บทที่ 6

ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

มีปัญหาทางวิทยาศาสตร์และคณิตศาสตร์อยู่หลายปัญหา เมื่อกำหนดตัวดำเนินการเชิงเส้น (Linear Operator) $T:V \to V$ แล้วต้องการหาสเกลาร์ λ โดยที่สอดคล้องกับสมการ $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ มีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ หรือเมื่อกำหนด A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n แล้วต้องการหาสเกลาร์ λ ทั้งหมด และเวกเตอร์ $\underline{v}$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ทั้งหมดที่ซึ่ง $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ ดังนั้น ในบทนี้จะศึกษาการหา λ และ $\underline{v}$ ดังกล่าวข้างต้น ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์กับการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ได้ นอกจากนี้ ในบทนี้จะกล่าวถึงเมทริกซ์คล้าย การทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยมุม และการแปลงเชิงเส้นที่ทำให้เมทริกซ์ทแยงมุมได้ ดังรายละเอียดต่อไปนี้

6.1 ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ (Eigenvalue and Eigenvector)

ให้ V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $T:V \to V$ เป็นการแปลงเชิงเส้น ในที่นี้จะศึกษาสมบัติประการหนึ่งของการแปลงเชิงเส้น T โดยต้องการหาเวกเตอร์ $\underline{v} \in V$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ และทำให้ $T(\underline{v})$ เป็นผลคูณ
สเกลาร์ของ $\underline{v}$ นั่นคือ จะมีสเกลาร์ λ ที่ทำให้ $T(\underline{v}) = \lambda\underline{v}$ เรียกสเกลาร์ λ ว่า **ค่าลักษณะเฉพาะ** (Eigenvalue) และ $\underline{v}$ ว่า **เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ** (Eigenvector) ที่สมนัยกับ λ

ถ้า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์ที่มีมิติจำกัดและ $\dim(V) = n$ แล้วสามารถแทนการแปลงเชิงเส้น T ด้วยเมทริกซ์จัตุรัสที่มีมิติ $n \times n$ ดังนั้น การหาค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T ดังกล่าว จึงเหมือนกับการหาค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จัตุรัสนั้น

นิยาม 6.1 กำหนด A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ สเกลาร์ λ จะเรียกว่า **ค่าลักษณะเฉพาะ**ของ A ที่สมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $\underline{v}$ ถ้ามีเวกเตอร์ $\underline{v}$ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิเวกเตอร์ $\mathbb{R}^n$ ที่ทำให้ $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$ เวกเตอร์ $\underline{v}$ เรียกว่า **เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ**ของ A ที่สมนัยกับ λ

<u>ตัวอย่าง 6.1</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\lambda = 2$ จงแสดงว่า $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

<u>พิสูจน์</u> เนื่องจาก $A\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

เมื่อ $\lambda = 2$ จะได้ $\lambda\underline{v} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

จะได้ว่า $\lambda = 2$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A และ $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

สำหรับ $\lambda = 2$

จากตัวอย่าง 6.1 ถ้าให้ $\underline{v} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วจะได้ว่า

$$A\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2a \end{bmatrix}$$

และ $\lambda\underline{v} = 2\underline{v} = 2\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ 2a \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$

นั่นคือ λ เป็นค่าลักษณะเฉพะเพียงค่าเดียวของ A ที่สมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $\underline{v}$
หรือกล่าวคือ สำหรับค่าลักษณะเฉพาะหนึ่งค่า จะมีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะได้หลายเวกเตอร์

ตัวอย่าง 6.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ และ $\underline{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ จงตรวจสอบว่า $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $A\underline{v} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\underline{v}$

นั่นคือ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 4

ตัวอย่าง 6.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}, \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}, \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ จงตรวจสอบว่า $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $A\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \neq \lambda\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix}$

และ $A\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1)\underline{v}_2$

นั่นคือ $\underline{v}_1$ ไม่เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A
แต่ $\underline{v}_2$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1

ตัวอย่าง 6.4 ให้ $A = I_n$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ถ้า $\underline{v}$ ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ในปริภูมิเวกเตอร์ $M_{n\times 1}$ จงตรวจสอบว่า $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $A\underline{v} = I_n\underline{v} = \underline{v} = 1\underline{v}$

นั่นคือ $\underline{v}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1

การคำนวณหาค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ เมื่อกำหนดเพียงเมทริกซ์จัตุรัสมิติ

n

หรือการแปลงเชิงเส้นเพียงอย่างเดียว สามารถหาได้โดยพิจารณาจากสมการ

$$
\begin{aligned}
&AX = \lambda X \\
&aX = \lambda I_n X \\
&AX - \lambda I_n X = \underline{0} \\
&(A - \lambda I_n)X = \underline{0}
\end{aligned}
$$

จะเห็นว่า ระบบสมการเป็นสมการแบบเอกพันธุ์ที่ผลเฉลยไม่เป็นศูนย์ โดยทฤษฎีบทต่อไป จะได้ว่า ระบบสมการ $(A - \lambda I_n)X = \underline{0}$ มีผลเฉลยมากมายก็ต่อเมื่อ $\det(A - \lambda I_n) = 0$

ทฤษฎีบท 6.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ จะได้สเกลาร์ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A ก็ต่อเมื่อ $\det(A - \lambda I_n) = 0$

พิสูจน์ $(\Rightarrow)$ ให้ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์จัตุรัส A แล้วจะได้ว่ามีเวกเตอร์ $\underline{v} \neq \underline{0}$ ที่

$$A\underline{v} = \lambda\underline{v} \qquad \text{.....................(6.1)}$$

หรือ

$$(A - \lambda I_n)\underline{v} = \underline{0} \qquad \text{.....................(6.2)}$$

จาก (6.2) จะได้ว่า $\underline{v}$ เป็นผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ของระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A - \lambda I_n)X = \underline{0}$ และเนื่องจากระบบสมการมีจำนวนสมการเท่ากับจำนวนตัวแปร

ดังนั้น $\det(A - \lambda I_n) = 0$

$(\Leftarrow)$ ถ้า $\det(A - \lambda I_n) = 0$ แล้วระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A - \lambda I_n)X = \underline{0}$ จะมีผลเฉลยมากมายที่ไม่เป็นศูนย์

นั่นคือ λ จะเป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A

นิยาม 6.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ และ λ เป็นสเกลาร์ใด ๆ จะเรียก $\det(A - \lambda I_n)$ ซึ่งเป็นพหุนามใน λ ว่า **พหุนามลักษณะเฉพาะ** (Characteristic Polynomial) เรียกสมการ $\det(A - \lambda I_n) = 0$ ว่า **สมการลักษณะเฉพาะ** (Characteristic Equation) และเรียกรากของสมการนี้ว่า **ค่าลักษณะเฉพาะ** (Eigenvalue) ของเมทริกซ์ A

ตัวอย่าง 6.5 ให้ $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ จงหาพหุนามลักษณะเฉพาะ สมการลักษณะเฉพาะ และค่าลักษณะเฉพาะของ

เมทริกซ์ A

วิธีทำ เนื่องจาก $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 2 & -\lambda\end{vmatrix}\\ &= \lambda^2-3\lambda-4\end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda^2-3\lambda-4$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda^2-3\lambda-4=0$ หรือ $(\lambda-4)(\lambda+1)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda=-1$ หรือ 4

ถ้ากำหนด $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$ จะได้ว่าพหุนามลักษณะเฉพาะ $\det(A-\lambda I_n)$ ของ A อยู่ในรูปพหุนามระดับขั้น n กล่าวคือ

$$\det(A-\lambda I_n)=\begin{bmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{bmatrix}$$

หรือ $$\det(A-\lambda I_n)=(-1)^n\left[\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0\right] \qquad \text{………………..(6.3)}$$

และสมการลักษณะเฉพาะอยู่ในรูป

$$\det(A-\lambda I_n)=0$$

หรือ $$(-1)^n\left[\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0\right]=0 \qquad \text{………………..(6.4)}$$

การหาผลเฉลยของสมการ (6.4) เป็นการหาค่าลักษณะเฉพาะของ λ (เป็นจำนวนเชิงซ้อนได้)

