บทที่ 2
พีชคณิตของเมทริกซ์

ในการวิเคราะห์ตัวแปรพหุจะมีตัวแปรที่นำมาวิเคราะห์จำนวนมาก ในการคำนวณค่าต่าง ๆ จึงต้องอาศัยพีชคณิตของเมทริกซ์มาช่วยในการคำนวณ เช่น การวิเคราะห์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ต้องใช้เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of matrix) เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix, I) และเมทริกซ์ผกผัน (Inverse of matrix) เป็นต้น ด้วยเหตุนี้ก่อนที่จะทำการรวิเคราะห์ตัวแปรพหุจึงต้องทำความเข้าใจกับพีชคณิตของเมทริกซ์เสียก่อน

เมทริกซ์ (Matrix)

นิยามที่ 1 เมทริกซ์ คือ กลุ่มของจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน ที่นำมาจัดเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า เป็นแถวตามแนวนอน (Horizontal) และแนวตั้ง (Vertical) ซึ่งจะเรียกแถวตามแนวนอนว่า แถว (Row) และตามแนวตั้งเรียกว่า หลัก (Column)

โดยทั่วไปจะนิยมใช้รูปต่อไปนี้แทน

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

และจะใช้สัญลักษณ์เป็น $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ หรือ $A_{m \times n}$ โดยที่ m แทน จำนวนแถว และ n แทน จำนวนหลัก

ถ้าเมทริกซ์ที่มี 1 แถว และ n หลัก จะเรียกว่า เมทริกซ์แถว เช่น $\begin{bmatrix} 6 & 4 & -9 \end{bmatrix}$

ถ้าเมทริกซ์ที่มี n แถว และ 1 หลัก จะเรียกว่า เมทริกซ์หลัก เช่น $\begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$

ชนิดของเมทริกซ์ (Type of Matrix)

1. เมทริกซ์จัตุรัส (Square Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวและจำนวนหลักเท่ากัน (m=n) หรือบางครั้งจะเรียกเมตริกซ์จัตุรัสว่าเมทริกซ์อันดับ n โดยจะมีรูปทั่วไปคือ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

ซึ่งสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่ง I = j จะเรียกว่า เส้นทแยงมุมหลัก

2. เมทริกซ์ทแยงมุม (Diagonal Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่มีสมาชิกทุกตัวที่ไม่ได้อยู่บนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเป็นศูนย์ทั้งหมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

3. เมทริกซ์ศูนย์ (Zero Matrix หรือ Null Matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์หมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{หรือ} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. เมทริกซ์เชิงสเกล่าร์ (Scalar Matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากันทั้งหมด หรือ ก็คือค่าคงที่นั่นเอง เช่น

$$\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix}$$

5. เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix หรือ Unit Matrix) คือ เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกทุกตัวบนเส้นทแยงมุมหลักมีค่าเท่ากับ 1 ใช้สัญลักษณ์ I หรือ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์อันดับ n เช่น

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ หรือ } I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6. เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transposed Matrix)

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ที่มี มิติ 3×3 ทรานสโพสของเมตริกซ์ A เกิดจากการเปลี่ยนที่จากแถวเป็นหลักของเมตริกซ์ A โดยจะใช้สัญลักษณ์ A^t แทน ทรานสโพสของเมทริกซ์ A

นั่นคือ $A = [a_{ij}]$ มีมิติ $m \times n$

$A^t = [a_{ji}]$ มีมิติ $n \times m$

ซึ่งเมทริกซ์สลับเปลี่ยนมีคุณสมบัติดังนี้

1. $(A+B)^t = A^t + B^t$
2. $(A^t)^t = A$
3. $(kA)^t = kA^t$
4. $(AB)^t = B^tA^t$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & 9 & -2 \\ 3 & 5 & -7 \\ -9 & 3 & 6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -8 \\ 4 & 3 & 9 \end{bmatrix}, B^t = \begin{bmatrix} 9 & 3 & -9 \\ 9 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 6 \end{bmatrix}, C^t = \begin{bmatrix} 3 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

7. เมทริกซ์สมมาตร (Symmetric Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่เมื่อสลับเปลี่ยน (transpose) แล้วจะได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ตัวเอง นั่นคือ $A = A^t$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ $A^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -6 \\ 5 & -6 & 7 \end{bmatrix}$ นั่นคือ $A = A^t$

