)$$
$$= \underline{u}$$

ดังนั้น V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$

▲

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> ให้ $V \subset \mathbb{R}^2$ โดยที่ $V = \{(x, y) | x + y = 2\}$ และกำหนดให้

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$k(x, y) = (kx, ky)$$

จงพิจารณาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$ หรือไม่ ถ้าเป็น จงพิสูจน์ แต่ถ้าไม่เป็น จงบอกว่ามีสมบัติข้อใดบ้างที่ไม่จริง

<u>วิธีทำ</u> V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$ เพราะมีสมบัติบางข้อไม่จริง ดังนี้

ข้อ 1. เช่น $(1,1) + (2,0) = (3,1) \notin V$

ข้อ 4. เพราะ $(0,0) + (x, y) = (x, y)$ แต่ $(0,0) \notin V$

ข้อ 5. เพราะ $(2,0) \in V$ แต่ $(-2,0) \notin V$

ข้อ 6. เช่น $3(2,0) = (6,0) \notin V$

ดังนั้น จะเห็นว่าสมบัติข้อ 1, 4, 5, 6 ไม่จริง

▲

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> ให้ $V = \{(x, y) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$

มีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$$\left(x_1, y_1\right)+\left(x_2, y_2\right)=\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right)$$
$$a\left(x_1, y_1\right)=\left(ax_1, y_2\right);\ a \in \mathbb{R}$$

จงหาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$ หรือไม่

วิธีทำ V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะทุก ๆ $(x, y) \in V$ จะไม่มี $(-x,-y) \in V$

เนื่องจาก $-1(x, y)=(-x, y)$

นั่นคือ ไม่มีสมบัติข้อ 5

▲

ตัวอย่าง 3.6 ให้ $V=\mathbb{R}^2$

มีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$$\left(x_1, y_1\right)+\left(x_2, y_2\right)=\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right)$$
$$a\left(x_1, y_1\right)=\left(ax_1, 0\right);\ a \in \mathbb{R}$$

จงหาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

วิธีทำ V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะทุก ๆ $(x, y) \in V$

จะได้ว่า $1(x, y)=(1x, 0)$

$$=(x, 0)$$
$$\neq(x, y)$$

นั่นคือ ขาดสมบัติข้อ 10

▲

ตัวอย่าง 3.7 ให้ $V=\{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y=ax+b\};\ a, b \in \mathbb{R}$ และ $b \neq 0$

กำหนดการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ของสมาชิกใน V ตามแบบมาตรฐาน

จงแสดงว่า V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์

วิธีทำ V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 1 ดังนี้

ให้ $\left(x_1, y_1\right) \in V$ จะได้ $x_1 \in \mathbb{R}$ และ $y_1=ax_1+b$

และ $\left(x_2, y_2\right) \in V$ จะได้ $x_2 \in \mathbb{R}$ และ $y_2=ax_2+b$

ดังนั้น $\left(x_1, y_1\right)+\left(x_2, y_2\right)=\left(x_1+x_2, y_1+y_2\right)$

โดยที่ $x_1+x_2 \in \mathbb{R}$

แต่ $a\left(x_1+x_2\right)+b=ax_1+ax_2+b$

$$\neq y_1 + y_2$$

เพราะว่า $y_1 + y_2 = (ax_1 + b) + (ax_2 + b)$

$$= ax_1 + ax_2 + 2b$$

ดังนั้น $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) \notin V$

▲

<u>ตัวอย่าง 3.8</u> ให้ $V = \{A | A$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2 ที่หาผกผันได้$\}$

กำหนดการบวกเวกเตอร์ $A + B = AB; \quad A \in V, B \in V$

และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ตามแบบมาตรฐานของเมทริกซ์

จงหาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> V ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 2 ดังนี้

เนื่องจาก $A + B = AB$

และ $B + A = BA$

ซึ่ง AB ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ BA

นั่นคือ $AB \neq BA$

หรือกล่าวว่า $A + B \neq B + A$

▲

<u>ตัวอย่าง 3.9</u> กำหนดให้ $\mathbb{Z}$ เป็นเซตของจำนวนเต็ม โดยมีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณด้วยจำนวนจริงตามปรกติ จงหาว่า $\mathbb{Z}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> $\mathbb{Z}$ ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะว่า $6 \in \mathbb{Z}$ และ $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ แต่ $6\sqrt{3} \notin \mathbb{Z}$

นั่นคือ ขาดสมบัติข้อ 6

▲

หมายเหตุ

1. ให้ $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) | x_1, x_2, x_3 ... x_n \in \mathbb{R}\}$

มีนิยามการบวกเวกเตอร์ดังนี้

สำหรับทุก ๆ และ $\underline{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ และ $\underline{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ ใน $\mathbb{R}^n$

$$\underline{x} + \underline{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

และนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

สำหรับสเกลาร์ a

$$a\underline{x} = \left(ax_1, ax_2, ..., ax_n\right)$$

จะได้ว่า $\mathbb{R}^n$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

2. ให้ $\mathbb{R}_{m\times n}$ เป็นเซตของเมทริกซ์มิติ $m\times n$ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง โดยนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$$\left[a_{ij}\right]_{m\times n} + \left[b_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} + b_{ij}\right]_{m\times n}$$
$$c\left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \left[ca_{ij}\right]_{m\times n}$$

จะได้ว่า $\mathbb{R}_{m\times n}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

3. ให้ $P_n = \left\{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n\right\}$ เป็นเซตของพหุนาม (Polynomial) ที่มีระดับขั้น (Degree) น้อยกว่าหรือเท่ากับ n เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ และ $a_0, a_1, ..., a_n$ เป็นสเกลาร์ ถูกกำหนดการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

ให้ $p\left(x\right) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$

และ $q\left(x\right) = b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n$ เป็นสมาชิกของ p_n

$$p\left(x\right) + q\left(x\right) = \left(a_0 + b_0\right) + \left(a_1 + b_1\right)x + \cdots + \left(a_{n-1} + b_{n-1}\right)x^{n-1} + \left(a_n + b_n\right)x^n$$

และ ถ้า c เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

$$cp\left(x\right) = ca_0 + ca_1x + \cdots + ca_{n-1}x^{n-1} + ca_nx^n$$

จะได้ว่า $p\left(x\right)$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 3.1 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน V และ c เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

1. $0\underline{x} = \underline{0}$
2. $c\underline{0} = \underline{0}$
3. ถ้า $\underline{x} + \underline{y} = \underline{x} + \underline{z}$ แล้ว $\underline{y} = \underline{z}$
4. $\left(-1\right)\underline{x} = -\underline{x}$
5. ถ้า $c\underline{x} = \underline{0}$ แล้ว $c = 0$ หรือ $\underline{x} = \underline{0}$

พิสูจน์ 1. $0\underline{x} = 0\underline{x} + \underline{0}$ สมบัติข้อ 4

$= 0\underline{x} + \left[0\underline{x} + \left(-0\underline{x}\right)\right]$ สมบัติข้อ 5

$= \left[0\underline{x} + 0\underline{x}\right] + \left(-0\underline{x}\right)$ สมบัติข้อ 3

$= \left[0 + 0\right]\underline{x} + \left(-0\underline{x}\right)$ สมบัติข้อ 8

$= 0\underline{x} + \left(-0\underline{x}\right)$ สมบัติของจำนวนเต็มศูนย์

$= \underline{0}$ สมบัติข้อ 5

2. $c\underline{0} = c\underline{0} + \underline{0}$ สมบัติข้อ 4

$= c\underline{0} + \left[c\underline{0} + \left(-c\underline{0}\right)\right]$ สมบัติข้อ 5

$= \left[c\underline{0} + c\underline{0}\right] + \left(-c\underline{0}\right)$ สมบัติข้อ 3

$= c\left[\underline{0} + \underline{0}\right] + \left(-c\underline{0}\right)$ สมบัติข้อ 7

$= c\underline{0} + \left(-c\underline{0}\right)$ สมบัติข้อ 4

$= \underline{0}$ สมบัติข้อ 5

3. กำหนดให้ $\underline{x} + \underline{y} = \underline{x} + \underline{z}$

เนื่องจาก $\underline{x} \in V$ จะมี $-\underline{x} \in V$ ที่

$$\underline{x} + \left(-\underline{x}\right) = \left(-\underline{x}\right) + \underline{x} = \underline{0}$$

แต่ $\underline{x} + \underline{y} = \underline{x} + \underline{z}$

ดังนั้น $-\underline{x} + \left(\underline{x} + \underline{y}\right) = -\underline{x} + \left(\underline{x} + \underline{z}\right)$

$\left(-\underline{x} + \underline{x}\right) + \underline{y} = \left(-\underline{x} + \underline{x}\right) + \underline{z}$ สมบัติข้อ 3

$\underline{0} + \underline{y} = \underline{0} + \underline{z}$ สมบัติข้อ 5

$\underline{y} = \underline{z}$ สมบัติข้อ 4

4. $\left(-1\right)\underline{x} = \underline{0} + \left(-1\right)\underline{x}$ สมบัติข้อ 4

$= \left(-\underline{x} + \underline{x}\right) + \left(-1\right)\underline{x}$ สมบัติข้อ 5