จำนวน n ผลเฉลยซึ่งสามารถซ้ำกันได้ โดยสมมติ $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ เป็นผลเฉลยที่แตกต่างกัน และเป็นผลเฉลยซ้ำ $r_1,r_2,\ldots,r_m$ ครั้ง ตามลำดับ จะได้ว่าสมการ (6.4) เขียนใหม่ได้เป็น

$$\det(A-\lambda I_n)=(\lambda-\lambda_1)^{r_1}(\lambda-\lambda_2)^{r_2}\ldots(\lambda-\lambda_m)^{r_m}=0$$

โดยที่ $r_1+r_2+\cdots+r_m=n$

ข้อสังเกต ถ้าพิจารณาค่า λ ที่เป็นจำนวนจริง ผลเฉลยของสมการ (6.4) อาจจะน้อยกว่า n ผลเฉลย เพราะอาจจะมีผลเฉลยบางผลเฉลยที่ไม่เป็นจำนวนจริง

ขั้นตอนการหาค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

1. หาพหุนามลักษณะเฉพาะของ A คือ $\det(A-\lambda I_n)$

2. แก้สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $\det(A-\lambda I_n)=0$ เพื่อหาค่าลักษณะเฉพาะ λ ของ A สมมติมีค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกัน คือ $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m$

3. หาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับ λ_i โดยการหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-\lambda I_n)X=\underline{0}$ สำหรับ $i=1,2,\dots,m$

ตัวอย่าง 6.6 ให้ $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ จงหาพหุนามลักษณะเฉพาะ สมการลักษณะเฉพาะ ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

วิธีทำ เนื่องจาก $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_2) &= \begin{vmatrix}2-\lambda & 3\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (2-\lambda)(4-\lambda)-3\\ &= \lambda^2-6\lambda+5\end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda^2-6\lambda+5$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda^2-6\lambda+5=0$ หรือ $(\lambda-5)(\lambda-1)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda=1,5$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(1)I_2)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=1$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}2-1 & 3\\ 1 & 4-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

หรือ $$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1+3x_2=0$

หรือ $x_1=-3x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X=\begin{bmatrix}-3t\\ t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-3\\ 1\end{bmatrix}$$ โดยที่ $t\neq 0$

สุดท้ายจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(5)I_2)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=5$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}2-5 & 3\\1 & 4-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $$\begin{bmatrix}-3 & 3\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1-x_2=0$

หรือ $x_1=x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X=\begin{bmatrix}t\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t\neq 0$$

<u>ตัวอย่าง 6.7</u> ให้ $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\1 & 0 & -2\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ จงหาพหุนามลักษณะเฉพาะ สมการลักษณะเฉพาะ ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\1 & 0 & -2\\0 & 0 & -2\end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3)&=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 4\\1 & -\lambda & -2\\0 & 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}\\&=(-1)^{3+3}(-2-\lambda)(\lambda^2-1)\\&=(-2-\lambda)(\lambda^2-1)\\&=(-2-\lambda)(\lambda^2-1^2)\\&=(-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)\end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะ คือ $(-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $(-2-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda=-2,-1,1$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -2 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(-2)I_3)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = -2$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} -(-2) & 1 & 4 \\ 1 & -(-2) & -2 \\ 0 & 0 & -2-(-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 10/3 \\ 0 & 1 & -8/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์สุดท้าย จะได้ $x_1 + \frac{10}{3}x_3 = 0$

$$x_2 - \frac{8}{3}x_3 = 0$$

นั่นคือ $x_1 = -\frac{10}{3}x_3$

$$x_2 = \frac{8}{3}x_3$$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -2 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3}t \\ \frac{8}{3}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

ในทำนองเดียวกัน เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

ตัวอย่าง 6.8 ให้ $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ จงหาพหุนามลักษณะเฉพาะ สมการลักษณะเฉพาะ ค่าลักษณะเฉพาะและเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

วิธีทำ เนื่องจาก $A=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3}(5-\lambda)((3-\lambda)^2-2^2) \\ &= (5-\lambda)(3-\lambda+2)(3-\lambda-2) \\ &= (5-\lambda)(5-\lambda)(1-\lambda) \\ &= (5-\lambda)^2(1-\lambda)\end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะ คือ $(5-\lambda)^2(1-\lambda)$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $(5-\lambda)^2(1-\lambda)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda=1,5,5$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(1)I_3)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=1$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

จากเมทริกซ์สุดท้าย จะได้ $2x_1+2x_2=0$

$$4x_3=0$$

นั่นคือ $x_1=x_2$

$x_3=0$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ โดยที่ $t \neq 0$

สุดท้ายจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(5)I_3)X = \underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = 5$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 3-5 & -2 & 0 \\ -2 & 3-5 & 0 \\ 0 & 0 & 5-5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $$\begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $-2x_1 - 2x_2 = 0$

หรือ $x_1 = -x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} s \\ -s \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -s \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ โดยที่ $s, t \neq 0$

<u>ตัวอย่าง 6.9</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาพหุนามลักษณะเฉพาะ สมการลักษณะเฉพาะ ค่าลักษณะเฉพาะ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{3+3}(-1-\lambda)(1-\lambda)^2 \\ &= (-1-\lambda)(1-\lambda)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะ คือ $(-1-\lambda)(1-\lambda)^2$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $(-1-\lambda)(1-\lambda)^2 = 0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda = -1,1,1$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(-1)I_3)X = \underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = -1$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 1-(-1) & 0 & 1 \\ 2 & 1-(-1) & 1 \\ 0 & 0 & -1-(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1 = -\frac{x_3}{2}$

$x_2 = 0$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{t}{2} \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

ในทำนองเดียวกัน เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

ตัวอย่าง 6.10 ให้ $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ จงหาพหุนามลักษณะเฉพาะของ A และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ

A

ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะแต่ละค่า พร้อมทั้งหาฐานหลักของปริภูมิลักษณะเฉพาะแต่ละปริภูมิ

วิธีทำ เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}-4-\lambda & -3\\ 3 & 6-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(-4-\lambda)(6-\lambda)+9$$
$$=\lambda^2-2\lambda-15$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda^2-2\lambda-15$

สมการลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda^2-2\lambda-15=0$ หรือ $(\lambda+3)(\lambda-5)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะ คือ $\lambda=-3,5$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -3 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(-3)I_2)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=-3$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}-4+3 & -3\\ 3 & 6+3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $$\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 3 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

นั่นคือ $-x_1-3x_2=0$

หรือ $x_1=-3x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -3 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X=\begin{bmatrix}t\\-3t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t\neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -3 คือ

$$E_{-3}=\left\{t\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\middle|\, t\in\mathbb{R}-\ 0\ \right\}$$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_{-3} คือ $\left\{\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}\right\}$

สุดท้ายจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(5)I_2)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=5$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}-4-5 & -3\\ 3 & 6-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $$\begin{bmatrix}-9 & -3\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

นั่นคือ $3x_1 + x_2 = 0$

หรือ $x_2 = -3x_1$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} t \\ -3t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 คือ

$$E_5 = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} - 0 \right\}$$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_5 คือ $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}\right\}$

ทฤษฎีบท 6.2 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$ และสมมติ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A ซึ่งแตกต่างกันทั้งหมดที่สมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_m$ ตามลำดับ จะได้ว่า $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_m$ เป็นอิสระเชิงเส้น

พิสูจน์ เมื่อ $m = 1$ ทฤษฎีบทเป็นจริง เพราะ $c_1\underline{v}_1 = \underline{0}$

เมื่อ $m \geq 2$ จะพิสูจน์โดยใช้อุปนัยทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

ถ้า $m = 2$ สมมติ c_1, c_2 เป็นสเกลาร์ ที่ทำให้

$$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 = \underline{0} \qquad \text{………………..(6.5)}$$

