บทที่ 2
เทคนิคการอินทิเกรต

ในบทที่ผ่านมา เราได้กล่าวถึงการอินทิเกรตของฟังก์ชัน $f(x)$ โดยใช้กฎเบื้องต้น แต่ยังมีฟังก์ชันอีกมากมายที่อยู่ในรูปของฟังก์ชันประกอบ $f \quad g(x)$ หรือฟังก์ชันผลคูณ $f(x)\cdot g(x)$ หรือฟังก์ชันผลหาร $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ซึ่งไม่สามารถใช้กฎเบื้องต้นได้ ด้วยสาเหตุนี้จึงมีเทคนิคการอินทิเกรตหลายรูปแบบที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับฟังก์ชันในรูปแบบต่างๆ ที่กล่าวมาข้างต้น ดังนั้นในบทนี้จะกล่าวถึงหลักการใช้เทคนิคการอินทิเกรตซึ่งแยกศึกษาได้ตามรูปแบบต่างๆ ดังต่อไปนี้

การอินทิเกรตโดยการแทนค่าด้วยตัวแปร u อยู่ในรูปฟังก์ชันตัวแปร x

การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูปฟังก์ชันประกอบ $f \quad g(x)$ สามารถหาค่าได้โดยการแทนค่าตัวแปรจากตัวแปร x เป็นตัวแปรอื่น ณ ที่นี้ให้เป็นตัวแปร u ดังนี้ $u = g(x)$ จะได้ $d(u(x)) = g^{/}(x)dx$ ดังนั้น

$$\int f(g(x))g^{/}(x)\,dx = \int f(u)\,du = F(u)+c$$

หมายเหตุ ถ้าเป็นการอินทิเกรตจำกัดเขต $\int_a^b f(x)dx$ เมื่อแทน $x = g(u)$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(g(u))g^{/}(u)du$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int 2x(1+x^2)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = (1+x^2)$ จะได้ $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{d}{dx}(1+x^2)$

$$du = 2xdx$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

จะได้ว่า

$$\int 2x(1+x^2)\,dx = \int 2x(u)\frac{du}{2x}$$

$$= \int u\,du$$

$$= \frac{u^2}{2} + c$$

$$= \frac{(1+x^2)^2}{2} + c$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int 2xe^{x^2}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = x^2$ จะได้ $\frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2)$

$$du = 2xdx$$

$$dx = \frac{du}{2x}$$

จะได้ว่า $\int 2xe^{x^2}\,dx = \int 2x(e^u)\frac{du}{2x}$

$$= \int e^u\,du$$

$$= e^u + c$$

$$= e^{x^2} + c$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^3}}\,dx$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int e^{\sin(x)} \cos(x)\, dx$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int_{0}^{2} 3x^2(x^3 - 2)dx$

แบบฝึกหัดที่ 2.1

1. จงหาอินทิกรัล โดยการแทนค่า u ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.1 $\int 3x\sin(2x^2)dx$, $u = 2x^2$

1.2 $\int \frac{9r^2}{1-r^3}dr$, $u = 1-r^3$

1.3 $\int (2y^3+4y)(y^4+4y^2+1)^2dy$, $u = y^4+4y^2+1$

1.4 $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^2(2x)}dx$, $u = \cos(2x)$

1.5 $\int \cot^2 x\,\operatorname{cosec}^2 x\,dx$, $u = \cot(x)$

2. จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

2.1 $\int 2x(x^2+1)^4dx$

2.2 $\int 3x^4\sqrt{x^5-1}dx$

2.3 $\int \sqrt{2x+1}dx$

2.4 $\int \sin^2(x)\cos(x)dx$

2.5 $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x}}dx$

2.6 $\int \frac{x^3}{(1+x^4)^2}dx$

2.7 $\int \tan^4(x)\sec^2(x)dx$

2.8 $\int \sin(3x)\cos(3x)dx$

2.9 $\int \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{3}\right)dx$

2.10 $\int 4x^3\cos(x^4)dx$

3. จงหาค่าของการอินทิเกรตจำกัดเขตต่อไปนี้

3.1 $\int_0^2 x^3(1+x^4)dx$

3.2 $\int_{-1}^0 \frac{4x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3.3 $\int_0^{\pi/4} \tan(x)\sec^2(x)dx$

