บทที่ 2

สมการพหุนามตัวแปรเดียว

2.1 ความหมายของพหุนาม

บทนิยาม 2.1.1 กำหนดให้ $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ เมื่อ $a_0, a_1, a_2, \ldots, \mathrm{a}_n$ เป็นค่าคงที่ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$P(x)$ เรียกว่า พหุนามใน x ดีกรี n $a_0, a_1, a_2, \ldots, \mathrm{a}_n$ เรียกว่า สัมประสิทธิ์ และ a_ix^i เมื่อ $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ เรียกว่า พจน์หรือเทอมที่ $i+1$ ของพหุนาม

บทนิยาม 2.1.2 ถ้า $P(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว เรียก $P(x) = 0$ ว่าเป็นสมการพหุนามดีกรี n และถ้า $P(\mathrm{a}) = 0$ แล้ว a เรียกว่า รากของสมการพหุนาม $P(x) = 0$

ตัวอย่าง 2.1.1 $P(x) = x^2 + x - 2 = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี ....
และ ....เป็นรากของสมการ

ตัวอย่าง 2.1.2 $P(x) = 3x^3 - x + 2 = 0$ เป็นสมการพหุนามใน x ดีกรี ....
และ ....เป็นรากของสมการ

2.2 การดำเนินการเบื้องต้นเกี่ยวกับพหุนาม

การบวกและการลบพหุนาม

บทนิยาม 2.2.1 กำหนดให้ $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \neq 0$ และ $Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n \neq 0$ เป็นพหุนามดีกรี n แล้ว $P(x) = \mathrm{Q}(x)$ ก็ต่อเมื่อ $a_i = b_i \;; \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

ตัวอย่าง 2.2.1 $f(x) = 7x^3 + 10$ และ $g(x) = (3a+2)x^3 + 4bx^2 - 5c$ ถ้า $f(x) = \mathrm{g}(x)$ จงหาค่า a, b และ c

....

....

....

....

....

บทนิยาม 2.2.2 กำหนดให้ $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$ และ $\mathrm{g}(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_nx^n$ เป็นพหุนามสองพหุนามใด ๆ

- $f(x)+\mathrm{g}(x)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_n+b_n)x^n$
- $f(x)-\mathrm{g}(x)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\ldots+(a_n-b_n)x^n$

ตัวอย่าง 2.2.3 $f(x)=x^3+2x^2-2x+1,\ g(x)=x^3+2x^2-4x+5$

$f(x)+\mathrm{g}(x)=$ ....

$f(x)-\mathrm{g}(x)=$ ....

การคูณพหุนาม

บทนิยาม 2.2.3 กำหนดให้ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นพหุนามใด ๆ $f(x)\cdot\mathrm{g}(x)$ คือพหุนามที่ได้จากผลรวมพจน์ต่าง ๆ ที่เกิดจากการเอาพจน์แต่ละพจน์ของ $g(x)$ คูณกับพจน์ของพหุนาม $f(x)$ ทุก ๆ พจน์

ตัวอย่าง 2.2.4 $f(x)=x^2+3x-1,\ g(x)=x^2+2x+1$ จงหา $f(x)\cdot\mathrm{g}(x)$

....

....

....

....

....

....

....

วิธีการคูณแบบแยกสัมประสิทธิ์ ออกจากตัวแปร

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาค่าของ $(x^5+2x^3-x^2+2)(3x^4-x^3+x^2-1)$

การหารพหุนาม

ตัวอย่าง 2.2.6 จงหาค่าของ $(x^5-3x^2+6x-1)\div(x^2+x+1)$

โดยวิธีแยกสัมประสิทธิ์ออกจากตัวแปร

ตัวอย่าง 2.2.7 $(x^8 + x^7 + 3x^4 - 1) \div (x^4 - 3x^3 + 4x - 1)$ โดยวิธีแยกสัมประสิทธิ์

2.3 ทฤษฎีเศษเหลือ

การหาเศษเหลือของการหารพหุนาม $f(x)$ ด้วย $x - c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ เราสามารถหาได้โดยไม่ต้องแสดงกระบวนการหาร โดยใช้ทฤษฎีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.3.1 ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรีมากกว่าหรือเท่ากับ 1 และ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ เศษเหลือที่เกิดจากการหาร $f(x)$ ด้วย $x - c$ เท่ากับ $f(c)$