$= \left(-\underline{x} + 1\underline{x}\right) + \left(-1\right)\underline{x}$ สมบัติข้อ 10

$= -\underline{x} + \left(1\underline{x} + \left(-1\right)\underline{x}\right)$ สมบัติข้อ 3

$= -\underline{x} + \left(1 + \left(-1\right)\right)\underline{x}$ สมบัติข้อ 8

$= -\underline{x} + 0\underline{x}$ สมบัติของจำนวนเต็ม

$= -\underline{x} + \underline{0}$ จากข้อ 1

$= -\underline{x}$ สมบัติข้อ 4

5. กำหนดให้ $c\underline{x} = \underline{0}$

ถ้า $c = 0$ จะได้ที่ตามต้องการ

ถ้า $c \neq 0$ จะมี c^{-1} ที่ $cc^{-1} = c^{-1}c = 1$

แต่ $c\underline{x} = \underline{0}$

ดังนั้น $c^{-1}(c\underline{x}) = c^{-1}\underline{0}$

$(c^{-1}c)\underline{x} = \underline{0}$ สมบัติข้อ 3 และจากข้อ 2

$1\underline{x} = \underline{0}$

$\underline{x} = \underline{0}$ สมบัติข้อ 10

▲

3.3 ปริภูมิย่อย (Subspace)

นิยาม 3.4 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F และ S เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ V เรียก S ว่าเป็น**ปริภูมิย่อย**ของ V ก็ต่อเมื่อ S เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ F

ตัวอย่าง 3.10 กำหนดให้ $S \subset \mathbb{R}^3$ โดย $S = \{(x,y,z) \mid x - y + z = 0\}$ มีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ตามตัวอย่าง 3.1 จงแสดงว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

พิสูจน์ เนื่องจาก $0 - 0 + 0 = 0$

จะได้ว่า $(0,0,0) \in S$

ดังนั้น S ไม่ใช่เซตว่าง

จะแสดงว่า S เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟีลด์ $\mathbb{R}$ โดยจะพิสูจน์ว่าสมบัติทั้ง 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 เป็นจริงดังนี้

ให้ $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3), \underline{y} = (y_1, y_2, y_3), \underline{z} = (z_1, z_2, z_3)$ อยู่ใน S

โดยที่ $x_1 - x_2 + x_3 = 0, y_1 - y_2 + y_3 = 0, z_1 - z_2 + z_3 = 0$ และ a, b เป็นสเกลาร์

1. $\underline{x} + \underline{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$
$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

จะได้ $(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) = (x_1 - x_2 + x_3) + (y_1 - y_2 + y_3)$

$$= 0 + 0$$
$$= 0$$

$\therefore \ \underline{x} + \underline{y} \in S$

2. $\underline{x} + \underline{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$
$= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$
$= (y_1 + x_1, y_2 + x_2, y_3 + x_3)$
$= (y_1, y_2, y_3) + (x_1, x_2, x_3)$
$= \underline{y} + \underline{x}$

3. $\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (x_1, x_2, x_3) + ((y_1, y_2, y_3) + (z_1, z_2, z_3))$
$= (x_1, x_2, x_3) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2, y_3 + z_3)$
$= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2), x_3 + (y_3 + z_3))$
$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2, (x_3 + y_3) + z_3)$
$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) + (x_3, y_3, z_3)$
$= ((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) + (z_1, z_2, z_3)$
$= (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}$

4. มี $\underline{0} = (0,0,0) \in S$ ซึ่ง
$\underline{x} + \underline{0} = (x_1, x_2, x_3) + (0,0,0)$
$= (x_1 + 0, x_2 + 0, x_3 + 0)$
$= (x_1, x_2, x_3)$
$= (0 + x_1, 0 + x_2, 0 + x_3)$
$= (0,0,0) + (x_1, x_2, x_3)$
$= \underline{0} + \underline{x}$

5. จาก $a\underline{x} = (ax_1, ax_2, ax_3)$
ให้ $a = -1$ จะได้ $(-1)(\underline{x}) = -\underline{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$
ดังนั้น $\forall \underline{x} \in S$
โดยที่ $x_1 - x_2 + x_3 = 0$
จะมี $-\underline{x} \in S$
โดยที่ $-x_1 - (x_2) + (-x_3) = -(x_1 - x_2 + x_3) = -0 = 0$

ซึ่ง $\underline{x}+(-\underline{x})=(x_1,x_2,x_3)+(-x_1,-x_2,-x_3)$

$$=(x_1-x_1,x_2-x_2,x_3-x_3)$$
$$=(0,0,0)$$
$$=\underline{0}$$

6. $a\underline{x}=a(x_1,x_2,x_3)$

$$=(ax_1,ax_2,ax_3)\in\mathbb{R}^3$$

จะได้ $ax_1-ax_2+ax_3=a(x_1-x_2+x_3)=a0=0$

$\therefore\ a\underline{x}\in S$

7. $a(\underline{x}+\underline{y})=a((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3))$

$$=a(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$$
$$=(a(x_1+y_1),a(x_2+y_2),a(x_3+y_3))$$
$$=(ax_1+ay_1,ax_2+ay_2,ax_3+ay_3)$$
$$=(ax_1,ax_2,ax_3)+(ay_1,ay_2,ay_3)$$
$$=a(x_1,x_2,x_3)+a(y_1,y_2,y_3)$$
$$=a\underline{x}+a\underline{y}$$

8. $(a+b)\underline{x}=(a+b)(x_1,x_2,x_3)$

$$=((a+b)x_1,(a+b)x_2,(a+b)x_3)$$
$$=(ax_1+bx_1,ax_2+bx_2,ax_3+bx_3)$$
$$=(ax_1,ax_2,ax_3)+(bx_1,bx_2,bx_3)$$
$$=a(x_1,x_2,x_3)+b(x_1,x_2,x_3)$$
$$=a\underline{x}+b\underline{x}$$

9. $(ab)\underline{x}=(ab)(x_1,x_2,x_3)$

$$=((ab)x_1,(ab)x_2,(ab)x_3)$$
$$=(a(bx_1),a(bx_2),a(bx_3))$$
$$=a(bx_1,bx_2,bx_3)$$
$$=a(b(x_1,x_2,x_3))$$
$$=a(b\underline{x})$$

10. มี $1 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$\begin{aligned} 1\underline{x} &= 1(x_1, x_2, x_3) \\ &= (1x_1, 1x_2, 1x_3) \\ &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= \underline{x} \end{aligned}$$

จะได้ว่า S เป็นปริภูมิเวกเตอร์บนฟิลด์ $\mathbb{R}$

ฉะนั้น S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

▲

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นทฤษฎีบทที่ช่วยให้การตรวจสอบว่า เซตย่อยใดจะเป็นปริภูมิย่อยได้ง่ายขึ้น

ทฤษฎีบท 3.2 กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ S เป็นเซตย่อยที่ไม่ใช่เซตว่างของ V จะได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ V ก็ต่อเมื่อ

1. ถ้า $\underline{u} \in S$ และ $\underline{v} \in S$ แล้ว $\underline{u} + \underline{v} \in S$ (S มีสมบัติปิดภายใต้การบวกเวกเตอร์)
2. ถ้า $\underline{u} \in S$ และ k เป็นสเกลาร์ แล้ว $k\underline{u} \in S$ (S มีสมบัติปิดภายใต้การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์)

<u>พิสูจน์</u> $(\rightarrow)$ ถ้า S เป็นปริภูมิย่อยของ V โดยนิยาม 3.4 จะได้ว่า S เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ดังนั้น S จะมีสมบัติครบ 10 ข้อ ในนิยาม 3.3 และใน 10 ข้อนั้นมีสมบัติปิดภายใต้การบวกเวกเตอร์และปิดภายใต้การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์อยู่ด้วย

$(\leftarrow)$ ให้ S สมบัติปิดภายใต้การบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ นั่นคือ สมบัติข้อ 1 และ 6 ในนิยาม 3.3 เป็นจริง

จะแสดงว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ V

นั่นคือ จะต้องแสดงว่าสมบัติที่เหลืออีก 8 ข้อ คือ สมบัติข้อ 2,3,4,5,7,8,9 และ 10 เป็นจริง

จะแสดงว่า S มีสมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 2,3,4,5,7,8,9 และ 10 ดังนี้

ให้ k, ℓ เป็นสเกลาร์ และ $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in S$

จะได้ว่า $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V$ ด้วย

และเนื่องจาก V เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ดังนั้น $\underline{u}+\underline{v}=\underline{v}+\underline{u}$

$$\underline{u}+(\underline{v}+\underline{w})=(\underline{u}+\underline{v})+\underline{w}$$
$$k(\underline{u}+\underline{v})=k\underline{u}+k\underline{v}$$
$$(k+\ell)\underline{u}=k\underline{u}+\ell\underline{u}$$
$$(k\ell)\underline{u}=k(\ell\underline{u})$$

และ $1\underline{u}=\underline{u}$

นั่นคือ สมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 2,3,4,5,7,8,9 และ 10 เป็นจริงตามลำดับ

ถัดไปจะแสดงว่า S มีสมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 4 ดังนี้