คูณสมการ (6.5) ด้วย A จะได้

$$Ac_1\underline{v}_1 + Ac_2\underline{v}_2 = A\underline{0}$$

หรือ $$c_1A\underline{v}_1 + c_2A\underline{v}_2 = \underline{0}$$

หรือ $$c_1\lambda_1\underline{v}_1 + c_2\lambda_2\underline{v}_2 = \underline{0} \qquad \text{………………..(6.6)}$$

คูณสมการ (6.5) ด้วย λ_1 จะได้

$$c_1\lambda_1\underline{v}_1 + c_2\lambda_1\underline{v}_2 = \underline{0} \qquad \text{………………..(6.7)}$$

สมการ (6.6) – (6.7) จะได้

$$\begin{aligned} (c_1\lambda_1\underline{v}_1 + c_2\lambda_2\underline{v}_2) - (c_1\lambda_1\underline{v}_1 + c_2\lambda_1\underline{v}_2) &= \underline{0} \\ (c_1\lambda_1\underline{v}_1 - c_1\lambda_1\underline{v}_1) + (c_2\lambda_2\underline{v}_2 - c_2\lambda_1\underline{v}_2) &= \underline{0} \\ c_2\lambda_2\underline{v}_2 - c_2\lambda_1\underline{v}_2 &= \underline{0} \\ c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\underline{v}_2 &= \underline{0} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\underline{v}_2 \neq 0$ และ $\lambda_1 \neq \lambda_2$

ดังนั้น $c_2 = 0$

แทน $c_2 = 0$ ในสมการ (6.5) จะได้ $c_1 = 0$

แสดงว่า $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ เป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ ทฤษฎีบทเป็นจริง เมื่อ $m = 2$

ต่อไป สมมติทฤษฎีบทเป็นจริง เมื่อ $m = k$

จะต้องพิสูจน์ว่า ทฤษฎีบทเป็นจริง เมื่อ $m = k+1$

ให้ $c_1, c_2, ..., c_k, c_{k+1}$ เป็นสเกลาร์ ที่ทำให้

$$c_1\underline{v}_1 + c_2\underline{v}_2 + \cdots + c_k\underline{v}_k + c_{k+1}\underline{v}_{k+1} = \underline{0} \qquad \text{……………….(6.8)}$$

คูณสมการ (6.8) ด้วย A จะได้

$$Ac_1\underline{v}_1 + Ac_2\underline{v}_2 + \cdots + Ac_k\underline{v}_k + Ac_{k+1}\underline{v}_{k+1} = A\underline{0}$$

หรือ $c_1A\underline{v}_1 + c_2A\underline{v}_2 + \cdots + c_kA\underline{v}_k + c_{k+1}A\underline{v}_{k+1} = \underline{0}$

หรือ $c_1\lambda_1\underline{v}_1 + c_2\lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_k\underline{v}_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}\underline{v}_{k+1} = \underline{0}$ ……………….(6.9)

คูณสมการ (6.8) ด้วย λ_{k+1} จะได้

$$c_1\lambda_{k+1}\underline{v}_1 + c_2\lambda_{k+1}\underline{v}_2 + \cdots + c_k\lambda_{k+1}\underline{v}_k + c_{k+1}\lambda_{k+1}\underline{v}_{k+1} = \underline{0} \qquad \text{……………….(6.10)}$$

สมการ (6.9) - (6.10) จะได้ว่า

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{k+1})\underline{v}_1 + c_2(\lambda_2 - \lambda_{k+1})\underline{v}_2 + \cdots + c_k(\lambda_k - \lambda_{k+1})\underline{v}_k + c_{k+1}(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})\underline{v}_{k+1} = \underline{0}$$

เนื่องจาก ทฤษฎีบทเป็นจริง เมื่อ $m = k$

ดังนั้น $c_i(\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., k$

เนื่องจาก $\lambda_i \neq \lambda_{k+1}$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., k$

ดังนั้น $\lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$ สำหรับ $i = 1, 2, ..., k$

ฉะนั้น $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$

แทน $c_1 = c_2 = ... = c_k = 0$ ในสมการ (6.8) จะได้

$$c_{k+1} = 0$$

แสดงว่า $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_m$ เป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ ทฤษฎีบทนี้เป็นจริง เมื่อ $m = k+1$

ทฤษฎีบท 6.3 ถ้า A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยม แล้วค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ สมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักของ A

พิสูจน์ ให้ A เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (ล่าง) มิติ $n \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

จะได้ $\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda)$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdots(a_{nn} - \lambda) = 0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{nn}$ ซึ่งเป็นสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักของ A

ตัวอย่าง 6.11 จงหาค่าลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์สามเหลี่ยมต่อไปนี้

1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

3) $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีบท 6.3 จะได้ว่า

1) ค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ 2,4,6 และ 1

2) ค่าลักษณะเฉพาะของ B คือ 2,-3 และ 5

3) ค่าลักษณะเฉพาะของ C คือ a_{11}, a_{22}, a_{33} และ a_{44}

นิยาม 6.3 ให้ $T: V \to V$ เป็นการแปลงเชิงเส้น λ เป็นสเกลาร์ใด ๆ จะเรียก λ ว่า **ค่าลักษณะเฉพาะของการแปลงเชิงเส้น** T ถ้ามีเวกเตอร์ $X \neq \underline{0}$ ที่ทำให้ $T(X) = \lambda X$ และเรียกเวกเตอร์ X นี้ว่า **เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ** T **ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ** λ

ตัวอย่าง 6.12 ให้ $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ โดย $T(x,y) = (x+y, 4x+y)$ จงหาค่าลักษณะเฉพาะของการแปลงเชิงเส้น T และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะนั้น

วิธีทำ ให้ $B = (1,0),(0,1)$ เป็นฐานหลักมาตรฐานของ $\mathbb{R}^2$

และเนื่องจาก $T(x,y)=(x+y,4x+y)$

จะได้ $T(1,0)=(1,4)=1(1,0)+4(0,1)$

และ $T(0,1)=(1,1)=1(1,0)+1(0,1)$

นั่นคือ $\left[T(1,0)\right]_B=\left[(1,4)\right]_B=\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$

และ $\left[T(0,1)\right]_B=\left[(1,1)\right]_B=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$

ฉะนั้น เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T เทียบกับฐานหลัก B คือ

$$A={}_BT_B=\left[T\right]_B=\begin{bmatrix}1&1\\4&1\end{bmatrix}$$

จะได้ $\det(A-\lambda I_2)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1\\4&1-\lambda\end{vmatrix}$

$$\begin{aligned}&=(1-\lambda)^2-4\\&=\lambda^2-2\lambda+1-4\\&=\lambda^2-2\lambda-3\\&=(\lambda+1)(\lambda-3)\end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $(\lambda+1)(\lambda-3)$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(\lambda+1)(\lambda-3)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะของ T คือ $\lambda=-1,3$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(-1)I_3)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=-1$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}1-\lambda&1\\4&1-\lambda\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

นั่นคือ $2x_1+x_2=0$

หรือ $x_2=-2x_1$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X=\begin{bmatrix}t\\-2t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$ โดยที่ $t\neq 0$

ในทำนองเดียวกัน เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 3 คือ เวกเตอร์

ที่อยู่ในรูป

$$X=\begin{bmatrix}t\\2t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t\neq 0$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่าง 6.12 เนื่องจาก $T(x,y)=(x+y,4x+y)$

จะได้ $T(t,-2t)=(t-2t,4t-2t)$

$$=(-t,2t)$$
$$=-1(t,-2t)$$

นั่นคือ $\left[T(t,-2t)\right]_B=\left[(-t,2t)\right]_B=t(-1)\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}=t^*\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$

โดยที่ $t\neq 0$ และ $t^*=-t$

และ $T(t,2t)=(t+2t,4t+2t)$

$$=(3t,6t)$$
$$=3(t,2t)$$

นั่นคือ $\left[T(t,2t)\right]_B=\left[(3t,6t)\right]_B=t(3)\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=t^*\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$