3.4 $\int_1^3 \cos(4-3x)dx$

3.5 $\int_{-\pi/2}^{0} \frac{5\cos(x)}{\sin(x)+4}dx$

3.6 $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sin(x)\sin(\cos x)dx$

3.7 $\int_{\pi/3}^{\pi/2} (x+\cos(x))dx$

3.8 $\int_{0}^{\pi/6} \sin\left(\frac{2x}{3}\right)dx$

3.9 $\int_{-2}^{0} (x-1)\sqrt{2-x}dx$

3.10 $\int_{0}^{2} x\sqrt[3]{4-x^2}dx$

4. จงอธิบายว่าเพราะเหตุใด $\int x(5-x^2)^3 dx \neq \int u^3 du$ เมื่อ $u = 5-x^2$

5. ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $\int_0^{10} f(x)dx = 16$ จงหาค่าของ $\int_0^5 f(2x)dx$

6. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด ถ้าผิดจงยกตัวอย่างประกอบ

6.1 $\int (2x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + c$

6.2 $\int_a^b \sin(x)dx = \int_a^{b+2\pi} \sin(x)dx$

6.3 $4\int \sin(x)\cos(x)dx = -\cos(2x)+c$

6.4 $\int_{-10}^{10} (ax^3+bx^2+cx+d)dx = 2\int_0^{10} (bx^2+d)dx$

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง สามารถแบ่งการอินทิเกรตได้ 6 แบบดังนี้

1. **การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูป $\sin^m(x)$ หรือ $\cos^m(x)$**
   เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวก สามารถแยกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ m เป็นจำนวนคี่ ใช้วิธีการอินทิเกรตเทียบกับฟังก์ชัน cos(x) หรือ sin(x) ได้ดังนี้

ให้ $m = 2k+1 \quad , \; k = 0,1,2,\ldots$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \sin^m(x)dx &= \int (\sin(x))^{2k+1}dx \\ &= \int (\sin(x))^{2k}\sin(x)\frac{d\cos(x)}{-\sin(x)} \\ &= -\int (1-\cos^2(x))^k d\cos(x)\end{aligned}$$

และ
$$\begin{aligned}\int \cos^m(x)dx &= \int (\cos(x))^{2k+1}dx \\ &= \int (\cos(x))^{2k}\cos(x)\frac{d\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \int (1-\sin^2(x))^k d\sin(x)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $\int \sin^3(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)dx &= \int (\sin(x))^{2+1}dx \\ &= \int (\sin(x))^2\sin(x)\frac{d\cos(x)}{-\sin(x)} \\ &= -\int (1-\cos^2(x))d\cos(x) \\ &= -\left[\cos(x)-\frac{\cos^3(x)}{3}\right]+c \\ &= -\cos(x)+\frac{\cos^3(x)}{3}+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหา $\int \cos^5(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\int \cos^5(x)dx = \int (\cos(x))^{4+1}dx$$
$$= \int (\cos(x))^4 \cos(x)\frac{d\sin(x)}{\cos(x)}$$
$$= \int (1-\sin^2(x))^2 d\sin(x)$$
$$= \int (1-2\sin^2(x)+\sin^4(x))d\sin(x)$$
$$= \sin(x)-\frac{2\sin^3(x)}{3}+\frac{\sin^5(x)}{5}+c$$