8. เมทริกซ์เสมือนสมมาตร (Skew Symmetric Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสที่เมื่อสลับเปลี่ยน (transpose) แล้วจะได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัวมีเครื่องหมายตรงข้ามจากเดิม นั่นคือ $A = -A^t$

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^t = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -5 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

นั่นคือ $A = -A^t$

9. เมทริกซ์สามเหลี่ยมบนและเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Upper Triangular Matrix and Lower Triangular Matrix)

เมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (Upper Triangular Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่ใต้เส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

เมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (Lower Triangular Matrix) คือ เมทริกซ์จัตุรัสใด ๆ ที่มีสมาชิกทุกตัวที่อยู่เหนือเส้นทแยงมุมหลักเป็นศูนย์หมด เช่น

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ -6 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

พีชคณิตของเมทริกซ์ (Algebra of the Matrix)

1. ความเท่ากันของเมทริกซ์ (Equal Matrix)

เมทริกซ์ 2 เมทริกซ์จะเท่ากันได้ ก็ต่อเมื่อ เมทริกซ์นั้นจะต้องมีขนาดเท่ากัน และที่ตำแหน่งหรือลำดับในเมทริกซ์เดียวกันเท่ากัน

นิยามที่ 2 ถ้า $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{p\times q}$ จะได้ $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $m = p$ และ $n = q$ และ $a_{ij} = b_{ij}$ ทุกค่าของ i และ j

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่า ตัวแปร x, y ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & x \\ 2y & 10 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากตัวอย่างเป็นเมทริกซ์เท่ากัน ซึ่งจะมีคุณสมบัติคือ ที่ตำแหน่งเดียวกัน จะมีค่าเท่ากัน ดังนั้นจากสมการเมทริกซ์ทำให้เราหาค่า x , y ได้ดังนี้

$$x = 6$$

$$2y = 8$$

$$y = \frac{8}{2} = 4$$ จะได้ค่า $x = 6$ และ $y = 4$

2. การบวกลบเมทริกซ์ (Matrix Addition or Subtraction)

นิยามที่ 3 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

แล้ว $A \pm B = C$ โดยที่ $C = \left[c_{ij}\right]_{m\times n} = \left[a_{ij} \pm b_{ij}\right]_{m\times n}$

ซึ่งมีคุณสมบัติการบวก ดังนี้

1. $A + B = B + A$ (คุณสมบัติสลับที่ : Commutative law)
2. $A + (B+C) = (A + B) + C$ (คุณสมบัติเปลี่ยนกลุ่มได้ : Associative law)
3. $A + (-A) = (-A) + A = 0$ (อินเวอร์สการบวกของเมตริกซ์: Inverse law)
4. $A + 0 = A$ (เอกลักษณ์ของการบวก : Identity law)

ตัวอย่างที่ 3 ให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 8 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -5 \\ 2 & 9 & 13 \end{bmatrix}$

จงหา $C = A + B$ และ $D = A - B$

วิธีทำ

$$C = \begin{bmatrix} -3+6 & 4+4 & 8-5 \\ 6+2 & -5+9 & 11+13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 & 3 \\ 8 & 4 & 24 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -3-6 & 4-4 & 8-(-5) \\ 6-2 & -5-9 & 11-13 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -9 & 0 & 13 \\ 4 & -14 & -2 \end{bmatrix}$$

3. การคูณเมทริกซ์ (Matrix multiplication)

3.1 การคูณเมทริกซ์ด้วยสเกลาร์ (Scalar multiplication)

นิยามที่ 4 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ k เป็นสเกลาร์ ดังนั้น $kA = \left[ka_{ij}\right]_{m\times n}$ นั่นคือ เป็นการนำ k คูณกับสมาชิกทุกตัวในเมทริกซ์

เช่น

$$k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix}$$

ซึ่งจะมีคุณสมบัติการคูณสเกลาร์ ดังนี้

1. $k(A+B) = kA + kB$
2. $(k + k')A = kA + k'A$
3. $(kk')A = k(k'A)$
4. $1A = A$

ตัวอย่างที่ 4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ 3A

วิธีทำ

$$3A = 3\begin{bmatrix} 2 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\times 2 & 3\times 8 & 3\times -3 \\ 3\times 4 & 3\times -2 & 3\times 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 24 & -9 \\ 12 & -6 & 15 \end{bmatrix}$$