โดยที่ $t\neq 0$ และ $t^*=3t$

กล่าวคือ ค่าลักษณะเฉพาะของการแปลงเชิงเส้น T คือ ค่าลักษณะเฉพาะของ $\left[T\right]_B$ และถ้า λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของการแปลงเชิงเส้น T และผลเฉลยของสมการ $\left[T\right]_B-\lambda I_n \ X=\underline{0}$ ก็คือ เวกเตอร์ลักษณะ

เฉพาะ T เทียบกับฐานหลัก B

<u>ตัวอย่าง 6.13</u> จงหาค่าลักษณะเฉพาะของการแปลงเชิงเส้น $T:M_{3\times1}\to M_{3\times1}$ นิยามโดย

$$T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x_1\\2x_1-x_2-x_3\\-x_3\end{bmatrix}$$

และจงหามิติของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ E_λ โดยที่ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่ซ้ำกัน

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $T\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-x_1\\2x_1-x_2-x_3\\-x_3\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}-1&0&0\\2&-1&-1\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

จะได้ เมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น T เมื่อเทียบกับฐานหลักมาตรฐานของ $M_{3\times1}$ คือ

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

ดังนั้น ค่าลักษณะเฉพาะของ T สามารถหาได้จากค่าลักษณะเฉพาะของ A ดังนี้

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix}-1-\lambda & 0 & 0\\ 2 & -1-\lambda & -1\\ 0 & 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (-1-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1-\lambda & -1\\ 0 & -1-\lambda\end{vmatrix}\\ &= (-1-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda)\\ &= (-1-\lambda)^3\\ &= -(1+\lambda)^3\end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $-(1+\lambda)^3$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(1+\lambda)^3=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda=-1,-1,-1$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 ซึ่งเป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A ที่ซ้ำกัน 3 ครั้ง โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(-1)I_3)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=-1$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}-1-(-1) & 0 & 0\\ 2 & -1-(-1) & -1\\ 0 & 0 & -1-(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

นั่นคือ $x_1-\frac{1}{2}x_3=0$

หรือ $2x_1=x_3$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X=\begin{bmatrix}s\\ t\\ 2s\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix} \text{ โดยที่ } s,t\neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ

$$E_{-1} = \left\{ s\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

เนื่องจาก $\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_{-1} คือ $\left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \right\}$

นั่นคือ $\dim(E_{-1}) = 2$

6.2 เมทริกซ์คล้ายและการทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม (Similar Matrices and Diagonalization)

นิยาม 6.4 เมทริกซ์จัตุรัส A และ B ซึ่งมีมิติเดียวกัน เป็นเมทริกซ์คล้ายก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน P ซึ่งทำให้ $B = P^{-1}AP$ หรือ $PB = AP$

สมการ $B = P^{-1}AP$ อาจเขียนอีกแบบหนึ่ง คือ $A = PBP^{-1}$ หรือ $A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}$ หรือถ้าให้ $Q = P^{-1}$ แล้ว $A = Q^{-1}BQ$ นั่นคือ B เป็นเมทริกซ์คล้ายกับ A ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์คล้ายกับ B หรืออาจกล่าวว่า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย

ตัวอย่างเช่น 1) $A = \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix}4 & -2\\5 & -3\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์คล้าย

เนื่องจากมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$ ซึ่งทำให้ได้

$$PB = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\5 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$$

และ $AP = \begin{bmatrix}2 & 1\\0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -1\\1 & -1\end{bmatrix}$

นั่นคือ $PB = AP$ หรือ $B = P^{-1}AP$

2) $A = \begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\1 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 2\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์คล้าย

เนื่องจากมีเมทริกซ์ไม่เอกฐาน $P = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\-1 & 1 & 1\\1 & 0 & -1\end{bmatrix}$ ซึ่งทำให้ได้

$$PB=\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&1&3\\1&0&-1\end{bmatrix}$$

และ $AP=\begin{bmatrix}2&0&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&3\\-1&1&3\\1&0&-1\end{bmatrix}$

นั่นคือ $PB=AP$ หรือ $B=P^{-1}AP$

จากตัวอย่างข้างต้น จะเห็นว่า เราหลีกเลี่ยงการหา P^{-1} โดยแสดงว่า $PB=AP$ แทนการแสดงว่า $B=P^{-1}AP$

ทฤษฎีบท 6.4 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้ายที่มีมิติ $n\times n$ แล้ว A และ B จะมีพหุนามลักษณะเฉพาะเหมือนกัน ดังนั้น A และ B จะมีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

พิสูจน์ เนื่องจาก A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย

ดังนั้น จะมีเมทริกซ์ P ที่มีมิติ $n\times n$ และมีตัวผกผันสำหรับการคูณ P^{-1} ที่ทำให้ $B=P^{-1}AP$

จะได้ว่า $\det(B-\lambda I_n)=\det(P^{-1}AP-\lambda I_n)$

$$\begin{aligned}&=\det(P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda I_n)P)\\&=\det(P^{-1}(A-\lambda I_n)P)\\&=\det P^{-1}\det(A-\lambda I_n)\det P\\&=\frac{1}{\det P}\det(A-\lambda I_n)\det P\\&=\det(A-\lambda I_n)\end{aligned}$$

นั่นคือ A และ B มีพหุนามลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

ฉะนั้น สมการลักษณะเฉพาะ $\det(A-\lambda I_n)=0$ และ $\det(B-\lambda I_n)=0$ เป็นสมการเดียวกัน แสดงว่า A และ B มีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

ตัวอย่าง 6.14 กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}-6&-3&-25\\2&1&8\\2&2&7\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$ และ $P=\begin{bmatrix}2&4&3\\0&1&-1\\3&5&7\end{bmatrix}$

จงแสดงว่า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย โดย $PA=BP$ และ P เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ และ A กับ B จะมีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

วิธีทำ พิจารณา $|P|=\begin{vmatrix}2&4&3\\0&1&-1\\3&5&7\end{vmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 5 & 7\end{vmatrix} + 3(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}\\
&= 2(7+5)+3(-4-3)\\
&= 3 \neq 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น P จะหาตัวผกผันสำหรับการคูณได้

เนื่องจาก $PA = \begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6 & -3 & -25\\ 2 & 1 & 8\\ 2 & 2 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 10 & 14\end{bmatrix}$

และ $BP = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 5 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 4 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 10 & 14\end{bmatrix}$

แสดงว่า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย เพราะ $PA = BP$

สุดท้าย จะแสดงว่า A กับ B มีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

เนื่องจาก $\det(A-\lambda I_3) = \begin{vmatrix}-6-\lambda & -3 & -25\\ 2 & 1-\lambda & 8\\ 2 & 2 & 7-\lambda\end{vmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= (-6-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1-\lambda & 8\\ 2 & 7-\lambda\end{vmatrix} + (-3)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 8\\ 2 & 7-\lambda\end{vmatrix}\\
&\quad + (-25)(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 1-\lambda\\ 2 & 2\end{vmatrix}\\
&= (-6-\lambda)(\lambda^2-8\lambda-9)+3(-2\lambda-2)-25(2+2\lambda)\\
&= -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2\\
&= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)
\end{aligned}
$$

จะได้ สมการลักษณะเฉพาะของ A คือ $(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$

โดยที่ค่าลักษณะเฉพาะของ A คือ $\lambda = -1,1,2$

และเนื่องจาก $\det(B-\lambda I_3) = \begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}$

$$
\begin{aligned}
&= (1-\lambda)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1-\lambda & 0\\ 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}\\
&= (1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)
\end{aligned}
$$

จะได้ สมการลักษณะเฉพาะของ B คือ $(1-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะของ B คือ $\lambda = -1,1,2$

นั่นคือ A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย และมีค่าลักษณะเฉพาะเหมือนกัน

นิยาม 6.5 เมทริกซ์จัตุรัส A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้ (Diagonalizable Matrix) ก็ต่อเมื่อมีเมทริกซ์ทแยงมุม D ที่ทำให้ A คล้ายกับ D

<u>ตัวอย่าง 6.15</u> กำหนด $A = \begin{bmatrix} -6 & -3 & -25 \\ 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ จงแสดงว่า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