ให้ $\underline{u}\in S$

จากข้อ 1 จะได้ $-\underline{u}+\underline{u}=0$

ดังนั้น จะมี $\underline{0}\in S$

นั่นคือ สมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 4 เป็นจริง

และสุดท้าย จะแสดงว่า S มีสมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 5 ดังนี้

ถ้า -1 เป็นจำนวนจริง และ $\underline{u}\in S$

จากข้อ 2 จะได้ $(-1)\underline{u}\in S$

แต่ $(-1)\underline{u}=-\underline{u}$

ดังนั้น จะมี $-\underline{u}\in S$

นั่นคือ สมบัติของการเป็นปริภูมิเวกเตอร์ข้อ 5 เป็นจริง

▲

ตัวอย่าง 3.11 กำหนดให้ (x_0,y_0) เป็นจุด ๆ หนึ่งใน $\mathbb{R}^2$ และ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}^2$ โดยที่ $S=\{k(x_0,y_0)|k\in\mathbb{R}\}$ จงแสดงว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $(0,0)=(0x_0,0y_0)=0(x_0,y_0)$ โดยที่ $0\in\mathbb{R}$

จะได้ว่า $(0,0)\in S$

ดังนั้น S ไม่ใช่เซตว่าง

1. ถ้า $\underline{u}=k_1(x_0,y_0)$ และ $\underline{v}=k_2(x_0,y_0)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S

จะได้ว่า $\underline{u}+\underline{v}=k_1(x_0,y_0)+k_2(x_0,y_0)$

$=(k_1+k_2)(x_0,y_0)$ โดยที่ $k_1+k_2 \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $\underline{u}+\underline{v} \in S$

2. ถ้า $\underline{u}=k_1(x_0,y_0)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S และ k เป็นสเกลาร์

จะได้ว่า $k\underline{u}=k(k_1(x_0,y_0))$

$=(kk_1)(x_0,y_0)$ โดยที่ $kk_1 \in \mathbb{R}$

ดังนั้น $k\underline{u} \in S$

สรุปได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

▲

ตัวอย่าง 3.12 กำหนดให้ S เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}^3$ โดยที่ $S=\{(x,y,z)|z=x+y\}$

จงแสดงว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

พิสูจน์ เนื่องจาก $0=0+0$

จะได้ว่า $(0,0,0)\in S$

ดังนั้น S ไม่ใช่เซตว่าง

1. ถ้า $\underline{u}=(x,y,z)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S และ k เป็นสเกลาร์

จะได้ว่า $\underline{u}+\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$

$=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$

แต่ $z_1=x_1+y$ และ $z_2=x_2+y_2$

ดังนั้น $z_1+z_2=x_1+x_2+y_1+y_2$

นั่นคือ $\underline{u}+\underline{v}\in S$

2. ถ้า $\underline{u}=(x,y,z)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S และ k เป็นสเกลาร์

จะได้ว่า $k\underline{u}=k(x,y,z)$

$=(kx,ky,kz)$

แต่ $z=x+y$

ดังนั้น $kz=k(x+y)=kx+ky$

$= kx + ky$

นั่นคือ $k\underline{u} \in S$

สรุปได้ว่า S เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

▲

ตัวอย่าง 3.13 กำหนดให้ W เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}^2$ โดยที่ $W = \{(x, y) | x = y\}$ จงแสดงว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

พิสูจน์ เนื่องจาก $0 = 0$

จะได้ว่า $(0,0) \in W$

ดังนั้น W ไม่ใช่เซตว่าง

1. ถ้า $\underline{u} = (x_1, y_1)$ และ $\underline{v} = (x_2, y_2)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน W

   จะได้ว่า $\underline{u} + \underline{v} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

   $= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

   แต่ $x_1 = y_1$ และ $x_2 = y_2$

   ดังนั้น $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$

   นั่นคือ $\underline{u} + \underline{v} \in W$

2. ถ้า $\underline{u} = (x, y)$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน W และ k เป็นสเกลาร์

   จะได้ว่า $k\underline{u} = k(x, y)$

   $= (kx, ky)$

   แต่ $x = y$

   ดังนั้น $kx = ky$

   นั่นคือ $k\underline{u} \in W$

   สรุปได้ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^2$

▲

ตัวอย่าง 3.14 ให้ $M_{2\times 2}$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์ของเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2 มีการบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ตามแบบมาตรฐาน

$S_1 = \{A \in M_{2\times 2} | A \text{ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม}\}$

$S_2 = \{A \in M_{2\times 2} \mid A$ เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม$\}$

จงหา S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ $M_{2\times 2}$ หรือไม่

วิธีทำ 1) ให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S_1

และ k เป็นสเกลาร์

จะได้ว่า $A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

และ $kA=\begin{bmatrix} ka_{11} & 0 \\ 0 & ka_{22} \end{bmatrix}$

ซึ่ง $A+B$ และ kA เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ดังนั้น S_1 เป็นปริภูมิย่อยของ $M_{2\times 2}$

2) ให้ $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} b_{11} & 0 \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน S_2

จะได้ $A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$

ซึ่ง $A+B$ ไม่เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม

ดังนั้น S_2 ไม่เป็นปริภูมิย่อยของ $M_{2\times 2}$

▲

ตัวอย่าง 3.15 กำหนดให้ W เป็นเซตย่อยของ $\mathbb{R}^3$ โดยที่ $W=\{(a,b,c) \mid a \ge 0\}$

จงหาว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$ หรือไม่

วิธีทำ ถ้าให้ $\underline{w}=(w_1,w_2,w_3)\in W$ และ $k=-1\in\mathbb{R}$

แล้ว $c\underline{w}=-1(w_1,w_2,w_3)$

$=(-w_1,-w_2,-w_3)$

แต่ $w_1 \ge 0$

จะได้ว่า $-w_1 \le 0$ หรือ $-w_1 \ngeq 0$

ดังนั้น $cw \notin W$

นั่นคือ W ไม่เป็นเซตย่อยของ p_3

▲

ข้อสังเกต ทุก ๆ ปริภูมิเวกเตอร์ V จะมีปริภูมิย่อยอย่างน้อย 2 ปริภูมิย่อย คือ ปริภูมิเวกเตอร์ V และ $\{\underline{0}\}$ โดยที่ $\{\underline{0}\}$ เป็นปริภูมิที่มีเวกเตอร์ศูนย์เป็นสมาชิกเพียงเวกเตอร์เดียว ปริภูมิย่อยทั้งสองนี้เรียกว่า **ปริภูมิย่อยชัด** (Trivial Subspace)

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนดให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ ถ้า S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ V แล้ว $S_1 \cap S_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $S_1 \subset V$ และ $S_2 \subset V$

ดังนั้น $S_1 \cap S_2 \subset V$

เนื่องจาก S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ V

ดังนั้น $\underline{0} \in S_1$ และ $\underline{0} \in S_2$

ฉะนั้น $\underline{0} \in S_1 \cap S_2$

นั่นคือ $S_1 \cap S_2$ ไม่ใช่เซตว่าง

1. ถ้า $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นสมาชิกของ $S_1 \cap S_2$

   จะได้ว่า $\underline{u}, \underline{v} \in S_1$ และ $\underline{u}, \underline{v} \in S_2$

   เนื่องจาก S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ V

   ดังนั้น $\underline{u} + \underline{v} \in S_1$ และ $\underline{u} + \underline{v} \in S_2$

   ฉะนั้น $\underline{u} + \underline{v} \in S_1 \cap S_2$

2. ถ้า $\underline{u}$ เป็นสมาชิกของ $S_1 \cap S_2$ และ k เป็นสเกลาร์

   จะได้ว่า $\underline{u} \in S_1$ และ $\underline{u} \in S_2$

   เนื่องจาก S_1 และ S_2 เป็นปริภูมิย่อยของ V

   ดังนั้น $k\underline{u} \in S_1$ และ $k\underline{u} \in S_2$

   ฉะนั้น $k\underline{u} \in S_1 \cap S_2$

   สรุปได้ว่า $S_1 \cap S_2$ เป็นปริภูมิย่อยของ V

▲

3.4 การรวมเชิงเส้น (Linear Combination)

นิยาม 3.5 ให้ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V จะกล่าวว่า เวกเตอร์ $\underline{v}$ ใน V เป็น**การรวมเชิงเส้น**ของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ ก็ต่อเมื่อ มีสเกลาร์ $\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n$ ที่ทำให้ $\underline{v} = a_1\underline{v}_1, a_2\underline{v}_2, ..., a_n\underline{v}_n$

ตัวอย่าง 3.16 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $(2,7)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,2)$ และ $(0,1)$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $(2,7)=a_1(1,2)+a_2(0,1)$

$$=(a_1,2a_1)+(0,a_2)$$
$$=(a_1,2a_1+a_2)$$

จะได้ $a_1=2$

(3.1)

$2a_1+a_2=7$

(3.2)

แทน $a_1=2$ ใน (3.2) จะได้ $a_2=7-2(2)=3$

ดังนั้น $(2,7)=2(1,2)+3(0,1)$

นั่นคือ $(2,7)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,2)$ และ $(0,1)$

▲

ตัวอย่าง 3.17 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $(3,4,6)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,1,2),(0,2,3)$ และ $(0,0,1)$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ $(3,4,6)=a_1(1,1,2)+a_2(0,2,3)+a_3(0,0,1)$