3.2 การคูณเมทริกซ์ด้วยเมทริกซ์ (Matrix multiplication)

นิยามที่ 4 ให้ $A = \left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B = \left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ แล้ว C = AB จะมีขนาดเท่ากับ $m\times p$ โดยที่ $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$

ซึ่งมีคุณสมบัติการคูณเมทริกซ์ ดังนี้

1. $(AB)C = A(BC)$ (Associative law)
2. $A(B+C) = AB + AC$ (Left Distributive law)
3. $(B+C)A = BA + CA$ (Right Distributive law)
4. $k(AB) = (kA)B = A(kB)$

ข้อสังเกต จากนิยามการคูณเมทริกซ์ AB จะคูณกันได้ก็ต่อเมื่อจำนวนหลักของเมทริกซ์ A จะต้องเท่ากับจำนวนแถวของเมทริกซ์ B

มิติของตัวตั้ง	มิติของตัวคูณ	มิติของผลคูณ
$m \times n$	$n \times p$	$m \times p$

หากต้องการหา c_{ij} ก็สามารถทำได้โดยการนำเอาแถวที่ i ของ A มาเขียนคู่กับหลักที่ j ของ B จากนั้นทำการคูณแบบตัวต่อตัวแล้วนำผลคูณมารวมกัน

ตัวอย่างที่ 5 จงหาผลคูณของเมทริกซ์ AB เมื่อ

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 7 & 3 & -4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ

$$AB=\begin{bmatrix} (1)(3)+(3)(5)+(5)(8) & (1)(0)+(3)(2)+(5)(4) \\ (0)(3)+(-1)(5)+(2)(8) & (0)(0)+(-1)(2)+(2)(4) \\ (7)(3)+(3)(5)+(-4)(8) & (7)(0)+(3)(2)+(-4)(4) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3+15+40 & 0+6+20 \\ 0-5+16 & 0-2+8 \\ 21+15-32 & 0+6-16 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 58 & 26 \\ 11 & 6 \\ 4 & -10 \end{bmatrix}$$

4. ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของเมทริกซ์

ดีเทอร์มิแนนท์ (Determinant) ของเมทริกซ์ คือ ค่าสเกลาร์ที่ได้จากเมทริกซ์จัตุรัส แทนด้วยสัญลักษณ์ det(A) หรือ $|A|$ ซึ่งวิธีการคำนวณหาค่าดีเทอร์มิแนนท์มีหลายวิธีดังนี้

4.1 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์โดยวิธีตรง (ในกรณีของเมทริกซ์ขนาดเล็ก) เช่น

การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด 1×1 , $\det(A) = |a_{11}| = a_{11}$

การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 (หาดีเทอร์มิแนนท์ได้ในกรณีของเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น) ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \det(A) = ad - cb$$

การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}$$

$$\det(A) = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - a_3b_2c_1 - b_3c_2a_1 - c_3a_2b_1$$

ซึ่งเมทริกซ์ที่มีขนาดมากกว่า 3×3 จะใช้วิธีการนี้ไม่ได้ ต้องใช้วิธีการกระจาย Cofactor เท่านั้น

4.2 การหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์โดยวิธีการกระจาย Cofactor

ในการหาค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์โดยวิธีการกระจาย Cofactor จะต้องอาศัยค่าไมเนอร์ และ โคแฟคเตอร์ จึงจะหาค่า det(A) ได้ ดังนั้นจะขอกล่าวถึงวิธีการหาค่า ไมเนอร์ และ โคแฟคเตอร์ก่อน ดังนี้

4.2.1 ไมเนอร์ (Minor) ของเมทริกซ์จัตุรัส A เมื่อขนาด $n \geq 2$ คือ ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริซ์ย่อยของเมทริกซ์ A ซึ่งตัดแถวที่ i และ คอลัมน์ที่ j ออก โดยใช้สัญลักษณ์ M_{ij} แทน ไมเนอร์ของ a_{ij} เช่น

ตัวอย่างที่ 6 จาก

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

ในการหาค่า M_{12} ต้องตัดแถวที่ 1 และ คอลัมน์ที่ 2 ออกจะได้

$$M_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{0} \\ 10 & \cancel{5} & 7 \\ 6 & \cancel{4} & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = (10)(9) - (6)(7) = 48$$