<u>วิธีทำ</u> จากตัวอย่าง 6.14 จะได้ว่า A และ B เป็นเมทริกซ์คล้าย

และเนื่องจาก B เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ดังนั้น A จะเป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

ข้อสังเกต ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ แล้ว A จะคล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม D ซึ่งมีสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลักเป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A

ทฤษฎีบท 6.5 ถ้า $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_k$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกัน คือ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ ตามลำดับ แล้ว $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_k$ เป็นอิสระเชิงเส้น

พิสูจน์ ให้ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_k$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกัน คือ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ ตามลำดับ

สมมติ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_k$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ให้ r เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด ซึ่งทำให้ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_r$ เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

ดังนั้น $1 \le r < k$ และ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_r, \underline{v}_{r+1}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

นั่นคือ มี $\underline{c}_1, \underline{c}_2, ..., \underline{c}_{r+1}$ เป็นสเกลาร์ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ที่ทำให้

$$\underline{c}_1\underline{v}_1 + \underline{c}_2\underline{v}_2 + \cdots + \underline{c}_{r+1}\underline{v}_{r+1} = \underline{0} \qquad \text{..................(6.11)}$$

คูณสมการ (6.11) ด้วย λ_{r+1} จะได้

$$\underline{c}_1\lambda_{r+1}\underline{v}_1 + \underline{c}_2\lambda_{r+1}\underline{v}_2 + \cdots + \underline{c}_{r+1}\lambda_{r+1}\underline{v}_{r+1} = \underline{0} \qquad \text{..................(6.12)}$$

คูณสมการ (6.11) ด้วย A จะได้

$$\underline{c}_1A\underline{v}_1 + \underline{c}_2A\underline{v}_2 + \cdots + \underline{c}_{r+1}A\underline{v}_{r+1} = \underline{0}$$

แต่ $A\underline{v}_1 = \lambda_1\underline{v}_1, A\underline{v}_2 = \lambda_2\underline{v}_2, ..., A\underline{v}_{r+1} = \lambda_{r+1}\underline{v}_{r+1}$

จะได้ว่า $\underline{c}_1\lambda_1\underline{v}_1 + \underline{c}_2\lambda_2\underline{v}_2 + \cdots + \underline{c}_{r+1}\lambda_{r+1}\underline{v}_{r+1} = \underline{0}$ ....(6.13)

สมการ (6.13) - (6.12) จะได้

$$\underline{c}_1(\lambda_1 - \lambda_{r+1})\underline{v}_1 + \underline{c}_2(\lambda_2 - \lambda_{r+1})\underline{v}_2 + \cdots + \underline{c}_r(\lambda_r - \lambda_{r+1})\underline{v}_r = \underline{0}$$

หรือ $(\lambda_1-\lambda_{r+1})\underset{\sim}{c_1}\underset{\sim}{v_1}+(\lambda_2-\lambda_{r+1})\underset{\sim}{c_2}\underset{\sim}{v_2}+\cdots+(\lambda_r-\lambda_{r+1})\underset{\sim}{c_r}\underset{\sim}{v_r}=\underline{0}$

เนื่องจาก $\underset{\sim}{v_1},\underset{\sim}{v_2},...,\underset{\sim}{v_r}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น $(\lambda_1-\lambda_{r+1})\underset{\sim}{c_1}=(\lambda_2-\lambda_{r+1})\underset{\sim}{c_2}=...=(\lambda_r-\lambda_{r+1})\underset{\sim}{c_r}=\underline{0}$

แต่ $\underset{\sim}{v_1},\underset{\sim}{v_2},...,\underset{\sim}{v_{r+1}}$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A ที่แตกต่างกัน

จะได้ว่า $\lambda_1-\lambda_{r+1}\neq 0,\lambda_2-\lambda_{r+1}\neq 0,...,\lambda_r-\lambda_{r+1}\neq \underline{0}$

นั่นคือ $\underset{\sim}{c_1}=\underset{\sim}{c_2}=...=\underset{\sim}{c_r}=0$

แทนค่า $\underset{\sim}{c_1}=\underset{\sim}{c_2}=...=\underset{\sim}{c_r}=0$ ในสมการ (6.11) จะได้

$$c_{r+1}\underset{\sim}{v_{r+1}}=\underline{0}$$

แต่ $\underset{\sim}{v_{r+1}}\neq\underline{0}$ เพราะ $\underset{\sim}{v_{r+1}}$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

ดังนั้น $c_{r+1}=\underline{0}$

ฉะนั้น $\underset{\sim}{c_1}=\underset{\sim}{c_2}=...=\underset{\sim}{c_{r+1}}=0$ ซึ่งขัดแย้งกับที่ให้ $\underset{\sim}{c_1},\underset{\sim}{c_2},...,\underset{\sim}{c_{r+1}}$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ทำให้ขัดแย้งกับที่สมมติให้ $\underset{\sim}{v_1},\underset{\sim}{v_2},...,\underset{\sim}{v_k}$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

สรุปได้ว่า $\underset{\sim}{v_1},\underset{\sim}{v_2},...,\underset{\sim}{v_k}$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 6.6 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n แล้ว แต่ละข้อต่อไปนี้สมมูลกัน

1. A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้
2. A มีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะจำนวน n เวกเตอร์ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะเหล่านี้จะเป็นอิสระเชิงเส้น

พิสูจน์ จะพิสูจน์ $1\rightarrow 2$

ให้ A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้ จะมีเมทริกซ์ P ที่มีตัวผกผันสำหรับการคูณ

สมมติ $P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$

และ $P^{-1}AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

ให้ $D=P^{-1}AP$ ซึ่ง

$$D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

ฉะนั้น $AP=PD$

นั่นคือ $AP = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

ถ้าให้ $\underline{p}_1, \underline{p}_2, ..., \underline{p}_n$ แทนเวกเตอร์หลักของ P แล้วจะได้ว่า AP จะมีเวกเตอร์หลักเป็น $\lambda_1\underline{p}_1, \lambda_2\underline{p}_2, ..., \lambda_n\underline{p}_n$ หรือเวกเตอร์หลักของ AP คือ $A\underline{p}_1, A\underline{p}_2, ..., A\underline{p}_n$

ดังนั้น $A\underline{p}_1 = \lambda_1\underline{p}_1, A\underline{p}_2 = \lambda_2\underline{p}_2, ..., A\underline{p}_n = \lambda_n\underline{p}_n$ ……………….(6.14)

เนื่องจาก P หาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ เวกเตอร์หลักของ P ทั้งหมดจะไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์

ฉะนั้น จากสมการ (6.14) จะได้ว่า $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A และ $\underline{p}_1, \underline{p}_2, ..., \underline{p}_n$ เป็นเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ เมื่อ P หาตัวผกผันสำหรับการคูณได้ $\underline{p}_1, \underline{p}_2, ..., \underline{p}_n$ จะเป็นอิสระเชิงเส้น

นั่นคือ A จะมีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ n เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้น

สุดท้าย จะพิสูจน์ $2 \rightarrow 1$

ให้ A มีเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ n เวกเตอร์ คือ $\underline{p}_1, \underline{p}_2, ..., \underline{p}_n$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้น และมีค่าลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ตามลำดับ

สมมติ $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีเวกเตอร์หลักเป็น $\underline{p}_1, \underline{p}_2, ..., \underline{p}_n$ จะได้เวกเตอร์หลักของผลคูณของ AP เป็น $A\underline{p}_1, A\underline{p}_2, ..., A\underline{p}_n$

แต่ $A\underline{p}_1 = \lambda_1\underline{p}_1, A\underline{p}_2 = \lambda_2\underline{p}_2, ..., A\underline{p}_n = \lambda_n\underline{p}_n$

ฉะนั้น $AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$= PD$$

โดยที่ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มีคาลักษณะเฉพาะ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ เป็นสมาชิกในทแยงมุมหลัก

เนื่องจากเวกเตอร์หลักของ P เป็นเวกเตอร์อิสระเชิงเส้น P จะหาตัวผกผันสำหรับการคูณได้