ซึ่งได้ $a_1=3$

(3.3)

$a_1+2a_2=4$

(3.4)

$2a_1+3a_2+a_3=6$

(3.5)

เมื่อแทน $a_1=3$ ใน (3.4) จะได้ $a_2=\frac{1}{2}(4-3)=\frac{1}{2}$

และแทน $a_1=3$ ใน (3.5) จะได้ $a_3=\left(6-3\left(\frac{1}{2}\right)-2(3)\right)=-\frac{3}{2}$

ดังนั้น $(3,4,6)=3(1,1,2)+\frac{1}{2}(0,2,3)-\frac{3}{2}(0,0,1)$

นั่นคือ $(3,4,6)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,1,2),(0,2,3)$ และ $(0,0,1)$

▲

<u>ตัวอย่าง 3.18</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ จงพิจารณาว่าเวกเตอร์ $(3,3,3),(1,5,6)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,-1,3)$ และ $(2,4,0)$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> 1. ให้ $(3,3,3)=a_1(1,-1,3)+a_2(2,4,0)$

$=(a_1+2a_2,-a_1+4a_2,3a_1)$

ซึ่งได้ $a_1+2a_2=3$

(3.6)

$-a_1+4a_2=3$

(3.7)

$3a_1=3$

(3.8)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1,a_2 โดย

จาก (3.8) จะได้ว่า $a_1=1$

แทน $a_1=1$ ใน (3.6) จะได้ $a_2=\frac{1}{2}(3-1)=1$

พิจารณาข้างซ้ายของสมการ $(3.7)=LHS=-a_1+4a_2=-1+4(1)=3$

และ ข้างขวาของสมการ $(3.7)=RHS=3$

ฉะนั้น $LHS=RHS$

ดังนั้น $(3,3,3)=(1,-1,3)+(2,4,0)$

นั่นคือ $(3,3,3)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,-1,3)$ และ $(2,4,0)$

2. ให้ $(1,5,6)=a_1(1,-1,3)+a_2(2,4,0)$

$=(a_1+2a_2,-a_1+4a_2,3a_1)$

ซึ่งได้ $a_1+2a_2=1$

(3.9)

$-a_1+4a_2=5$

(3.10)

$3a_1=6$

(3.11)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1,a_2 โดย

จาก (3.11) จะได้ว่า $a_1 = \frac{6}{3} = 2$

แทน $a_1 = 2$ ใน (3.9) จะได้ $a_2 = \frac{1}{2}(1-2) = -\frac{1}{2}$

พิจารณาข้างซ้ายของสมการ $(3.10) = LHS = -a_1 + 4a_2 = -2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$

แต่ข้างขวาของสมการ $(3.10) = RHS = 5$

ฉะนั้น $LHS \neq RHS$

นั่นคือ $(1,5,6)$ ไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของ $(1,-1,3)$ และ $(2,4,0)$

▲

จากตัวอย่างที่ 3.18 จะเห็นว่า ถ้า $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ อยู่ในปริภูมิเวกเตอร์ V แล้วอาจมีบางเวกเตอร์ใน V ที่เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ และอาจมีบางเวกเตอร์ใน V ที่ไม่เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V และ W เป็นเซตของเวกเตอร์ใน V ที่เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ จะได้ว่า

1. W เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่มี $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n \in W$
2. ถ้า U เป็นปริภูมิย่อยใด ๆ ของ V ที่มี $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก แล้ว $W \subset U$

(นั่นคือ W เป็นปริภูมิย่อยของ V ที่เล็กที่สุด ที่มี $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก)

<u>พิสูจน์</u> 1. จะพิสูจน์ว่า $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นสมาชิกของ W และ W เป็นปริภูมิย่อยของ V

เนื่องจาก $\underline{v}_1 = 1\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + ... + 0\underline{v}_n$

$$\underline{v}_2 = 0\underline{v}_1 + 1\underline{v}_2 + ... + 0\underline{v}_n$$
$$\vdots$$
$$\underline{v}_n = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + ... + 1\underline{v}_n$$

นั่นคือ $\underline{v}_i$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$

ดังนั้น $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นสมาชิกของ W

ถัดไป จะพิสูจน์ว่า W เป็นปริภูมิย่อยของ V

ให้ $\underline{u}$ และ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน W

โดยที่ $\underline{u} = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_k\underline{v}_n$

$$\underline{v} = b_1\underline{v}_1 + b_2\underline{v}_2 + ... + b_k\underline{v}_n$$

เมื่อ $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ เป็นสเกลาร์

จะได้ $\underline{u} + \underline{v} = (a_1 + b_1)\underline{v}_1 + (a_2 + b_2)\underline{v}_2 + ... + (a_n + b_n)\underline{v}_n$

ดังนั้น $\underline{u} + \underline{v} \in W$

ให้ $\underline{u} \in W$ และ c เป็นสเกลาร์

$c\underline{u} = (ca_1)\underline{v}_1 + (ca_2)\underline{v}_2 + ... + (ca_n)\underline{v}_n$

ดังนั้น $c\underline{u} \in W$

นั่นคือ W เป็นปริภูมิย่อยของ V

2. ถ้า U เป็นปริภูมิย่อยใด ๆ ของ V ที่มี $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก

จะได้ว่า แต่ละเวกเตอร์ $\underline{v}_i = 0\underline{v}_1 + 0\underline{v}_2 + ... + 1\underline{v}_i + ... + 0\underline{v}_n$

ฉะนั้น $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นสมาชิกของ W

ให้ U เป็นปริภูมิย่อยอื่นของ V ที่ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก

เนื่องจาก U มีสมบัติปิดภายใต้การบวกเวกเตอร์และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ดังนั้น U จะมี $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_k\underline{v}_n$ ซึ่งเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นสมาชิก

นั่นคือ สมาชิกแต่ละตัวของ W จะเป็นสมาชิกของ U

หรือกล่าวคือ $W \subset U$

▲

3.5 การแผ่ทั่ว (Span)

นิยาม 3.6 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นเซตย่อยของเวกเตอร์ใน V จะเรียก S ว่า **แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์** (Span the Space) V ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ เวกเตอร์ใน V เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

<u>ตัวอย่าง 3.19</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ ให้ $\underline{v}_1 = (1,0)$ และ $\underline{v}_2 = (0,1)$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^2$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ (x, y) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^2$

ต้องการหาว่า มีสเกลาร์ a_1, a_2 ที่ทำให้ $(x, y) = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2$ หรือไม่

หรือกล่าวคือ ต้องการหาว่า (x, y) จะเขียนเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ หรือไม่

พิจารณา $(x, y) = a_1(1,0) + a_2(0,1)$

$=(a_1,a_2)$

ฉะนั้น $a_1=x$ และ $a_2=y$ ซึ่งเป็นสเกลาร์

ดังนั้น $(x,y)=x(1,0)+y(0,1)$

นั่นคือ S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^2$

▲

ตัวอย่าง 3.20 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ให้ $\underline{v}_1=(1,0,0),\underline{v}_2=(0,1,0)$ และ $\underline{v}_3=(0,0,1)$ จงพิจารณาว่าเซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ (x,y,z) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^3$

ต้องการหาว่า มีสเกลาร์ a_1,a_2,a_3 ที่ทำให้ $(x,y,z)=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3$ หรือไม่

พิจารณา $(x,y,z)=a_1(1,0,0)+a_2(0,1,0)+a_3(0,0,1)$

$=(a_1,a_2,a_3)$

ฉะนั้น $a_1=x,a_2=y$ และ $a_3=z$ ซึ่งเป็นสเกลาร์

ดังนั้น $(x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1)$

นั่นคือ S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ ▲

ตัวอย่าง 3.21 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ ให้ $\underline{v}_1=(1,2,3),\underline{v}_2=(0,1,0)$ และ $\underline{v}_3=(1,0,2)$ เซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ (x,y,z) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^3$

ต้องการหาว่า มีสเกลาร์ a_1,a_2 และ a_3 ที่ทำให้ $(x,y,z)=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+a_3\underline{v}_3$ หรือไม่

พิจารณา $(x,y,z)=a_1(1,2,3)+a_2(0,1,0)+a_3(1,0,2)$

$=(a_1+a_3,2a_1+a_2,3a_1+2a_3)$

จะได้ $a_1+a_3=x$

(3.12)

$2a_1+a_2=y$

(3.13)

$3a_1+2a_3=z$

(3.14)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1,a_2,a_3 โดย

$(3.12)\times 2: \qquad 2a_1 + 2a_3 = 2x$

(3.15)

$(3.14)-(3.15): \qquad a_1 = z - 2x$

แทน $a_1 = z - 2x$ ใน (3.12) จะได้ $a_3 = x - (z - 2x) = 3x - z$

และแทน $a_1 = z - 2x$ ใน (3.13) จะได้ $a_2 = y - 2(z - 2x) = 4x + y - 2z$

โดยที่ a_1, a_2 และ a_3 เป็นสเกลาร์

ดังนั้น $(x, y, z) = (z - 2x)(1,2,3) + (4x + y - 2z)(0,1,0) + (3x - z)(1,0,2)$

นั่นคือ S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$

▲

เซตของเวกเตอร์ที่แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ V ไม่ได้มีเพียงเซตเดียว เช่น จากตัวอย่าง 3.20 และ 3.21 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ จะได้ว่า