ตัวอย่างที่ 8 จงหา $\int \sin^5(3x)dx$

กรณีที่ 2 เมื่อ m เป็นจำนวนคู่

ให้ใช้สูตร $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

หรือ $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$

เพื่อให้กำลังของตัวถูกอินทิเกรตลดลง แล้วดำเนินการการอินทิเกรตเหมือนเดิม

ตัวอย่างที่ 9 จงหา $\int \cos^4(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า $\cos^4(x) = \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int \cos^4(x)dx &= \int \frac{1}{4}(1+2\cos(2x)+\cos^2(2x))\,dx\\
&= \frac{1}{4}\left(\int 1\,dx+\int 2\cos(2x)\,dx+\int \cos^2(2x)\,dx\right)\\
&= \frac{1}{4}\left[x+2\int \cos(2x)\frac{d(2x)}{2}+\int\left(\frac{1+\cos(4x)}{2}\right)dx\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[x+\sin(2x)+\int \frac{1}{2}dx+\int \frac{\cos(4x)}{2}dx\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[x+\sin(2x)+\frac{1}{2}x+\int \frac{\cos(4x)}{2}\frac{d(4x)}{4}\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[x+\sin(2x)+\frac{1}{2}x+\frac{\sin(4x)}{8}\right]+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 10 จงหา $\int 12\sin^2(4x)dx$

2. **การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูป $\sin^m(x)\cos^n(x)$ สามารถแยกได้เป็น 2 กรณี ดังนี้**

กรณีที่ 1 เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ n มีค่าไม่จำกัด สามารถอินทิเกรตเทียบกับ $\cos(x)$ ได้ดังนี้

ให้ $m = 2k+1 \quad , \; k = 0,1,2,\ldots$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx &= \int (\sin(x))^{2k+1}\cos^n(x)dx \\ &= \int (\sin(x))^{2k}\sin(x)\cos^n(x)\frac{d\cos(x)}{-\sin(x)} \\ &= -\int (1-\cos^2(x))^k\cos^n(x)d\cos(x)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหา $\int \sin^3(x)\cos^8(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \sin^3(x)\cos^8(x)dx &= \int (\sin(x))^{2+1}\cos^8(x)dx \\ &= \int (\sin(x))^2\sin(x)\cos^8(x)\frac{d\cos(x)}{-\sin(x)} \\ &= -\int (1-\cos^2(x))\cos^8(x)d\cos(x) \\ &= -\int (\cos^8(x)-\cos^{10}(x))d\cos(x) \\ &= -\frac{\cos^9(x)}{9}+\frac{\sin^{11}(x)}{11}+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 12 จงหา $\int \sin^5(x)\cos^{1/2}(x)dx$

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกคี่ และ m มีค่าไม่จำกัด สามารถอินทิเกรตเทียบกับ sin(x) ได้ดังนี้

ให้ $n = 2k+1 \quad , \ k = 0,1,2,...$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \sin^m(x)\cos^n(x)dx &= \int (\sin(x))^m \cos^{2k+1}(x)dx \\ &= \int (\sin(x))^m \cos^{2k}(x)\cos(x)\frac{d\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \int \sin^m(x)(1-\sin^2(x))^k d\sin(x)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 13 จงหา $\int \sin^{11/3}(x)\cos^3(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \sin^{11/3}(x)\cos^3(x)dx &= \int (\sin(x))^{11/3} \cos^{2+1}(x)dx \\ &= \int (\sin(x))^{11/3} \cos^2(x)\cos(x)\frac{d\sin(x)}{\cos(x)} \\ &= \int \sin^{11/3}(x)(1-\sin^2(x))d\sin(x) \\ &= \int (\sin^{11/3}(x)-\sin^{17/3}(x))d\sin(x) \\ &= \frac{3\cos^{14/3}(x)}{14} - \frac{3\sin^{20/3}(x)}{20} + c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 14 จงหา $\int \sin^2(2x)\cos^5(2x)dx$

3. **การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูป $\tan^m(x)$ หรือ $\cot^m(x)$**
เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกเมื่อ $m \geq 2$ ไม่ว่าจะเป็นจำนวนเต็มบวกคู่หรือคี่

ให้ใช้สูตร $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$ แล้วอินทิเกรตเทียบกับ $\tan(x)$