ดังนั้น สามารถเขียน $AP = PD$ ใหม่เป็น $P^{-1}AP = D$

นั่นคือ A สามารถทำให้เป็นทแยงมุมได้ เพราะ A คล้ายกับเมทริกซ์ทแยงมุม D

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 6.6 จะนำมาซึ่งวิธีการทำเมทริกซ์จัตุรัส A มิติ n ให้เป็นทแยงมุมได้ โดยมีขั้นตอนดังนี้

1. หาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ n เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นของ A สมมติคือ $\underline{p}_1, \underline{p}_2, ..., \underline{p}_n$
2. สร้างเมทริกซ์ P จากการนำเวกเตอร์ $\underline{p}_1, \underline{p}_2, ..., \underline{p}_n$ มาเป็นเวกเตอร์หลักของ P
3. เมทริกซ์ $P^{-1}AP$ จะเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมที่มี $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ เป็นสมาชิกในทแยงมุมหลัก เมื่อ λ_i เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ $\underline{p}_i ; i = 1,2,...,n$

<u>ตัวอย่าง 6.16</u> จงหาเมทริกซ์ P ที่ทำให้เมทริกซ์ A ทำให้เป็นทแยงมุมได้ เมื่อกำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 6.6 ได้ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 1,5$ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะคือ $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 และ 5 ตามลำดับ

ให้ $\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นของ A

ดังนั้น $P = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้

โดยที่ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

ข้อสังเกต ในการแปลงเมทริกซ์ A เพื่อให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม เราสามารถหาเมทริกซ์ P เพื่อทำให้ $P^{-1}AP$ เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้มากกว่า 1 เมทริกซ์ เช่น ถ้าเราสลับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะในการหาเมทริกซ์ P แล้วเมทริกซ์ $P^{-1}AP$ จะถูกสลับค่าลักษณะเฉพาะตามที่สลับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ

กล่าวคือ

เมทริกซ์ที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้จะแตกต่างไปตามเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่นำมาสร้างเมทริกซ์ P

จากตัวอย่าง 6.16 ถ้าเราสลับเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะในการหาเมทริกซ์ P โดยให้

$$\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $P = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้

เพราะว่า $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ -1/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

หรือถ้าเราเปลี่ยนเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ใหม่ เป็น $\begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 และ 5 ตามลำดับ และกำหนดให้ $\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 2 \end{bmatrix}$

ดังนั้น จะเป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้

เพราะว่า $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/8 & 3/8 \\ -1/8 & 1/8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 6.17 จงหาเมทริกซ์ P ที่ทำให้เมทริกซ์ A ทำให้เป็นทแยงมุมได้ เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\det(A-\lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)((3-\lambda)^2-(-2)^2) \\
&= (5-\lambda)(9-6\lambda+\lambda^2-4) \\
&= (5-\lambda)(\lambda^2-6\lambda+5) \\
&= (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $(5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1)$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-1)=0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 1,5,5$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 โดยแก้ระบบสมการเชิง

เส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(1)I_3)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = 1$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 3-1 & -2 & 0 \\ -2 & 3-1 & 0 \\ 0 & 0 & 5-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $2x_1 - 2x_2 = 0$

และ $4x_3 = 0$

หรือ $x_1 = x_2$

และ $x_3 = 0$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix} t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ

$$E_1 = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} - \ 0 \right\}$$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_1 คือ $\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 โดยแก้ระบบสมการเชิง

เส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(5)I_3)X = \underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = 5$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}3-5 & -2 & 0\\ -2 & 3-5 & 0\\ 0 & 0 & 5-5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

นั่นคือ $-2x_1 - 2x_2 = 0$

หรือ $x_1 = -x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X = \begin{bmatrix}-s\\s\\t\end{bmatrix} = s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \text{ โดยที่ } s,t \neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 5 คือ

$$E_5 = \left\{ s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \middle| s,t \in \mathbb{R} - 0 \right\}$$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_5 คือ $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

ให้ $\underline{p}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}, \underline{p}_2 = \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \underline{p}_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นของ A

ดังนั้น $P = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ จะเป็นเมทริกซ์ที่ทำให้ A ทำเป็นทแยงมุมได้

โดยที่ $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

ตัวอย่าง 6.18 จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ ทำให้เป็นทแยงมุมได้หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_2) &= \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3-\lambda)(1-\lambda) + 4 \\ &= \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ &= (\lambda+1)^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $(\lambda+1)^2$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(\lambda+1)^2 = 0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = -1, -1$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 โดยแก้ระบบสมการเชิง

เส้นแบบเอกพันธุ์ $(A - (-1)I_2)X = \underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = -1$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} -3-(-1) & 2 \\ -2 & 1-(-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $-2x_1 + 2x_2 = 0$

หรือ $x_1 = x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$X = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ โดยที่ $t \neq 0$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ

$$E_{-1} = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} - 0 \right\}$$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_1 คือ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

แต่ค่าลักษณะเฉพาะ -1 มี 2 ค่า ดังนั้น เราต้องเลือกเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ 2 เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน แต่เรามาสามารถหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะใดที่อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นได้

นั่นคือ P ที่ได้จะเป็นเมทริกซ์เอกฐานซึ่งไม่มี P^{-1}

ฉะนั้น A ไม่สามารถทำให้เป็นทแยงมุมได้

<u>ตัวอย่าง 6.19</u> จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ทำให้เป็นทแยงมุมได้หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

จากตัวอย่าง 6.9 ได้ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = -1,1,1$ และเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะคือ $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ที่สมนัยกับค่าลักษระเฉพาะ -1 และ 1 ตามลำดับ

แต่ค่าลักษณะเฉพาะ 1 มี 2 ค่า ดังนั้น เราต้องเลือกเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะ 2 เวกเตอร์ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน แต่เราไม่สามารถหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะใดที่อยู่ในรูป $\begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นได้

นั่นคือ P ที่ได้จะเป็นเมทริกซ์เอกฐานซึ่งไม่มี P^{-1}

ฉะนั้น A ไม่สามารถทำให้เป็นทแยงมุมได้

ทฤษฎีบท 6.7 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n และมีค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกัน n จำนวน แล้ว A จะเป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

พิสูจน์ ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n

และสมมติ $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดที่สมนัยกับเวกเตอร์ลักษณะ

เฉพาะ $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ ตามลำดับ

จากทฤษฎีบท 6.5 จะได้ว่า $\underline{v}_1, \underline{v}_2, ..., \underline{v}_n$ เป็นอิสระเชิงเส้น

และจากทฤษฎีบท 6.6 จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

ตัวอย่าง 6.20 จงพิจารณาว่าเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ทำให้เป็นทแยงมุมได้หรือไม่

วิธีทำ ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$= (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 1, 2, 3$

นั่นคือ A มีค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดจำนวน 3 ตัว

และจากทฤษฎีบท 6.7 จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

ข้อสังเกต บทกลับของทฤษฎีบท 6.7 ไม่จริงเสมอไป นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n ที่สามารถทำเป็นทแยงมุมได้นั้น เมทริกซ์ A จะมีค่าลักษณะเฉพาะ n ตัวที่แตกต่างกันหรือไม่ก็ได้

ตัวอย่างเช่น ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

$= (2-\lambda)^2$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $(2-\lambda)^2$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(2-\lambda)^2 = 0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 2, 2$

หรือ $\lambda = 2$ เป็นค่าลักษณะเฉพาะเพียงตัวเดียวของ A

โดยการแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A - (2)I_2)X = \underline{0}$ จะได้เวกเตอร์ลักษณะ

เฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 ดังนี้

สำหรับ $\lambda = 2$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 2-2 & 0 \\ 0 & 2-2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$X = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ โดยที่ $s, t \neq 0$

กล่าวคือ เมทริกซ์ A ทำเป็นทแยงมุมได้ โดยให้ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$

จะได้ว่า $P^{-1}AP = I_2 A I_2 = A$

<u>ตัวอย่าง 6.21</u> กำหนด $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

1) จงแสดงว่า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

2) จงหา P ที่หาตัวผกผันสำหรับการคูณได้และทำให้ $P^{-1}AP = D$ โดยที่ D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