4.2.2 โคแฟคเตอร์ (Cofactor) ของเมทริกซ์จัตุรัส A เมื่อขนาด $n \geq 2$ จะได้นิยามจากค่าไมเนอร์ ดังนี้

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ดังนั้นจากตัวอย่างที่ 6 ถ้าต้องการหาค่าของ C_{12} และ C_{23} สามารถหาค่าได้ดังนี้

$$\begin{aligned} C_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} \\ &= (-1)^{3} M_{12} \\ &= -1(48) = -48 \end{aligned}$$

$$M_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 10 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (3)(4) - (6)(2) = 0$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1(0) = 0$$

หมายเหตุ ในการกระจาย Cofactor สามารถเลือกว่าจะใช้แถวหรือหลักใดก็ได้ แต่การคำนวณจะง่ายขึ้นถ้าเลือกแถวหรือหลักที่มีสมาชิกเป็น 0 มาก

ดังนั้นจากค่าไมเนอร์และโคแฟคเตอร์ จะหาค่า det(A) ได้จาก

$$\det(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}C_{kj}$$

จากตัวอย่างที่ 6 ถ้าเลือกใช้หลักที่ 3 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} \\
&= 0C_{13} + 7C_{23} + 9C_{33} \\
&= 0(10) + 7(0) + 9(-5) \\
&= -45
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างที่ 6 ถ้าเลือกใช้แถวที่ 1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= 3\,C_{11} + 2\,C_{12} + 0\,C_{13} \\ &= 3(17) + 2(-48) + 0(-10) \\ &= -45 \end{aligned}$$

สำหรับคุณสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์ มีดังนี้

1. det (AB) = det (BA) = (det A)(det B)
2. det (A^t) = det A
3. ดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่เป็นสามเหลี่ยมบนหรือสามเหลี่ยมล่างจะเท่ากับผลคูณของสมาชิกบนเส้นทแยงมุมหลัก
4. ถ้าเมทริกซ์ B ถูกสร้างจากเมทริกซ์ A โดยการสลับ 2 แถวหรือ 2 คอลัมน์ใด ๆ ค่า det A = -det B

5. ถ้าเมทริกซ์ B ถูกสร้างจากเมทริกซ์ A โดยการคูณสมาชิกทุกตัวของแถวหรือคอลัมน์ของ A ด้วยสเกลาร์ แล้ว det A = (1/k) det B

6. ถ้าเมทริกซ์ B ถูกสร้างจากเมทริกซ์ A โดยการนำค่าคงที่คูณแถวหรือคอลัมน์หนึ่งแล้วบวกกับอีกแถวหรือคอลัมน์หนึ่งแล้ว det A = (1/k) det B

7. ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือคอลัมน์ใดคอลัมน์หนึ่งเป็นศูนย์หมด ค่าดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์นั้นจะเท่ากับ 0

8. ถ้าสองแถวใด ๆ ในเมทริกซ์เหมือนกัน ดีเทอร์มิแนนท์จะเท่ากับ 0

9. $\det I_n = 1$ เมื่อ I_n คือเมทริกซ์เอกลักษณ์

10. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ เมื่อ $\det A \neq 0$

5. เมทริกซ์ผกผันหรืออินเวอร์สเมทริกซ์ (Inverse Matrix)

อินเวอร์สของเมตริกซ์ในที่นี้ หมายถึง อินเวอร์สของการคูณของเมตริกซ์ ซึ่งเมตริกซ์ที่จะหาอินเวอร์สได้นั้นจะต้องมีค่ากำหนดไม่เท่ากับศูนย์ อินเวอร์สของเมตริกซ์ A จะใช้สัญลักษณ์ A^{-1} ทั้งนี้ $A A^{-1} = A^{-1}A$

โดยถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสอันดับ n และ $AB = BA = I_n$ แล้วจะกล่าวได้ว่า A เป็นเมทริกซ์ผกผันของ B และเขียนแทนด้วย $A = B^{-1}$ หรือ B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A และเขียนแทนด้วย $B = A^{-1}$

5.1 การหาเมทริกซ์ผกผันของ 2 ✕ 2 เมทริกซ์

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ สามารถหาเมทริกซ์ผกผัน A^{-1} ได้คือ