และ $\cot^2(x) = \operatorname{cosec}^2(x) - 1$ แล้วอินทิเกรตเทียบกับ $\cot(x)$

ตัวอย่างที่ 15 จงหา $\int \tan^3(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \tan^3(x)dx &= \int \tan(x)\tan^2(x)dx \\
&= \int \tan(x)(\sec^2(x) - 1)dx \\
&= \int (\tan(x)\sec^2(x) - \tan(x))dx \\
&= \int \tan(x)\sec^2(x)dx - \int \tan(x)dx \\
&= \int \tan(x)\sec^2(x)\frac{d\tan(x)}{\sec^2(x)} - \int \tan(x)dx \\
&= \int \tan(x)d\tan(x) - \int \tan(x)dx \\
&= \frac{\tan^2(x)}{2} - \ln|\sec(x)| + c
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 16 จงหา $\int \cot^4(x)dx$

4. การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูป $\sec^m(x)$ หรือ $\operatorname{cosec}^m(x)$

เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มบวกคู่ ให้ใช้วิธีอินทิเกรตเทียบกับฟังก์ชัน tan(x) หรือ cot(x) ดังนี้

ให้ $m = 2k \quad , \; k = 1,2,3,\ldots$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sec^m(x)dx &= \int \sec^{2k}(x)dx \\ &= \int \sec^{2k}(x)\frac{d\tan(x)}{\sec^2(x)} \\ &= \int \sec^{2k-2}(x)d\tan(x) \\ &= \int (\sec^2(x))^{k-1}d\tan(x) \\ &= \int (1+\tan^2(x))^{k-1}d\tan(x)\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\int \operatorname{cosec}^m(x)dx &= \int \operatorname{cosec}^{2k}(x)dx \\ &= \int \operatorname{cosec}^{2k}(x)\frac{d\cot(x)}{-\operatorname{cosec}^2(x)} \\ &= -\int \operatorname{cosec}^{2k-2}(x)d\cot(x) \\ &= -\int (\operatorname{cosec}^2(x))^{k-1}d\cot(x) \\ &= -\int (1+\cot^2(x))^{k-1}d\cot(x)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 17 จงหา $\int \sec^4(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int \sec^4(x)dx &= \int \sec^4(x)\frac{d\tan(x)}{\sec^2(x)} \\ &= \int \sec^2(x)d\tan(x) \\ &= \int (1+\tan^2(x))d\tan(x) \\ &= \tan(x)+\frac{\tan^3(x)}{3}+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 18 จงหา $\int \operatorname{cosec}^6(x)dx$

5. **การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูป $\sec^m(x)\tan^n(x)$**

   เมื่อ $m,n \neq 0$ สามารถแยกเป็น 2 กรณี ดังนี้

   กรณีที่ 1 เมื่อ m เป็นจำนวนเต็มคู่บวก และ n มีค่าไม่จำกัด ให้อินทิเกรตเทียบกับ tan(x)

   ให้ $m = 2k \quad , \quad k = 1,2,3,...$

   จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
\int \sec^m(x)\tan^n(x)dx &= \int \sec^{2k}(x)\tan^n(x)dx \\
&= \int \sec^{2k}(x)\tan^n(x)\frac{d\tan(x)}{\sec^2(x)} \\
&= \int (\sec^2(x))^{k-1}\tan^n(x)d\tan(x) \\
&= \int (1+\tan^2(x))^{k-1}\tan^n(x)d\tan(x)
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 19 จงหา $\int \sec^4(x)\tan^3(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า
$$\begin{aligned}
\int \sec^4(x)\tan^3(x)dx &= \int \sec^4(x)\tan^3(x)\frac{d\tan(x)}{\sec^2(x)} \\
&= \int \sec^2(x)\tan^3(x)d\tan(x) \\
&= \int (1+\tan^2(x))\tan^3(x)d\tan(x) \\
&= \int (\tan^3(x)+\tan^5(x))d\tan(x) \\
&= \frac{\tan^4(x)}{4}+\frac{\tan^6(x)}{6}+c
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 20 จงหา $\int \sec^2(3x)\tan^5(3x)dx$

กรณีที่ 2 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่บวก และ m มีค่าไม่จำกัด ให้อินทิเกรตเทียบกับ sec(x)

