บทที่ 6

การประมาณหาค่ารากของสมการ

1. ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง (Bisector Method)

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $\left[a,\, b\right]$ และ $f(a)\cdot f(b) \;<\; 0$ แล้วสมการ $f(x)=0$ มีรากจริงอย่างน้อยหนึ่งรากในช่วง $(a,\, b)$

โดยการหาค่าประมาณค่ารากนั้น เราจะทำการลดช่วง $(a,\, b)$ ให้เล็กลง โดยการหาจุดกึ่งกลางในช่วง $(a,\, b)$ โดย $c=\dfrac{a+b}{2}$ แล้วพิจารณาว่า ค่ารากนั้น จะอยู่ในช่วง $(a,\, c)$ หรือ $(c,\, b)$ กระทำเช่นนี้ไปจนกว่าจะได้ค่าประมาณค่ารากที่พอใจ

ถ้า $f(a)$ และ $f(c)$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกันแล้ว รากของสมการอยู่ในช่วง $[a,\, c]$

ถ้า $f(c)$ และ $f(b)$ มีเครื่องหมายตรงข้ามกันแล้ว รากของสมการอยู่ในช่วง $[c,\, b]$

ถ้า $f(c)=0$ แล้วรากของสมการเท่ากับ c

ตัวอย่าง 1.1 จงหาค่าประมาณของรากของสมการ $x^3+x^2-3x-3=0$ โดยใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง ช่วง $(1,\, 2)$ ประมาณของรากมีความแม่นยำถึงทศนิยม 3 ตำแหน่ง

....

....

....

....

....

....

N	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

ตัวอย่าง 1.2 จงใช้ระเบียบวิธีแบ่งครึ่งช่วง หาค่าประมาณของรากของสมการ $x\sin(x)-1=0$ ในช่วง $\left[0,\,2\right]$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

N	a	b	$f(a)$	$f(b)$	c	$f(c)$
0						
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

2. ระเบียบวิธีนิวตัน – ราฟสัน (Newton – Raphson method)

ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และอยู่ในรูปแบบที่ไม่ยุ่งยากซับซ้อนมากนัก มีระเบียบวิธีในการคำนวณหารากค่าจริงของสมการ $f(x)=0$ ที่ลู่เข้าได้รวดเร็ว

ถ้า $f(x),\ f'(x)$ ต่อเนื่อง ในย่างที่ใกล้เคียงกับ r ซึ่งเป็นรากของสมการ $f(x)=0$ แล้ว

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

ถ้า $f(r)\neq 0$ และเลือก x_0 เป็นค่าประมาณเริ่มต้นของ r โดยมีค่าใกล้เคียงกับ r มากพอแล้ว ลำดับของค่าประมาณของ r คือ $\{x_n\}$ ซึ่งนิยามได้โดยสูตรการเกิดเวียงซ้ำ (recursive iterative formula) คือ

$$x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}\quad ;n=1,2,\ldots$$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาค่าประมาณของรากของสมการ $3x-\cos(x)-1=0$ โดยที่ $x_0=0.6$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

N	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0				
1				
2				
3				

ตัวอย่าง 2.2 จงหาค่าประมาณของรากของสมการ $x^6 - x - 1 = 0$ โดยที่ $x_0 = 1.5$

N	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
0				
1				
2				
3				

3. ระเบียบวิธีเซแคนท์ (Secant method)

การหาค่าประมาณของรากของสมการ $f(x)=0$ ด้วยระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน นั้นในการประมาณค่าแต่ละครั้ง ต้องคำนวณค่าของฟังก์ชัน 2 ค่าคือค่าของ $f(x)$ และ $f'(x)$ สำหรับ $f(x)$ บางฟังก์ชันที่อยู่ในรูปซับซ้อน อาจทำให้หาค่า $f'(x)$ ได้ยาก หรืออาจต้องสิ้นเปลืองเวลาในการคำนวณค่าของฟังก์ชันทั้งสองมากเกินไป ระเบียบวิธีเซแคนท์จะเป็นระเบียบวิธีที่ช่วยแก้ไขปัญหาดังกล่าวนี้ได้ โดยระเบียบวิธีนี้มีอันดับของการลู่เข้าใกล้เคียงกับอันดับของการลู่ข้าวของระเบียบวิธีนิวตัน-ราฟสัน แต่จะทำการคำนวณค่าของฟังก์ชันเพียงฟังก์ชันเดียวในการประมาณค่าแต่ละครั้ง

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)(x_n-x_{n-1})}{f(x_n)-f\left(x_{n-1}\right)}$$

ตัวอย่างที่ 3.1 โดยระเบียบวิธีเซแคนท์ จงหาค่าประมาณของสมการ $x^3-3x+2=0$ เมื่อกำหนด $x_0=-2.6$ และ $x_1=-2.4$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

N	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n-x_{n-1}\rvert$
1			
2			
3			
4			

ตัวอย่างที่ 3.2 โดยระเบียบวิธีเซแคนท์ จงหาค่าประมาณของสมการ $x = \cos(x)$ เมื่อกำหนด $x_0 = 0.5$ และ $x_1 = \frac{\pi}{4}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

N	x_n	$f(x_n)$	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
1			
2			
3			
4			

4. ระเบียบวิธีของการทำซ้ำจุดคงที่ (Fixed Point Iteration Method)

เมื่อสมการ $f(x)=0$ สามารถจัดให้อยู่ในรูปฟังก์ชันของการทำซ้ำคือ $x=g(x)$ โดยเริ่มต้นจากการหาค่าประมาณเริ่มต้นของรากของสมการ จากนั้นแทนค่าลงไป ทางด้านขวามือของสมการ จะได้ค่าประมาณของรากของสมการใหม่

$$x_1 = g(x_0)$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$$\vdots$$

$$x_n = g(x_{n-1})$$

ตัวอย่างที่ 4.1 จงหาค่าประมาณของรากของสมการ $x^2-2x-3=0$ สามารถจัดรูปได้เป็น $x=\sqrt{2x+3}$, $x=\dfrac{3}{x-2}$, $x=\dfrac{x^2-3}{2}$

เงื่อนไขของการลู่ข้าวของระเบียบวิธีของการทำซ้ำ คือ $| g'(x) | < 1$ และถ้า $g'(x)$ มีขนาดเล็กมากเพียงใด ก็จะยิ่งทำให้การลู่เข้าของระเบียบวิธีรวดเร็วยิ่งขึ้น

ตัวอย่างที่ 4.2 จงหาค่าประมาณของรากของสมการ $2x - \log x = 7$, $x_0 = 3$ (ถูกต้องจุดทศนิยม 4 ตำแหน่ง)