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

5.2 การหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์มิติ มากกว่า 2x2

การหาค่าเมทริกซ์ผกผัน สามารถทำได้ 2 วิธี คือ

ก. ใช้สูตร

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{det(A)}$$

เมื่อ adj A เป็นเมทริกซ์ผูกพัน (adjoint A) ซึ่งเป็น การสลับเปลี่ยนของเมทริกซ์ตัวประกอบร่วม C_{ij} เช่น การหา adj ของเมทริกซ์ขนาด 3x3 ทำได้ดังนี้

$$adjA = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$$

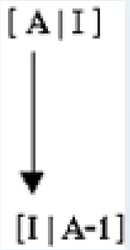
$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix}$$

ข. ใช้วิธีการดำเนินการตามแถว

โดยการนำเมทริกซ์ที่ต้องการหาค่าเมทริกซ์ผกผันมาเขียนคู่กับเมทริกซ์ เอกลักษณ์ในรูปดังนี้

[A | I]

เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ที่ต้องการหาเมทริกซ์ผกผัน และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ แล้วใช้วิธีการดำเนินการตามแถวช่วยในการทำเพื่อทำให้เมทริกซ์ A ให้เป็นเป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ I และผลลัพธ์ที่เมื่อเมทริกซ์ A ทำให้เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์และเมทริกซ์ผกผันจะปรากฎอยู่ข้างๆ ทางขวาของเมทริกซ์เอกลักษณ์ นั่นคือ



ใช้การดำเนินการตามแถวช่วยแปลง A ให้เป็น I

สำหรับการดำเนินการตามแถวในที่นี้มีหลักในการทำดังนี้

1. ถ้าต้องการทำให้มีสมาชิกเป็น 1 เพื่อให้เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ให้นำตัวเลขนั้นๆหารตลอดแล้วแถวนี้จะขอเรียกว่าเป็น **แถวที่เป็นแม่แบบ**

2. ถ้าต้องการทำให้เป็น 0 ให้นำตัวเลขใดๆมาคูณแถวที่เป็นแม่แบบแล้วนำไปบวกกับแถวที่ต้องการเปลี่ยนเป็น 0 ค่าที่ได้ใหม่แทนที่แถวที่ต้องการเปลี่ยน

ตัวอย่างที่ 7 จงหา inverses matrix ของ A เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & -10 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $$A^{-1} = \frac{1}{(3)(-10)-(5)(-5)}\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-5}\begin{bmatrix} -10 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1}

วิธีทำ จากสูตร $A^{-1} = \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$

หา

$$adjA = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}^t$$

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -7$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = -14$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 7$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 6$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 3$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = -10$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = -5$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 7$$

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & -14 & 7 \\ 6 & 3 & 0 \\ -10 & -5 & 7 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

หา det(A) โดยพิจารณาเลือกใช้แถวที่ 1 เนื่องจากมีสมาชิกที่เป็น 0 จะได้

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}$$

$$\det(A) = (1)(-7) + (-2)(-14) + (0)(7) = 21$$

จะได้

$$A^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)} = \frac{1}{21}\begin{bmatrix} -7 & 6 & -10 \\ -14 & 3 & -5 \\ 7 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{7} & -\frac{10}{21} \\ -\frac{14}{21} & \frac{1}{7} & -\frac{5}{21} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

6. เทรซของเมทริกซ์ (Trace of matrix)

เทรซของเมทริกซ์ (Trace of matrix) A ขนาด $n \times n$ คือ ผลบวกของสมาชิกในแนวทแยงมุมของเมทริกซ์ A นั่นคือ

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

ตัวอย่างที่ 9 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $tr(A) = 3 + 2 + (-1) = 4$ และ $tr(B) = (-2) + 5 + 4 = 7$

บทสรุป

ในการวิเคราะห์เชิงพหุ มีการคำนวณค่าต่าง ๆ ที่ต้องอาศัยพีชคณิตของเมทริกซ์มาช่วยในการคำนวณ เช่น ในการวิเคราะห์ถดถอยเชิงเส้นพหุคูณ ต้องใช้เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (Transpose of matrix) เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity matrix, I) และเมทริกซ์ผกผัน (Inverse of matrix) เป็นต้น ด้วยเหตุนี้ก่อนที่จะทำการรวิเคราะห์ตัวแปรพหุจึงต้องทำความเข้าใจกับชนิดของเมทริกซ์ และพีชคณิตของเมทริกซ์เสียก่อน