$\underline{v}_1 = (1,0,0), \underline{v}_2 = (0,1,0), \underline{v}_3 = (0,0,1)$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$

และนอกจากนี้ $\underline{v}_1 = (1,2,3), \underline{v}_2 = (0,1,0), \underline{v}_3 = (1,0,2)$ ก็แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$ เช่นกัน

ตัวอย่าง 3.22 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^4$ ให้ $\underline{v}_1 = (1,2,-1,1), \underline{v}_2 = (0,1,-4,2)$ และ $\underline{v}_3 = (1,1,3,-1)$ จงหาว่าเซต $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^4$ หรือไม่

วิธีทำ ให้ (w, x, y, z) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน $\mathbb{R}^4$

ต้องการหาว่า มีสเกลาร์ a_1, a_2 และ a_3 ที่ทำให้ $(w, x, y, z) = a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3$ หรือไม่

พิจารณา $(w, x, y, z) = a_1(1,2,-1,1) + a_2(0,1,-4,2) + a_3(1,1,3,-1)$

จะได้ $\qquad a_1 + a_3 = W$

$$2a_1 + a_2 + a_3 = x$$

$$-a - 4a_2 + 3a_3 = y$$

$$a_1 + 2a_2 - a_3 = z$$

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1, a_2, a_3 โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานทำกับเมทริกซ์แต่งเติม จะได้

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & w \\ 2 & 1 & 1 & x \\ -1 & -4 & 3 & y \\ 1 & 2 & -1 & z \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & w \\ 0 & 1 & -1 & x - 2w \\ 0 & 0 & 0 & y + 4x - 7w \\ 0 & 0 & 0 & z - 2x + 3w \end{bmatrix}$$

ซึ่ง rank $\left[A|B\right]=4$

และ rank $A=2$

นั่นคือ rank $\left[A|B\right]>$ rank A

ดังนั้น ระบบสมการไม่มีผลเฉลย

ฉะนั้น S ไม่แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^4$

▲

จากตัวอย่าง 3.22 จะได้ว่า ถ้า $y+4x-7w=0$ และ $z-2x+3w=0$ แล้วระบบสมการจะมีผลเฉลยมากมาย เพราะว่า rank $\left[A|B\right]=$ rank $A<$ จำนวนตัวแปรในระบบ หรือกล่าวคือ S แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^4$

<u>ตัวอย่าง 3.23</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ P_2 กำหนดให้ $\underline{v}_1=x^2+1$ และ $\underline{v}_2=x^2+x+2$ จงหาว่าเซต $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2\}$ แผ่ทั่ว P_2 หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $\underline{v}=ax^2+bx+c$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน P_2

ต้องการหาว่า มีสเกลาร์ a_1 และ a_2 ที่ทำให้ $\underline{v}=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2$ หรือไม่

พิจารณา $ax^2+bx+c=a_1\left(x^2+1\right)+a_2\left(x^2+x+2\right)$

$$=a_1x^2+a_1+a_2x^2+a_2x+2a_2$$

$$=\left(a_1+a_2\right)x^2+a_2x+a_1+2a_2$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x จะได้

$$a_1+a_2=a$$

(3.16)

$$a_2=b$$

(3.17)

$$a_1+2a_2=c$$

(3.18)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1,a_2 โดยที่ $a_2=b$ ใน (3.16) จะได้

$$a_1=a-b$$

แทนค่า $a_1=a-b$ และ $a_2=b$ ในสมการ (3.18) จะได้

$$LHS=a-b+2b=a+b$$

และ $RHS=c$

ซึ่ง LHS อาจไม่จริงก็ได้ เช่น ถ้า $a=2, b=3$ และ $c=1$
ฉะนั้น S ไม่แผ่ทั่ว P_2

▲

นิยาม 3.8 ให้ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V
และ $W = \{\underline{u} | \underline{u}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เรียก W ว่า **ถูกแผ่ทั่วโดยเวกเตอร์** $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ (space spanned by $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$) และเขียนแทนด้วย $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ หรือ $W = span(S)$ เมื่อ $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$

เช่น จากตัวอย่าง 3.19 จะเห็นว่า $\mathbb{R}^2$ ถูกแผ่ทั่วโดย S
นั่นคือ $\mathbb{R}^2 = span(S)$ เมื่อ $S = \{(1,0),(0,1)\}$
จากตัวอย่าง 3.20 จะเห็นว่า $\mathbb{R}^3$ ถูกแผ่ทั่วโดย S
นั่นคือ $\mathbb{R}^3 = span(S)$ เมื่อ $S = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
และจากตัวอย่าง 3.21 จะเห็นว่า $\mathbb{R}^3$ ถูกแผ่ทั่วโดย S
นั่นคือ $\mathbb{R}^3 = span(S)$ เมื่อ $S = \{(1,2,3),(0,1,0),(1,0,2)\}$

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้า S แผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ $V, S \subset W$ และ $W \subset V$ แล้ว W จะแผ่ทั่วปริภูมิเวกเตอร์ V

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\underline{v} \in V$
เนื่องจาก S แผ่ทั่ว V หรือ $V = span(S)$
ดังนั้น $\underline{v}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ S
แต่เนื่องจากเวกเตอร์ทุกเวกเตอร์ใน S เป็นสมาชิกของ W
ดังนั้น $\underline{v}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ W ด้วย
ฉะนั้น จะได้ว่า W แผ่ทั่ว V หรือ $V = span(W)$

▲

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ $S=\{\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_m\}$ และ $S'=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V จะได้ว่า $span(S)=span(S')$ ก็ต่อเมื่อ แต่ละเวกเตอร์ใน S เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S' และกลับกัน แต่ละเวกเตอร์ใน S' เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

<u>พิสูจน์</u> $(\rightarrow)$ ให้ $span(S)=span(S')$

สมมติ $\underline{u}_i\in span(S);\ i=1,2,...,m$

กล่าวคือ $\underline{u}_i$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_m$

เนื่องจาก $span(S)=span(S')$

ดังนั้น $\underline{u}_i\in span(S')$

กล่าวคือ $\underline{u}_i$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n$

ฉะนั้น แต่ละเวกเตอร์ใน S จะเป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S'

ในทำนองเดียวกัน แต่ละเวกเตอร์ใน S' เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

$(\leftarrow)$ ให้แต่ละเวกเตอร์ใน S เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S'

และในทางกลับกัน แต่ละเวกเตอร์ใน S' เป็นการรวมเชิงเส้นของเวกเตอร์ใน S

จะพิสูจน์ว่า $span(S)=span(S')$

ให้ $\underline{x}\in span(S)$

จะได้ $\underline{x}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{u}_1,\underline{u}_2,...,\underline{u}_m$

นั่นคือ $\underline{x}=c_1\underline{u}_1+c_2\underline{u}_2+...+c_m\underline{u}_m$ โดยที่ $c_1,c_2,...,c_m$ เป็นสเกลาร์

และแต่ละ $\underline{u}_i$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n$

จะได้ $\underline{u}_i=d_{i1}\underline{v}_1+d_{i2}\underline{v}_2+...+d_{in}\underline{v}_n$ โดยที่ $i=1,2,...,m$

และ $d_{i1},d_{i2},...,d_{in}$ เป็นสเกลาร์

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
\underline{x}&=c_1\left(d_{11}\underline{v}_1+d_{12}\underline{v}_2+...+d_{1n}\underline{v}_n\right)+c_2\left(d_{21}\underline{v}_1+d_{22}\underline{v}_2+...+d_{2n}\underline{v}_n\right)\\
&\quad+\cdots+c_m\left(d_{m1}\underline{v}_1+d_{m2}\underline{v}_2+...+d_{mn}\underline{v}_n\right)\\
&=\left(c_1d_{11}+c_2d_{21}+...+c_md_{m1}\right)\underline{v}_1+\left(c_1d_{12}+c_2d_{22}+...+c_md_{m2}\right)\underline{v}_2\\
&\quad+\cdots+\left(c_1d_{1n}+c_2d_{2n}+...+c_md_{mn}\right)\underline{v}_n
\end{aligned}
$$

กล่าวคือ $\underline{x}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n$

นั่นคือ $\underline{x}\in span(S')$

ฉะนั้น $span(S)\subset span(S')$

ในทำนองเดียวกัน ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า $span(S') \subset span(S)$

สรุปได้ว่า $span(S) \subset span(S')$

▲

ทฤษฎีบท 3.7 กำหนดเวกเตอร์ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$ ในปริภูมิเวกเตอร์ V
ถ้า $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ แล้ว $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}\}$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$

จะได้ว่า ทุกเวกเตอร์ใน W เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$

สมมติ $\underline{w} \in W$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ

จะได้ $\underline{w} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + ... + c_n\underline{v}_n$

หรือ $\underline{w} = c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + ... + c_n\underline{v}_n + 0\underline{v}_{n+1}$

นั่นคือ ทุกเวกเตอร์ใน W จะเป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$

ดังนั้น $W = span\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}\}$

▲

3.6 อิสระเชิงเส้น (Linearly Independent)

