บทที่ 5
อนุกรมกำลัง

ในบทนี้จะทำการศึกษาอนุกรมโดยแต่ละพจน์เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระหนึ่งตัวแปรซึ่งมีประโยชน์อย่างมากในการพยายามประมาณค่าของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่มีความสำคัญในการนำไปประยุกต์ใช้ โดยจะกล่าวถึงอนุกรมของจำนวนจริงในรูปแบบหนึ่งที่เรียกว่า อนุกรมกำลัง ซึ่งเป็นรูปแบบที่ง่ายและสะดวกต่อการคำนวณ

อนุกรมกำลัง

บทนิยามที่ 5.1 ให้ a , c_0 , c_1 , c_2 , ... เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ x เป็นตัวแปรค่าคงตัว จะเรียกอนุกรมที่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{หรือ} \quad c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+\ldots$$

ว่า **อนุกรมกำลังในรูป $(x-a)$** เรียก c_n เมื่อ $n=0,1,2,\ldots$ ว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง** และเรียก a ว่า **ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง**

ข้อสังเกต $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ จะเป็นอนุกรมกำลังที่ลู่เข้าสู่ c_0 เมื่อ $x=a$

การลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

ทฤษฎีบทที่ 5.1 ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้าที่ $x=x_1 \neq a$ แล้ว อนุกรมนี้จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ทุกค่า x ซึ่ง $|x-a|<|x_1-a|$

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่ออกที่ $x=x_2 \neq a$ แล้ว อนุกรมนี้จะลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-a|>|x_2-a|$

พิสูจน์ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบทที่ 5.2 สำหรับ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่ลู่เข้า แล้วจะเกิดความเป็นไปได้ 3 กรณี คือ

(1) อนุกรมลู่เข้า เมื่อ $x = a$ เท่านั้น

(2) อนุกรมลู่เข้า ทุก x ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(3) มีจำนวนจริงบวก r ที่ทำให้อนุกรมลู่เข้า ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| < r$ และอนุกรมลู่ออก ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| > r$ แต่อนุกรมอาจจะลู่เข้าหรือลู่ออก ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| = r$ ก็ได้

รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลัง

บทนิยามที่ 5.2 ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า เมื่อ $x = a$ เท่านั้น จะกล่าวว่า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ **มีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น 0**

ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า ทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริงใดๆ จะกล่าวว่า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ **มีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น** $+\infty$

ถ้ามีจำนวนจริงบวก r ที่ทำให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| < r$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่ออก ทุกค่า x ซึ่ง $|x - a| > r$ จะกล่าวว่า $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ **มีรัศมีแห่งการลู่เข้าเป็น r**

บทนิยามที่ 5.3 เรียกเซตของทุกค่า x ที่เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ทำให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า ว่า **ช่วงแห่งการลู่ข้าวของอนุกรมกำลัง**

ตัวอย่างที่ 1 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

วิธีทำ (1) ให้ $a_n = n^n x^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = n|x|$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n|x| = +\infty$ เมื่อ $x \neq 0$

จาก ทบ. 4.14 จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่ออก เมื่อ $x \neq 0$

และเนื่องจาก $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า เมื่อ $x = 0$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า เมื่อ $x = 0$ เท่านั้น

จึงสรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ 0 และช่วงแห่งการลู่เข้าคือ $\{0\}$

(2) ให้ $a_n = \frac{x^n}{n}$

จาก ทบ. 4.13 จะได้ว่า

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า เมื่อ $0 < |x| < 1$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ เป็นอนุกรมกำลังลู่ออก เมื่อ $|x| > 1$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้า เมื่อ $x = 0$

และ (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ เป็นอนุกรมกำลังลู่เข้าและลู่ออก เมื่อ $|x| = 1$ หรือ $x = -1 , 1$ โดยพิจารณาแต่ละกรณี ดังนี้

ข้อสังเกต จากโจทย์ กำหนดให้เริ่มต้นที่ $n = 1$ เนื่องจากที่ $n = 0$ **อนุกรมนั้นจะไม่มีค่า**

ทฤษฎีบทที่ 5.3 ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง ซึ่งมีจำนวนจริง n_0 ใด ๆ ที่ $c_n \neq 0$ ทุกค่า $n > n_0$

(1) ถ้า $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = 0\ ,\ +\infty$ หรือ r เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง ที่มีรัศมีแห่งการลู่เข้า เท่ากับ $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$

(2) ถ้า $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = 0\ ,\ +\infty$ หรือ r เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง ที่มีรัศมีแห่งการลู่เข้า เท่ากับ $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$

พิสูจน์ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่างที่ 2 จงหารัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-1)^n}{3n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$

วิธีทำ (1) จาก $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4x-1)^n}{3n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n\left(x-\frac{1}{4}\right)^n}{3n}$

จะได้ $c_n = \frac{4^n}{3n}$

ดังนั้น $\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \left|\frac{4^n}{3n}\cdot\frac{3n+3}{4^{n+1}}\right|$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{4^n}{3n}\cdot\frac{3n+3}{4^{n+1}}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{4n}\right| = \frac{1}{4}$$

สรุปได้ว่า รัศมีแห่งการลู่เข้าคือ $\frac{1}{4}$

แบบฝึกหัดที่ 5.1

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} (x^n)$

1.2 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{x^n}{n}\right)$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right)$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\left(\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$

1.6 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2^n (x-4)^n}{\ln(n+2)}\right)$

1.7 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(x-1)^n}{n^3+1}\right)$

1.8 $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(2x+3)^n}{5^n}\right)$

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} n!\, x^n$

1.10 $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$

การหาอนุพันธ์ของอนุกรมกำลัง

บทนิยามที่ 5.4 ให้ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลังที่ลู่เข้า และมีผลบวกเท่ากับ f(x) ทุกค่า $x \in I$ นั่นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{ทุกค่า } x \in I$$