<u>วิธีทำ</u> 1) เนื่องจาก $\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$$\begin{aligned} &= (4-\lambda)(3-\lambda) - 6 \\ &= \lambda^2 - 7\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda - 6) \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $(\lambda-1)(\lambda-6)$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $(\lambda-1)(\lambda-6) = 0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = 1, 6$

นั่นคือ A มีค่าลักษณะเฉพาะที่แตกต่างกันทั้งหมดจำนวน 2 ตัว

และจากทฤษฎีบท 6.7 จะได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

2) จะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 โดยแก้ระบบสมการเชิง

เส้นแบบเอกพันธุ์ $(A - (1)I_2)X = \underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = 1$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 4-1 & 2 \\ 3 & 3-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $3x_1 + 2x_2 = 0$

หรือ $x_1 = -\frac{2}{3}x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ใน

รูป

$$X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 1 คือ

$$E_1 = \left\{ t\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} - \ 0 \right\}$$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_1 คือ $\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ต่อไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 6 โดยแก้ระบบ

สมการ

เชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(6)I_2)X = \underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda = 6$ กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} 4-6 & 2 \\ 3 & 3-6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $-2x_1 + 2x_2 = 0$

หรือ $x_1 = x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 6 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ใน

รูป

$$X = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } t \neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 6 คือ

$$E_6 = \left\{ t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} - 0 \right\}$$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_6 คือ $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

ให้ $\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นของ A

ในที่นี้ $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

เพราะว่า $AP = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

และ $PD = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 6 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $P = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ จะมีตัวผกผันสำหรับการคูณ ที่ทำให้ $P^{-1}AP = D$ หรือ $AP = PD$

โดยที่

D เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม

6.3 การแปลงเชิงเส้นที่ทำให้เมทริกซ์ทแยงมุมได้ (Diagonalization of Linear Tranformation)

การแปลงเชิงเส้นที่ทำให้เมทริกซ์ทแยงมุมได้ คือ การทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมของการแปลงเชิงเส้น โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับเมทริกซ์ของการแปลงเชิงเส้น

กำหนด C เป็นฟีลด์ของจำนวนเชิงซ้อน และกำหนดการแปลงเชิงเส้น $T : M_{n\times 1} \to M_{n\times 1}$ นิยามโดย

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

หรือ $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ เมื่อ $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ของ T เทียบกับฐานหลักมาตรฐานของ $M_{n\times 1}$ การนิยามการทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ของการแปลงเชิงเส้น T จะนิยามโดยเมทริกซ์ A ดังนี้

นิยาม 6.5 กำหนด C เป็นฟีลด์ของจำนวนเชิงซ้อน และกำหนดการแปลงเชิงเส้น $T: M_{n\times 1} \to M_{n\times 1}$ นิยามโดย $T(\underline{x}) = A\underline{x}$ เมื่อ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ จะเรียก T ว่าเป็นการแปลงเชิงเส้นที่ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้ ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

<u>ตัวอย่าง 6.22</u> กำหนดการแปลงเชิงเส้น $T: M_{3\times 1} \to M_{3\times 1}$ โดย $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x_1 + 9x_2 \\ -6x_1 - 7x_2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 \end{bmatrix}$

T เป็นการแปลงเชิงเส้นที่ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้หรือไม่ ถ้าได้ จงหาฐานหลักของ $M_{3\times 1}$ ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก
$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 8x_1 + 9x_2 \\ -6x_1 - 7x_2 \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า เมทริกซ์ของ T เทียบกับฐานหลักมาตรฐานของ $M_{3\times 1}$ คือ

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ต่อไปจะตรวจสอบว่า A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้หรือไม่

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & 9 & 0 \\ -6 & -7-\lambda & 0 \\ 3 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-1-\lambda)(-1)^{3+3}((8-\lambda)(-7-\lambda) - 9(-6)) \\ &= (-1-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) \\ &= (-1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2) \\ &= -(\lambda+1)^2(\lambda-2) \end{aligned}$$

ดังนั้น พหุนามลักษณะเฉพาะคือ $-(\lambda+1)^2(\lambda-2)$

สมการลักษณะเฉพาะคือ $-(\lambda+1)^2(\lambda-2) = 0$

และ ค่าลักษณะเฉพาะคือ $\lambda = -1, -1, 2$

ถัดไปจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 โดยแก้ระบบสมการเชิง

เส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(-1)I_3)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=-1$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}8-(-1) & 9 & 0\\ -6 & -7-(-1) & 0\\ 3 & 3 & -1-(-1)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix}9 & 9 & 0\\ -6 & -6 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

นั่นคือ $x_1+x_2=0$

หรือ $x_1=-x_2$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$$X=\begin{bmatrix}-s\\s\\t\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \text{ โดยที่ } s,t\neq 0$$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ -1 คือ

$$E_{-1}=\left\{s\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\middle| s,t\in\mathbb{R}-\ 0\right\}$$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_{-1} คือ $\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$

สุดท้ายจะหาเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 โดยแก้ระบบสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ $(A-(2)I_3)X=\underline{0}$ กล่าวคือ

สำหรับ $\lambda=2$ กำหนดให้ $X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix}8-(2) & 9 & 0\\ -6 & -7-(2) & 0\\ 3 & 3 & -1-(2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

หรือ $\begin{bmatrix} 6 & 9 & 0 \\ -6 & -9 & 0 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

จากเมทริกซ์สุดท้าย จะได้ $x_1 - 3x_3 = 0$

$x_2 + 2x_3 = 0$

นั่นคือ $x_1 = 3x_3$

$x_2 = -2x_3$

ดังนั้น เวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 คือ เวกเตอร์ที่อยู่ในรูป

$X = \begin{bmatrix} 3t \\ -2t \\ t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ โดยที่ $t \neq 0$

หรือปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับค่าลักษณะเฉพาะ 2 คือ

$E_2 = \left\{ t\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} - 0 \right\}$

ฉะนั้น ฐานหลักของปริภูมิ E_2 คือ $\left\{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

ให้ $\underline{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \underline{p}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

จะได้ว่า $P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

และ $\det P = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-1)^{3+2}(2-3)$
$= 1 \neq 0$

นั่นคือ $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3$ เป็นอิสระเชิงเส้น

และเนื่องจาก $\dim(M_{3\times 1}) = 3$

ดังนั้น $\underline{p}_1, \underline{p}_2, \underline{p}_3$ เป็นฐานหลักของ $M_{3\times 1}$ ซึ่งประกอบด้วยเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ A

พิจารณา $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 9 & 0 \\ -6 & -7 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

นั่นคือ A เป็นเมทริกซ์ที่ทำให้เป็นทแยงมุมได้

จากนิยาม 6.5 จะได้ว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นที่ทำให้เป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

แบบฝึกหัดบทที่ 6

1. จงหาสมการลักษณะเฉพาะ ค่าลักษณะเฉพาะ และฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ

เมทริกซ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1.1 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ 1.2 $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

1.3 $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ 1.4 $\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

1.5 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 1.6 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.7 $\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ 1.8 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.9 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 1/5 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ 1.10 $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 19 & 5 & -4 \end{bmatrix}$

1.11 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$ 1.12 $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1.13 $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 1.14 $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

1.15 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 1.16 $\begin{bmatrix} 10 & 9 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. ให้ $T: M_{2\times2} \to M_{2\times2}$ นิยามโดย $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}$ จงหา

2.1 ค่าลักษณะเฉพาะของ T

2.2 ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T

3. กำหนด $T: P_2 \to P_2$ นิยามโดย $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (5a_0 + 6a_1 + 2a_2) - (a_1 + 8a_2)x + (a_0 - 2a_2)x^2$

3.1 ค่าลักษณะเฉพาะของ T

3.2 ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของ T

4. จงแสดงว่าเมทริกซ์ในข้อ 4.1 – 4.4 ไม่สามารถทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

4.1 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 4.2 $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

4.3 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 4.4 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ -4 & 13 & -1 \end{bmatrix}$