บทแทรก $f(x)$ ด้วยหาร $x - c$ ลงตัวก็ต่อเมื่อ $f(c) = 0$

ตัวอย่าง 2.3.1 กำหนดให้ $f(x)=x^3+x^2-5x+3$ จงแสดงให้เห็นว่า $f(x)$ ด้วย $x+3$ ลงตัว

ตัวอย่าง 2.3.2 กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิสูจน์ว่า $(x+c)\big|(x^n+c^n)$ ก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่

2.4 การหารแบบสังเคราะห์

กำหนดให้ $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n การหาผลหารและเศษเหลือ จากการหาร $f(x)$ ด้วย $x - c$ อาจทำได้โดยการหารสังเคราะห์

ตัวอย่าง 2.4.1 จงหาผลหารและเศษเหลือ เมื่อ $5x^5 - 7x^2 - 2x + 4$ หารด้วย $x - 1$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหาผลหารและเศษเหลือ เมื่อ $3x^6 - 7x^5 + 5x^4 - x^2 - 6x - 8$ หารด้วย $x + 2$

2.5 กระบวนวิธีของฮอร์เนอร์ (Horner's Process)

พิจารณา x^m เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก c เป็นค่าคงที่ใด ๆ จาก $x^m = [c+(x-c)]^m$ โดยทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่า

$$x^m = c^m + mc^{m-1}(x-c) + \frac{m(m-1)}{2!}c^{m-2}(x-c)^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots 2\cdot 1}{m!}(x-c)^m$$

จะเห็นว่า x^m สามารถกระจายให้อยู่ในรูปผลบวกของกำลังของ $x-c$ ได้ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ ในทำนองเดียวกัน ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n แล้ว $f(x)$ สามารถกระจายในรูปผลบวกของกำลังของ $x-c$ ได้ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

สมมุติให้ $f(x) = A_0 + A_1(x-c) + A_2(x-c)^2 + \ldots + A_n(x-c)^n$ เมื่อ $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นค่าคงที่ สามารถหาค่าได้โดยกระบวนการหารแบบสังเคราะห์เมื่อ $f(x)$ หารด้วย $x-c$ แบบต่อเนื่องเรื่อย ๆ ดังนี้

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.4.1 ให้ $f(x) = x^4 - 6x^2 + 1$ จงกระจาย $f(x)$ ในรูปผลบวกของกำลังของ $(x+2)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.4.2 กำหนดให้ $f(x)=4x^5-6x^4+3x^3+x^2-x-1$ จงกระจาย $f(x)$ ในรูปผลบวกของกำลังของ $(x-1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.4.3 ให้ $f(x)=x^5-6x^3+x^2-1$ จงกระจาย $f(x)$ ในรูปผลบวกของกำลังของ $(x+1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.5 สูตรของเทเลอร์ (Taylor's Formula)

กำหนดให้ $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ เป็นพหุนามใน x ดีกรี n จากทฤษฎีการหาอนุพันธ์ จะได้ว่า

$$f^{/}(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1}$$

$$f^{//}(x) = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + 4\cdot 3a_4 x^2 \ldots + n(n-1)a_n x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{n}(x) = (n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1)a_n$$

ซึ่งจะได้ว่า $f^{/}(x), f^{//}(x), \ldots, f^{n}(x)$ หาค่าได้ สำหรับ x ใด ๆ จะได้ว่า

$$f(x) = f(c) + \frac{f^{/}(c)}{1!}(x-c) + \frac{f^{//}(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{n}(c)}{n!}(x-c)^n$$

ตัวอย่าง 2.5.1 จงใช้สูตรของเทเลอร์ กระจายพหุนาม $4x^3-7x^2+5x+3$ ในรูปผลบวกของกำลังของ $(x+2)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.5.2 จงใช้สูตรของเทเลอร์ กระจายพหุนาม x^4+6x^3+x-1 ในรูปผลบวกของกำลังของ $(x+1)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2.6 ตัวหารร่วมมากของพหุนามสองพหุนาม