จะเรียก f ว่าเป็น**ฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังบน I**

ตัวอย่างที่ 3 จงหาฟังก์ชันผลบวกของ $\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{n+3}$

วิธีทำ จากอนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1$$

นำ $2x^3$ คูณตลอดสมการ จะได้

$$\frac{2x^3}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} 2x^{n+3} \quad , \quad |x| < 1$$

นั่นคือ $f(x) = \dfrac{2x^3}{1-x}$, $x \in (-1,1)$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของ $\sum_{n=0}^{\infty} 2x^{n+3}$

ทฤษฎีบทที่ 5.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันผลบวกของ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ บนช่วงเปิด I นั่นคือ

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ทุกค่า $x \in I$ จะได้ว่า f **มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด I** และ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาฟังก์ชันผลบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

วิธีทำ จากอนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1$$

จะได้ $$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad , \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \quad , \quad |x| < 1$$

นำ x คูณเข้าตลอดสมการ จะได้

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n} \quad , \quad |x| < 1$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \quad , \quad |x| < 1$$

$$\frac{1-x^2}{(1-x)^4} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \quad , \quad |x| < 1$$

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1} \quad , \quad |x| < 1$$

นั่นคือ $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$, $x \in (-1, 1)$ เป็นฟังก์ชันผลบวกของ $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^{n-1}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหาอนุกรมกำลัง เมื่อกำหนดให้ฟังก์ชันผลบวกเป็น

$$f(x) = \frac{x}{(1-4x^2)^2} \quad , x \in (\frac{-1}{2}, \frac{1}{2})$$

แบบฝึกหัดที่ 5.2

1. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\sum_{n=0}^{\infty} (-3)^{n-1} nx^n$

1.2 $\sum_{n=0}^{\infty} nx^{3n}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{2n-1}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} n(2x)^n$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^n}{2}$

2. จงหาอนุกรมกำลัง เมื่อกำหนดฟังก์ชันผลบวกให้ดังต่อไปนี้

2.1 $f(x) = \frac{1}{(1-x)^4}$, $x \in (-1, 1)$

2.2 $f(x) = \frac{-x^3}{(1+x)^2}$, $x \in (-1, 1)$

2.3 $f(x) = \frac{x}{(1-x^2)^2}$, $x \in (-1, 1)$

2.4 $f(x) = \frac{x^2}{(1-3x)^2}$, $x \in (\frac{-1}{3}, \frac{1}{3})$

อนุกรมเทย์เลอร์และอนุกรมเมคคอรีน

บทนิยามที่ 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่จุด $x = a$ จะเรียกอนุกรมที่สามารถเขียนอยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + \ldots$$

ว่า**อนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด a** และเมื่อ $a = 0$ จะเรียกอนุกรมนี้ว่า**อนุกรมแมคคอริน**

ตัวอย่างที่ 6 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \frac{1}{x}$ รอบจุด $x = 1$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $x = 1$ จะได้

$$f(x) = \frac{1}{x}, \qquad f(1) = 1$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \qquad f'(1) = -1$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}, \qquad f''(1) = 2$$

$$f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \qquad f'''(1) = -6$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}, \qquad f^{(4)}(1) = 24$$

ดังนั้น อนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด $x = 1$ คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!} = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \frac{f'''(1)(x-1)^3}{3!} +$$

$$= 1 - (x-1) + \frac{2(x-1)^2}{2!} - \frac{6(x-1)^3}{3!} + \frac{24(x-1)^4}{4!} +$$

$$= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 +$$

ทฤษฎีบทที่ 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่จุด $x = a$ และอนุกรมเทย์เลอร์ที่เขียนอยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!} + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$ สำหรับ c บางตัวบนช่วง (a , x) ซึ่งจะเรียก $R_n(x)$ ว่า **เศษเหลือของอนุกรมเทย์เลอร์**

พิสูจน์ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

หมายเหตุ (1) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \left| R_n(x) \right| = 0$ แล้วจะกล่าวว่า อนุกรมเทย์เลอร์เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหา f เขียนแทนด้วย $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$

(2) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \left| R_n(x) \right| \neq 0$ แล้วจะ**ไม่สามารถเขียน**ได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{n!}$$

การประยุกต์ของอนุกรมยกกำลัง

อนุกรมยกกำลังของฟังก์ชันใด ๆ ก็ตาม ถ้าจะนำอนุกรมนั้น ๆ ไปใช้เป็นตัวแทนของฟังก์ชันจะต้องใช้ในช่วงของการลู่เข้าเท่านั้น ซึ่งมีการนำไปใช้อย่างหลากหลาย เช่น การหาค่าอินทิกรัลที่ไม่สามารถอินทิเกรตออกมาในรูปของฟังก์ชันธรรมดา ๆ ได้ การหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นต้น อนุกรมยกกำลังที่สำคัญ ๆ และนิยมใช้ ได้แก่

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \quad + x^n + \quad = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , \quad |x| < 1$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \quad + \frac{x^n}{n!} + \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad |x| < \infty$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad |x| < \infty$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \quad = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad |x| < \infty$$

แบบฝึกหัดที่ 5.3

1. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ f รอบจุด $x = a$ เมื่อกำหนดให้

1.1 $f(x) = e^x$, $a = 0$

1.2 $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$

1.3 $f(x) = \arctan(x)$, $a = 0$

1.4 $f(x) = \ln(1+x)$, $a = 0$

1.5 $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$, $a = 2$

2. จงหาฟังก์ชันผลบวก f ของอนุกรมเทย์เลอร์ต่อไปนี้

2.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

2.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$

2.3 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}$

2.4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)!}$

2.5 $\displaystyle 1+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{2(2n)!}$