5. จงหาเมทริกซ์ P ที่ทำให้เมทริกซ์ A ที่กำหนดในข้อ 5.1 – 5.4 เป็นเมทริกซ์ทแยงมุม และจงหา $P^{-1}AP$

5.1 $A = \begin{bmatrix} -14 & 12 \\ -20 & 17 \end{bmatrix}$ 5.2 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

5.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ 5.4 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6. ในข้อ 6.1 – 6.8 จงหาว่าเมทริกซ์ A สามารถทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้หรือไม่ ถ้าได้ จงหาเมทริกซ์ P

และ $P^{-1}AP$

6.1 $A=\begin{bmatrix}19 & -9 & -6\\ 25 & -11 & -9\\ 17 & -9 & -4\end{bmatrix}$ 6.2 $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{bmatrix}$

6.3 $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 1 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}$ 6.4 $A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$

6.5 $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ 6.6 $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$

6.7 $A=\begin{bmatrix}4 & 0 & 0\\ 1 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$ 6.8 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 5 & -4 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

7. ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n และมีเมทริกซ์ P ซึ่งมีเมทริกซ์ตัวผกผันสำหรับการคูณมิติ $n\times n$ จงพิสูจน์ว่า

7.1 $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}A^2P$

7.2 $(P^{-1}AP)^k = P^{-1}A^kP$; k เป็นจำนวนเต็มบวก

8. จงหามิติของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะของเมทริกซ์ต่อไปนี้

8.1 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ 8.2 $\begin{bmatrix}\frac{7}{25} & 0 & \frac{24}{25}\\ 0 & -1 & 0\\ -\frac{24}{25} & 0 & \frac{7}{25}\end{bmatrix}$

8.3 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$ 8.4 $\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}$

8.5 $\begin{bmatrix}4 & 4 & 0 & 0\\ 4 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ 8.6 $\begin{bmatrix}\frac{10}{3} & -\frac{4}{3} & 0 & -\frac{4}{3}\\ -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & -2 & 0\\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{5}{3}\end{bmatrix}$

9. ในข้อ 9.1 – 9.8 จงหาเมทริกซ์ P ที่ทำให้เมทริกซ์ A ทำให้เป็นทแยงมุมได้ และจงหา $P^{-1}AP$

9.1 $A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

9.2 $A=\begin{bmatrix}5 & 3\sqrt{3}\\ 3\sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$

9.3 $A=\begin{bmatrix}-7 & 24\\ 24 & 7\end{bmatrix}$

9.4 $A=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -36\\ 0 & -3 & 0\\ -36 & 0 & -23\end{bmatrix}$

9.5 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

9.6 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{bmatrix}$

9.7 $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

9.8 $A=\begin{bmatrix}5 & -2 & 0 & 0\\ -2 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 2\end{bmatrix}$

10. ให้ λ เป็นค่าลักษณะเฉพาะของ A จงพิสูจน์ว่า มิติของปริภูมิลักษณะเฉพาะของ A ที่สมนัยกับ λ จะน้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนครั้งที่ซ้ำกันของ λ

11. ในเซตของจำนวนเชิงซ้อน จงพิสูจน์ว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $n\times n$ แล้วผลบวกของค่าลักษณะเฉพาะของ A เท่ากับผลบวกของสมาชิกบนทแยงมุมหลักของ A

ผลเฉลยแบบฝึกหัดบทที่ 6

1. 1.1 $\lambda^2-2\lambda-3=0;\lambda=3,\lambda=-1$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=3$ คือ $\begin{bmatrix}1/2\\ 1\end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=-1$ คือ $\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$

1.2 $\lambda^2-8\lambda+16=0;\lambda=4$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=4$ คือ $\begin{bmatrix}3/2\\ 1\end{bmatrix}$

1.3 $\lambda^2-12=0;\lambda=\sqrt{12},\lambda=-\sqrt{12}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=\sqrt{12}$ คือ $\begin{bmatrix}\sqrt{3}/12\\1\end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=-\sqrt{12}$ คือ $\begin{bmatrix}-\sqrt{3}/12\\1\end{bmatrix}$

1.4 $\lambda^2+3=0;\lambda$ ไม่เป็นจำนวนจริง

1.5 $\lambda^2=0;\lambda=0$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สอดคล้องกับ $\lambda=0$ คือ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

1.6 $\lambda^2-2\lambda+1=0;\lambda=1$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=1$ คือ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$

1.7 $(\lambda+3)^2=0;\lambda=-3$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=-3$ คือ $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$

1.8 $\lambda^3-6\lambda^2+11\lambda-6=0;\lambda=1,\lambda=2,\lambda=3$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=1$ คือ $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=2$ คือ $\begin{bmatrix}1/2\\1\\1\end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=3$ คือ $\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}$

1.9 $\lambda^3-2\lambda=0;\lambda=0,\lambda=\sqrt{2},\lambda=-\sqrt{2}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=0$ คือ $\begin{bmatrix}5/3\\1/3\\1\end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda=\sqrt{2}$ คือ $\begin{bmatrix}\frac{1}{7}(15+5\sqrt{2})\\\frac{1}{7}(-1+2\sqrt{2})\\1\end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = -\sqrt{2}$ คือ $\begin{bmatrix} \frac{1}{7}(15-5\sqrt{2}) \\ \frac{1}{7}(-1-2\sqrt{2}) \\ 1 \end{bmatrix}$

1.10 $\lambda^3 + 8\lambda^2 + \lambda + 8 = 0; \lambda = -8$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = -8$ คือ $\begin{bmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.11 $\lambda^3 - \lambda^2 - \lambda - 2 = 0; \lambda = 2$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 2$ คือ $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.12 $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0; \lambda = 2$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 2$ คือ $\begin{bmatrix} -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.13 $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 15\lambda + 36 = 0; \lambda = -4, \lambda = 3$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = -4$ คือ $\begin{bmatrix} -2 \\ 8/3 \\ 1 \end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 3$ คือ $\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.14 $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 21\lambda - 10 = 0; \lambda = 1, \lambda = 1, \lambda = 10$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 1$ คือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 10$ คือ $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

1.15 $(\lambda - 1)^2(\lambda + 2)(\lambda + 1) = 0; \lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 1$ คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = -2$ คือ $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = -1$ คือ $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

1.16 $(\lambda - 4)^2(\lambda^2 + 3) = 0; \lambda = 4$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 4$ คือ $\begin{bmatrix} 3/2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2. 2.1 $\lambda = 1, \lambda = -2, \lambda = -1$

2.2 ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 1$ คือ $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = -2$ คือ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = -1$ คือ $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

3. 3.1 $\lambda = 3, \lambda = -4$

3.2 ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = 3$ คือ $5 - 2x - x^2$

ฐานหลักของปริภูมิของเวกเตอร์ลักษณะเฉพาะที่สมนัยกับ $\lambda = -4$ คือ $-6 + 8x + 3x^2$

5. 5.1 $P = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{4} \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

5.2 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

5.3 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5.4 $P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6. 6.1 A ไม่สามารถทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

6.2 $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6.3 A ไม่สามารถทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

6.4 $P = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.5 A ไม่สามารถทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

6.6 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

6.7 A ไม่สามารถทำเป็นเมทริกซ์ทแยงมุมได้

6.8 $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. 8.1 $\lambda = 0$: มิติเป็น 1 , $\lambda = 2$: มิติเป็น 1

8.2 $\lambda = 1$: มิติเป็น 1 , $\lambda = -1$: มิติเป็น 2

8.3 $\lambda = 3$: มิติเป็น 1 , $\lambda = 0$: มิติเป็น 2

8.4 $\lambda = 0$: มิติเป็น 1 , $\lambda = 6$: มิติเป็น 2

8.5 $\lambda = 0$: มิติเป็น 3 , $\lambda = 8$: มิติเป็น 1

8.6 $\lambda = -2$: มิติเป็น 3 , $\lambda = 4$: มิติเป็น 1

9. 9.1 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

9.2 $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$

9.3 $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & -25 \end{bmatrix}$

9.4 $P = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -50 \end{bmatrix}$

9.5 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9.6 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

9.7 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

9.8 $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$