บทนิยาม 2.6.1 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใด ๆ ถ้ามีพหุนาม $g(x)$ โดยที่ $P(x)=g(x)\cdot Q(x)$ แล้ว เรียกว่า $P(x)$ หารด้วย $Q(x)$ ลงตัว เขียนแทนด้วย $Q(x)\,|\,P(x)$ เรียก $Q(x)$ เป็นตัวหาร หรือตัวประกอบของ $P(x)$

ตัวอย่าง 6 ให้ $P(x)=x^4+4x^3+4x^2-x-2$, $Q(x)=x^2+x-1$

จาก $P(x)=(x^2+3x+2)(x^2+x-1)$

ดังนั้น $Q(x)\,|\,P(x)$ หรือ x^2+x-1 เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $x^4+4x^3+4x^2-x-2$

บทนิยาม 2.6.2 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใด ๆ ถ้ามีพหุนาม $g(x)$ เป็นพหุนามที่ $\mathrm{g}(x)\,|\,P(x)$ และ $g(x)\,|\,Q(x)$ แล้ว เรียกว่า $g(x)$ เป็นตัวหารร่วมของ $P(x)$ และ $Q(x)$

ตัวอย่าง 7 ให้ $f(x)=(x+1)(x+2)(x^2+x-1)$, $g(x)=(x+1)(x+2)(x^4-x^3+x^2+1)$

จะได้ว่า $(x+1),(x+2)$ และ x^2+3x+2 เป็นตัวหารร่วมของ $f(x)$ และ $g(x)$

บทนิยาม 2.6.3 กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามใน x สองพหุนามใด ๆ ตัวหารร่วมของ $P(x)$ และ $Q(x)$ ที่มีดีกรีสูงสุด เรียกพหุนามนั้นว่า เป็นตัวหารร่วมมากของ $P(x)$ และ $Q(x)$

การหาตัวหารร่วมมากของพหุนามสองพหุนามใด ๆ หาได้จากกระบวนวิธีของยูคลิด ดังนี้

กำหนดให้ $f(x)$ และ $f_1(x)$ เป็นพหุนามสองพหุนามใด ๆ โดยที่ ดีกรีของ $f(x)$ มากกว่า ดีกรีของ $f_1(x)$ จะได้ว่า จะมี $g_1(x)$ และ $f_2(x)$ โดยที่ $f(x)=f_1(x)\cdot g_1(x)+f_2(x)$ เมื่อดีกรีของ $f_2(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $f_1(x)$

ถ้า $f_2(x)=0$ จะได้ว่า $f_1(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $f_1(x)$

ถ้า $f_2(x)\neq 0$ จะได้ว่ามี $g_2(x)$ และ $f_3(x)$ โดยที่ $f_1(x)=f_2(x)\cdot g_2(x)+f_3(x)$ เมื่อดีกรีของ $f_3(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $f_2(x)$

ถ้า $f_3(x)=0$ จะได้ว่า $f_2(x)$ เป็นตัวหารร่วมมากของ $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ และจะเป็นตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ และ $f_1(x)$ ด้วย

ถ้า $f_3(x)\neq 0$ จะได้ว่ามี $g_3(x)$ และ $f_4(x)$ โดยที่ $f_2(x)=f_3(x)\cdot g_3(x)+f_4(x)$ เมื่อดีกรีของ $f_4(x)$ น้อยกว่าดีกรีของ $f_3(x)$

โดยกระบวนวิธีเช่นเดียวกันกับที่กล่าวมาแล้ว กระทำต่อเนื่องไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งได้ขั้นสุดท้ายในรูป $f_{r-1}(x)=f_r(x)\cdot g_r(x)+0$

ตัวอย่าง 2.6.1 กำหนดให้ $f(x) = x^6 + 2x^5 + x^3 + 3x^2 + 3x + 2$ และ $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$ จงหาตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $g(x)$

ตัวอย่าง 2.6.2 กำหนดให้ $f(x) = x^5 - x^4 - 2x^3 + 2x^2 + x - 1$ และ $g(x) = 5x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 4x + 1$ จงหาตัวหารร่วมมากของ $f(x)$ กับ $g(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....