นิยาม 3.9 ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n\}$ เป็นเซตย่อยของ V และ $a_1, a_2, ..., a_n$ เป็นสเกลาร์

ถ้า $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_n\underline{v}_n = \underline{0}$ แล้ว $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ จะเรียก S ว่าเป็น**อิสระเชิงเส้น** (Linearly Independent)

ถ้า $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_n\underline{v}_n = \underline{0}$ และ มีจำนวนเต็ม i บางตัวที่ $a_i \neq 0$ แล้วจะเรียก S ว่า**ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น** (Linearly Dependent)

<u>ตัวอย่าง 3.24</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^2$ กำหนดให้ $\underline{v}_1 = (0,2)$ และ $\underline{v}_2 = (2,1)$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า $a_1(0,2) + a_2(2,1) = (0,0)$

$$(0, 2a_1) + (2a_2, a_2) = (0,0)$$

$$(2a_2, 2a_2 + a_2) = (0,0)$$

นั่นคือ $2a_2 = 0$

(3.19)

$$2a_2 + a_2 = 0$$

(3.20)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1, a_2 โดย

$(3.19) \div 2: \quad a_2 = 0$

แทน $a_2 = 0$ ใน (3.20) จะได้ $a_1 = \frac{1}{2}(0-0) = 0$

ดังนั้น $a_1 = a_2 = 0$

ฉะนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

<u>ตัวอย่าง 3.25</u> ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ กำหนดให้ $\underline{v}_1 = (1,1,1), \underline{v}_2 = (-1,2,-1)$ และ $\underline{v}_3 = (3,0,2)$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

จะได้ว่า $a_1(1,1,1) + a_2(-1,2,-1) + a_3(3,0,2) = (0,0,0)$

$$(a_1 - a_2 + 3a_3, a_1 + 2a_2, a_1 - a_2 + 2a_3) = (0,0,0)$$

นั่นคือ $a_1 - a_2 + 3a_3 = 0$

(3.21)

$$a_1 + 2a_2 = 0$$

(3.22)

$$a_1 - a_2 + 2a_3 = 0$$

(3.23)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1, a_2, a_3 โดย

$(3.21) - (3.23): \quad a_3 = 0$

แทน $a_3 = 0$ ใน (3.21) จะได้

$$a_1 - a_2 = 0$$

(3.24)

$(3.22) - (3.24): \quad 3a_2 = 0$ หรือ $a_2 = 0$

แทน $a_2 = 0, a_3 = 0$ ใน (3.21) จะได้ $a_1 = 0 + 0 - 3(0) = 0$

ดังนั้น $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

ฉะนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

ตัวอย่าง 3.26 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^3$ กำหนดให้ $\underline{v}_1 = (2,3,4), \underline{v}_2 = (1,4,3)$ และ $\underline{v}_3 = (1,-1,1)$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_1(2,3,4) + a_2(1,4,3) + a_3(1,-1,1) = (0,0,0)$

$$(2a_1 + a_2 + a_3, 3a_1 + 4a_2 - a_3, 4a_1 + 3a_2 + a_3) = (0,0,0)$$

นั่นคือ $2a_1 + a_2 + a_3 = 0$

(3.25)

$$3a_1 + 4a_2 - a_3 = 0$$

(3.26)

$$4a_1 + 3a_2 + a_3 = 0$$

(3.27)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1, a_2, a_3 โดย

$(3.25) + (3.26):$ $5a_1 + 5a_2 = 0$ หรือ $a_1 = -a_2$

แทน $a_1 = -a_2$ ใน (3.27) จะได้ $-4a_2 + 3a_2 + a_3 = 0$

$$-a_2 + a_3 = 0$$

$$a_3 = a_2$$

เนื่องจาก a_2 เป็นสเกลาร์

ถ้าให้ $a_2 = t$ โดยที่ $t \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_1 = -t$ และ $a_3 = t$

เช่น ให้ $a_2 = 1$ จะได้ $a_1 = -1$ และ $a_3 = 1$

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

ตัวอย่าง 3.27 ในปริภูมิเวกเตอร์ P_2 กำหนดให้ $\underline{v}_1 = x^2 + 2x + 1,\ \underline{v}_2 = x^2 - 1$ และ $\underline{v}_3 = x^2 - x$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_1\left(x^2 + 2x + 1\right) + a_2\left(x^2 - 1\right) + a_3\left(x^2 - x\right) = 0$

$\left(a_1 + a_2 + a_3\right)x^2 + \left(2a_1 - a_3\right)x + \left(a_1 - a_2\right) = 0$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x จะได้

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0$$

(3.28)

$$2a_1 - a_3 = 0$$

(3.29)

$$a_1 - a_2 = 0$$

(3.30)

แก้ระบบสมการหาค่าของ a_1, a_2, a_3 โดยที่ (3.30) จะได้

$$a_1 = a_2$$

(3.31)

แทน $a_1 = a_2$ ใน (3.28) จะได้

$$2a_1 + a_3 = 0$$

(3.32)

$(3.29) + (3.32):\quad 4a_1 = 0$ หรือ $a_1 = 0$

แทน $a_1 = 0$ ใน (3.29) และ (3.31) จะได้ $a_3 = 0$ และ $a_1 = 0$ ตามลำดับ

นั่นคือ $a_1 = a_2 = a_3 = 0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

ตัวอย่าง 3.28 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^4$ ให้ $\underline{v}_1 = (1,2,5,-1), \underline{v}_2 = (7,-1,5,8)$ และ $\underline{v}_3 = (2,-1,0,3)$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + a_3\underline{v}_3 = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_1(1,2,5,-1) + a_2(7,-1,5,8) + a_3(2,-1,0,3) = (0,0,0)$

นั่นคือ
$$a_1 + 7a_2 + 2a_3 = 0$$
$$2a_1 - a_2 - a_3 = 0$$
$$5a_1 + 5a_2 = 0$$
$$-a_1 + 8a_2 + 3a_3 = 0$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์หาค่าของ a_1, a_2, a_3 โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานทำกับ

เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ จะได้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 5 & 5 & 0 \\ -1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \\ R_3 \to R_3 - 5R_1 \\ \sim \\ R_4 \to R_4 + R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & -30 & -10 \\ 0 & 15 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_3 \to R_3 - 2R_2 \\ \sim \\ R_4 \to R_4 + R_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & -15 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2 \to -\frac{1}{5}R_2 \\ \sim \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง rank $A = 2$

และจำนวนตัวแปร $= 3$

นั่นคือ rank $A <$ จำนวนตัวแปรในระบบ

ดังนั้น ระบบสมการมีผลเฉลยมากมาย

จากเมทริกซ์สุดท้าย จะได้

$$a_1 + 7a_2 + 2a_3 = 0$$
$$3a_2 + a_3 = 0$$

ถ้าให้ $a_3 = t$ โดยที่ $t \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_2 = -\frac{a_3}{3} = -\frac{t}{3}$

และ $a_1 = -7a_2 - 2a_3 = -7\left(-\frac{t}{3}\right) - 2(t) = \frac{t}{3}$

เช่น ให้ $a_3 = 1$ จะได้ $a_1 = \frac{1}{3}$ และ $a_2 = -\frac{1}{3}$

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

ตัวอย่าง 3.29 ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n$ ให้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยมาตรฐาน $\underline{e}_1 = \overbrace{(1,0,...,0)}^{n \text{ ตัว}}$

$\underline{e}_2 = (0,1,...,0),...,\underline{e}_n = (0,0,...,1)$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_n\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ $a_1\underline{e}_1 + a_2\underline{e}_2 + \cdots + a_n\underline{e}_n = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_1(1,0,...,0) + a_2(0,1,...,0) + \cdots + a_n(0,0,...,1) = (0,0,...,0)$

หรือ $(a_1, a_2, ..., a_n) = (0,0,...,0)$

นั่นคือ $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

ตัวอย่าง 3.30 ในปริภูมิเวกเตอร์ $M_{2\times2}$ กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ และ

$D = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ จงพิจารณาว่าเซต $S = \{A, B, C, D\}$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ $a_1A + a_2B + a_3C + a_4D = \underline{0}$ โดยที่ $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

หรือ
$$a_1 + 2a_4 = 0$$
$$a_2 + a_3 + 3a_4 = 0$$
$$a_3 - 5a_4 = 0$$

แก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ เพื่อหาค่าของ a_1, a_2, a_3

โดยสังเกตเห็นว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว

จะได้ว่า rank $A = 3$

และ จำนวนตัวแปร $= 4$

นั่นคือ rank $A <$ จำนวนตัวแปรในระบบ

ดังนั้น ระบบสมการมีผลเฉลยมากมาย

ถ้าให้ $a_4 = t$ โดยที่ $t \in \mathbb{R}$

จะได้ $a_3 = 5a_4 = 5t$

$a_2 = -a_3 - 3a_4 = -5t - 3t = -8t$

และ $a_1 = -2a_4 = -2t$

เช่น ให้ $a_4 = 1$ จะได้ $a_1 = -2, a_2 = -8$ และ $a_3 = 5$

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

ทฤษฎีบท 3.8 ให้ S เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V

1. ถ้า $\underline{0} \in S$ แล้ว S จะไม่เป็นอิสระเชิงเส้น
2. ถ้า $S = \{\underline{v}\}$ และ $\underline{v} \neq \underline{0}$ แล้ว S เป็นอิสระเชิงเส้น
3. ถ้า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นและ $S \subset S'$ แล้ว S' จะไม่เป็นอิสระเชิงเส้น
4. ถ้า S เป็นอิสระเชิงเส้นและ $S' \subset S$ แล้ว S' จะเป็นอิสระเชิงเส้น

<u>พิสูจน์</u> 1. ให้ $\underline{0} \in S$

จะได้ว่า $a\underline{0} = \underline{0}$ ทุกสเกลาร์ $a \neq 0$

ดังนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

2. ให้ $S = \{\underline{v}\}$ และ $\underline{v} \neq \underline{0}$

จะได้ว่า $a\underline{v} = \underline{0}$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$

ดังนั้น S เป็นอิสระเชิงเส้น

3. ให้ S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ จะมีสเกลาร์ $a_1, a_2, ..., a_n$ ซึ่งไม่เป็นศูนย์ทั้งหมด ที่ทำให้

$a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + ... + a_n\underline{v}_n = \underline{0}$ โดยที่ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n \in S$

แต่ $S \subset S'$

ดังนั้น $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n \in S'$

ฉะนั้น S' ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

4. ให้ S เป็นอิสระเชิงเส้น และ $S' \subset S$

สมมติ S' ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

จากข้อ 3 จะได้ S ไม่อิสระเชิงเส้น ซึ่งขัดแย้ง

ดังนั้น S' เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

ทฤษฎีบท 3.9 ถ้า $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_n\}$ เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V โดยที่ $n\geq 2$ และ $\underline{0}\notin S$ แล้ว S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อมี $\underline{v}_k$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_{k-1}$ สำหรับ k บางตัวที่มากกว่า 1

<u>**พิสูจน์**</u> $(\rightarrow)$ สมมติว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ จะมีสเกลาร์ $a_1,a_2,...,a_n$ บางตัวไม่เท่ากับศูนย์ ที่ทำให้

$$a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+...+a_n\underline{v}_n=\underline{0}$$

ให้ j เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่ามากที่สุดใน $\{1,2,3,...,n\}$ ที่ $a_j\neq 0$

สมมติ $j=1$

จะได้ว่า $a_1\underline{v}_1=\underline{0}$ และ $a_1\neq 0$

ดังนั้น $\underline{v}_1=\underline{0}$ ซึ่งขัดกับที่กำหนด $\underline{0}\notin S$

ฉะนั้น $j>1$ และ $\underline{v}_j=\frac{a_1}{a_j}\underline{v}_1-\frac{a_2}{a_j}\underline{v}_2-\cdots-\frac{a_{j-1}}{a_j}\underline{v}_{j-1}$

$(\leftarrow)$ ให้ $k>1$ และ $\underline{v}_k$ เป็นการรวมเชิงเส้นของ $\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_{k-1}$

จะได้ว่า $\underline{v}_k=a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+...+a_{k-1}\underline{v}_{k-1}$

ดังนั้น $a_1\underline{v}_1+a_2\underline{v}_2+...+a_{k-1}\underline{v}_{k-1}-\underline{v}_k=\underline{0}$

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

<u>**ตัวอย่าง 3.31**</u> กำหนด $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}$ โดยที่ $\underline{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix}, \underline{v}_2=\begin{bmatrix}5\\6\\-1\end{bmatrix}$ และ $\underline{v}_3=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

จงแสดงว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

<u>**พิสูจน์**</u> ต้องการหาว่าเวกเตอร์ $\underline{v}_1$ เป็นการรวมเชิงเส้นขอ $\underline{v}_2$ และ $\underline{v}_3$ หรือไม่

โดยพิจารณาจาก $\underline{v}_1=a\underline{v}_2+b\underline{v}_3$ โดยที่ a,b เป็นสเกลาร์

จะได้ $$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $$5a+3b=1$$
$$6a+2b=-2$$
$$-a+b=3$$

แก้ระบบสมการหาค่าของ a,b โดยใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานทำกับเมทริกซ์แต่งเติม จะได้

$$\left[A|B\right] = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ซึ่ง rank $\left[A|B\right] = 2$

rank $A = 2$

และ จำนวนตัวแปร $=2$

นั่นคือ rank $\left[A|B\right] =$ rank $A =$ จำนวนตัวแปรในระบบ

ดังนั้น ระบบสมการจะมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว คือ $a=-1$ และ $b=2$

หรือกล่าวคือ $\underline{v}_1 = -\underline{v}_2 + 2\underline{v}_3$

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น ▲

ทฤษฎีบท 3.10 กำหนด $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,...,\underline{v}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ ถ้า $k>n$ แล้ว S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\underline{v}_1 = \left(\underline{v}_{11},\underline{v}_{12},...,\underline{v}_{1n}\right)$

$$\underline{v}_2 = \left(\underline{v}_{21},\underline{v}_{22},...,\underline{v}_{2n}\right)$$
$$\vdots$$
$$\underline{v}_k = \left(\underline{v}_{k1},\underline{v}_{k2},...,\underline{v}_{kn}\right)$$

พิจารณาสมการ $a_1\underline{v}_1 + a_2\underline{v}_2 + \cdots + a_k\underline{v}_k = \underline{0}$

หรือ $$a_1v_{11} + a_2v_{21} + \cdots + a_kv_{k1} = 0$$
$$a_1v_{12} + a_2v_{22} + \cdots + a_kv_{k2} = 0$$
$$\vdots$$
$$a_1v_{1n} + a_2v_{2n} + \cdots + a_kv_{kn} = 0$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มี n สมการ k ตัวแปร คือ $a_1,a_2,...,a_k$

เนื่องจาก $k>n$

ดังนั้น ระบบสมการจะมีผลเฉลยมากมาย

ฉะนั้น S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

<u>ตัวอย่าง 3.32</u> ให้ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3\}\subset\mathbb{R}^2$ โดยที่ $\underline{v}_1=(1,2)$, $\underline{v}_2=(-3,4)$, $\underline{v}_3=(0,1)$

จงพิจารณาว่าเซต S เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก S มีสมาชิก 3 ตัว

จะได้ $k=3$ และ $n=2$

นั่นคือ $k>n$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 3.10 สรุปได้ว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

<u>ตัวอย่าง 3.33</u> ให้ $S=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{v}_3,\underline{v}_4\}\subset M_{3\times1}$ โดยที่ $\underline{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\underline{v}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\5\end{bmatrix}$, $\underline{v}_3=\begin{bmatrix}-1\\1\\-2\end{bmatrix}$ และ $\underline{v}_4=\begin{bmatrix}3\\3\\4\end{bmatrix}$

จงพิจารณาว่าเซต S เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก S เป็นเซตของเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ $M_{3\times1}$ และ S มีสมาชิก 4 ตัว

จะได้ $k=4$ และ $n=3$

นั่นคือ $k>n$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 3.10 สรุปได้ว่า S ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

▲

แบบฝึกหัดบทที่ 3

1. จงพิจารณาว่าข้อต่อไปนี้เป็นปริภูมิเวกเตอร์หรือไม่ ถ้าเป็นจงพิสูจน์ แต่ถ้าไม่เป็น ให้บอกว่าขาดสมบัติข้อใด

1.1 เซตของ 3 อันดับของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปแบบ (x,y,z) โดยมีนิยามการบวกเวกเตอร์และการ

คูณ

เวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$

และ $k(x,y,z)=(kx,y,z)$

1.2 เซตของ 3 อันดับของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปแบบ (x,y,z) โดยมีนิยามการบวกเวกเตอร์และการ

คูณ

เวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$

และ $k(x,y,z)=(0,0,0)$

1.3 เซตของคู่อันดับของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปแบบ $(x,0)$ กับนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณ

เวกเตอร์

ด้วยสเกลาร์บน $\mathbb{R}^2$

1.4 เซตของคู่อันดับของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปแบบ (x,y) โดยที่ $x\geq 0$ กับนิยามการบวกเวกเตอร์

และ

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์บน $\mathbb{R}^2$

1.5 เซตของคู่อันดับของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปแบบ (x,y) โดยมีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณ

เวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$(x,y)+(x',y')=(x+x'+1,y+y'+1)$

และ $k(x,y)=(kx,ky)$

1.6 เซตของคู่อันดับของจำนวนจริงที่อยู่ในรูปแบบ (x,y) โดยมีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณ

เวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$(x,y)+(x',y')=(x+x'+1,y+y'+1)$

และ$k(x,y)=(x,ky)$

1.7 เซตของเมทริกซ์ 2×2 ที่อยู่ในรูปแบบ $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}$ กับนิยามการบวกและการคูณเมทริกซ์

ตามปกติ

1.8 เซตของเมทริกซ์ 2×2 ที่อยู่ในรูปแบบ $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ กับนิยามการบวกและการคูณเมทริกซ์

ตามปกติ

1.9 เซตของฟังก์ชันค่าจริง f บนจำนวนจริงซึ่ง $f(1)=0$ โดยมีนิยามการบวกเวกเตอร์และการคูณ

เวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ดังนี้

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

และ $(k\,f)(x)=kf(x)$

1.10 เซตของเมทริกซ์ 2×2 ที่อยู่ในรูปแบบ $\begin{bmatrix} a & a+b \\ a+b & b \end{bmatrix}$ กับนิยามการบวกและการคูณเมท

ริกซ์

ตามปกติ

2. จงพิจารณาว่า W ในข้อใดต่อไปนี้เป็นปริภูมิย่อยของ $\mathbb{R}^3$

2.1 $W=\{(0,y,z)|y,z\in\mathbb{R}\}$

2.2 $W=\{(x,y,z)|x,y,z\in\mathbb{R}\ ;\ x+y+z=1\}$

2.3 $W=\{(a,a,2a)|a\in\mathbb{R}\}$

2.4 $W=\{(a,0,0)|a\in\mathbb{R}\}$

2.5 $W=\{(a,1,1)|a\in\mathbb{R}\}$

2.6 $W=\{(a,b,c)|a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\ b=a+c\}$

2.7 $W=\{(a,b,c)|a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\ b=a+c+1\}$

3. จงพิจารณาว่า W ในข้อใดต่อไปนี้เป็นปริภูมิย่อยของ $M_{2\times 2}$

3.1 $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \ a,b,c,d\in\mathbb{Z}\right\}$ ($\mathbb{Z}$ คือเซตของจำนวนเต็ม)

3.2 $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| \ a+b=0\right\}$

4. จงพิจารณาว่า W ในข้อใดต่อไปนี้เป็นปริภูมิย่อยของ P_3

4.1 $W=\{a_0+a_1x+a_2x+a_3x^3 \mid a_0=0\}$

4.2 $W=\{a_0+a_1x+a_2x+a_3x^3 \mid a_0+a_1+a_2+a_3=0\}$

4.3 $W=\{a_0+a_1x+a_2x+a_3x^3 \mid a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R}\}$

4.4 $W=\left\{a_0+a_1x \mid a_0,a_1\in\mathbb{R}\right\}$

5. จงหาว่า $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}4 & -2\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ เป็นการรวมเชิงเส้นของข้อใดบ้างจากข้อ 5.1-5.4

5.1 $\begin{bmatrix}6 & 3\\ 0 & 8\end{bmatrix}$ 5.2 $\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 5 & 1\end{bmatrix}$

5.3 $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 5.4 $\begin{bmatrix}6 & -1\\ -8 & -8\end{bmatrix}$

6. จงหาว่าเวกเตอร์ $(1,-1,3)$ และ $(2,4,0)$ เป็นการรวมเชิงเส้นของข้อใดบ้างจากข้อ 6.1-6.4

6.1 $(3,3,3)$ 6.2 $(4,2,6)$

6.3 $(1,5,6)$ 6.4 $(0,0,0)$

7. จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดต่อไปนี้แผ่ทั่ว $\mathbb{R}^3$

7.1 $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,1,-1)\}$ 7.2 $\{(1,2,3),(0,1,1)\}$

7.3 $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(1,1,1)\}$ 7.4 $\{(1,1,1),(2,2,0),(3,0,0)\}$

7.5 $\{(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)\}$ 7.6 $\{(3,1,4),(2,-3,5),(5,-2,9),(1,4,-1)\}$

7.7 $\{(1,3,3),(1,3,4),(1,4,3),(6,2,1)\}$ 7.8 $\{(2,2,2),(0,0,3),(0,1,1)\}$

7.9 $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$ 7.10 $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(3,6,6)\}$

8. จงพิจารณาว่าเซตในข้อใดต่อไปนี้แผ่ทั่ว P_2

8.1 $\{1+2x-x^2, 3+x^2, 5+4x-x^2, -2+2x-2x^2\}$

8.2 $\{t^2+1, t+2\}$

8.3 $\{2+3x-4x^2, -8-12x+16x^2\}$

9. ให้ $S=\{(0,1,1),(0,2,-1)\}, T=\{(0,1,2),(0,2,3),(0,3,1)\}$ และ $W=\{(0,b,c)\mid b,c\in\mathbb{R}\}$ จงแสดงว่า

9.1 S แผ่ทั่ว W 9.2 T แผ่ทั่ว W

10 จงพิจารณาว่า เซตของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

10.1 $\{(2,-1,4),(3,6,2),(2,10,-4)\}$ 10.2 $\{(3,1,1),(2,-1,5),(4,0,-3)\}$

10.3 $\{(6,0,-1),(1,1,4)\}$ 10.4 $\{(1,3,3),(0,1,4),(5,6,3),(7,2,-1)\}$

10.5 $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(3,6,6)\}$ 10.6 $\{(2,0,0),(0,2,0),(0,0,2)\}$

10.7 $\{(-1,6,-12),(1/3,-2,4)\}$ 10.8 $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(0,0,0)\}$

10.9 $\{(1,-2,3),(2,-2,0),(0,1,7)\}$ 10.10 $\{(1,2,-3),(1,-3,2),(2,-1,5)\}$

11. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^4$ ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

11.1 $\{(1,2,1,-2),(0,-2,-2,0),(0,2,3,1),(3,0,-3,6)\}$

11.2 $\{(4,-4,8,0),(2,2,4,0),(6,0,0,2),(6,3,-3,0)\}$

11.3 $\{(4,4,0,0),(0,0,6,6),(-5,0,5,5)\}$

11.4 $\{(3,0,4,1),(6,2,-1,2),(-1,3,5,1),(-3,7,8,3)\}$

11.5 $\{(1,2,3,4),(4,3,2,1)\}$

11.6 $\{(1,3,-1,4),(3,8,-5,7),(2,9,4,23)\}$

11.7 $\{(1,2,5,-1),(7,-1,5,8),(2,-1,0,3)\}$

11.8 $\{(-1,2,3,-4),(-5,10,15,-20)\}$

12. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน P_2 ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

12.1 $\{2-x+4x^2, 3+6x+2x^2, 2+10x-4x^2\}$

12.2 $\{3+x+x^2, 2-x+5x^2, 4-3x^2\}$

12.3 $\{6-x^2, 1+x+4x^2\}$

12.4 $\{1+3x+3x^2, x+4x^2, 5+6x+3x^2, 7+2x-x^2\}$

12.5 $\{t^2+1, t-2, t+3\}$

12.6 $\{t^2+3, t, 2t^2+t\}$

12.7 $\{3t^2+t-5, 2t^2+t+1, t+13\}$

12.8 $\{2+x+x^2, x+2x^2, 2+2x+3x^2\}$

13. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน P_3 ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

13.1 $\{t^3+4t^2+2t+3, t^3+2t^2+4t-1, 2t^3-t^2-3t+5\}$

13.2 $\{t^3-5t^2-2t+3, t^3-4t^2-3t+4, 2t^3-7t^2-7t+9\}$

14. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน $M_{2\times2}$ ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

14.1 $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0 & 3\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & 6\\8 & 6\end{bmatrix}\right\}$

14.2 $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 3\\1 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\right\}$

14.3 $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$

14.4 $\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & -1\\2 & 2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -5\\-4 & 0\end{bmatrix}\right\}$

15. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ใน $M_{2\times3}$ ที่กำหนดให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

15.1 $\left\{\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\2 & 4 & -1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & -1 & 4\\4 & 5 & -2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & -8 & 7\\2 & 10 & -1\end{bmatrix}\right\}$

15.2 $\left\{\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\3 & -2 & 4\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1 & 1 & -3\\-2 & 0 & 5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4 & -1 & 2\\1 & -2 & 3\end{bmatrix}\right\}$

16. จงพิจารณาว่าเซตของเวกเตอร์ของฟังก์ชันค่าจริงแบบต่อเนื่องข้อใดต่อไปนี้ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น

16.1 $\{\cos t, \sin t, t\}$

16.2 $\{t, e^t, \sin t\}$

16.3 $\{t, e^t, t^2\}$

16.4 $\{2, 4\sin^2 x, \cos^2 x\}$

16.5 $\{x, \cos x\}$

16.6 $\{1, \sin x, \sin 2x\}$

16.7 $\{\cos 2x, \sin^2 x, \cos^2 x\}$

16.8 $\{(1+x)^2, x^2+2x, 3\}$

16.9 $\{0, x, x^2\}$

ผลเฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 3

1. 1.1 ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 8

   1.2 ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 10

   1.3 เป็นปริภูมิเวกเตอร์

   1.4 ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 5 และ 6

   1.5 ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 8

   1.6 ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 8

   1.7 ไม่เป็นปริภูมิเวกเตอร์ เพราะขาดสมบัติข้อ 1,4,5 และ 6

   1.8 เป็นปริภูมิเวกเตอร์

   1.9 เป็นปริภูมิเวกเตอร์

   1.10 เป็นปริภูมิเวกเตอร์

2. 2.2, 2.3, 2.4, 2.6
3. 3.2
4. 4.1, 4.2, 4.4
5. 5.1, 5.3, 5.4
6. 6.1, 6.2, 6.4
7. 7.1, 7.3, 7.4, 7.7, 7.8, 7.9, 7.10
8. 8.3

10. 10.4, 10.5, 10.7, 10.8
11. 11.6, 11.7, 11.8
12. 12.4, 12.7, 12.8
13. 13.2
14. 14.1, 14.4
15. 15.1
16. 16.4, 16.7, 16.8, 16.9