ให้ $n = 2k+1 \quad , \ k = 0,1,2,\ldots$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \sec^m(x)\tan^n(x)dx &= \int \sec^m(x)\tan^{2k+1}(x)dx \\ &= \int \sec^m(x)\tan^{2k+1}(x)\frac{d\sec(x)}{\sec(x)\tan(x)} \\ &= \int \sec^{m-1}(x)\tan^{2k}(x)d\sec(x) \\ &= \int \sec^{m-1}(x)(\sec^2(x)-1)^k d\sec(x)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 21 จงหา $\int \sqrt{\sec(x)}\tan^3(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \sqrt{\sec(x)}\tan^3(x)dx &= \int \sec^{1/2}(x)\tan^{2+1}(x)dx \\ &= \int \sec^{1/2}(x)\tan^{2+1}(x)\frac{d\sec(x)}{\sec(x)\tan(x)} \\ &= \int \sec^{-1/2}(x)\tan^2(x)d\sec(x) \\ &= \int \sec^{-1/2}(x)(\sec^2(x)-1)d\sec(x) \\ &= \int (\sec^{3/2}(x)-\sec^{-1/2}(x))d\sec(x) \\ &= \frac{2\sec^{5/2}(x)}{5} - 2\sec^{1/2}(x) + c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 22 จงหา $\int \sec^3(-2x)\tan^5(-2x)dx$

6. **การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติที่อยู่ในรูป $\operatorname{cosec}^m(x)\cot^n(x)$**

เมื่อ $m,n \neq 0$ สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน $\sec^m(x)\tan^n(x)$ ได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 23 จงหา $\int \operatorname{cosec}^4(x)\cot^5(x)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{cosec}^4(x)\cot^5(x)dx &= \int \operatorname{cosec}^4(x)\cot^5(x)\frac{d\cot(x)}{-\operatorname{cosec}^2(x)} \\
&= -\int \operatorname{cosec}^2(x)\cot^5(x)d\cot(x) \\
&= -\int (1+\cot^2(x))\cot^5(x)d\cot(x) \\
&= -\int (\cot^5(x)+\cot^7(x))d\cot(x) \\
&= -\frac{\cot^6(x)}{6}-\frac{\cot^8(x)}{8}+c
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 24 จงหา $\int \operatorname{cosec}^5(5x)\cot^3(5x)dx$

แบบฝึกหัดที่ 2.2

1. จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1.1 $\int \cos^2(x)\sin(x)dx$

1.2 $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx$

1.3 $\int \cos^3(x)dx$

1.4 $\int \cos^2(5x)dx$

1.5 $\int \cos^3(x)\sin^5(x)dx$

1.6 $\int \sec(x)\tan^2(x)dx$

1.7 $\int \tan(2x)\sec^3(2x)dx$

1.8 $\int \sqrt{\tan(x)}\sec^4(x)dx$

1.9 $\int (1+\sec(\pi x))^2\sec(\pi x)\tan(\pi x)dx$

1.10 $\int \frac{\sin(-3x)}{\sqrt{\cos(-3x)}}dx$

2. จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{cosec}^3(x)dx$

2.2 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^3(x)dx$

2.3 $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\cos^2(x)}{\sin^4(x)}dx$

2.4 $\int_{0}^{\pi/8} \sqrt{\operatorname{cosec}(x)}\cot^5(x)dx$

2.5 $\int_{0}^{\pi/2} \cos^{5/2}(x)\sin^3(x)dx$

2.6 $\int_{0}^{\pi/4} \sec^2(x)\tan^3(x)dx$

2.7 $\int_{0}^{\pi} \sin^2\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)dx$

2.8 $\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1-\cos(3x))\sin(3x)dx$

2.9 $\int_{0}^{\pi/4} \frac{1+\sin(x)}{\cos^2(x)}dx$

2.10 $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\sec^2(x)}{\tan(x)}dx$

การอินทิกรตโดยการแทนค่าตัวแปร u อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ

การอินทิเกรตของฟังก์ชันที่มีเทอม $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ **เมื่อ** $a>0$ **รวมอยู่ด้วย เราสามารถใช้เทคนิคการแทนค่าตัวแปรให้อยู่ในเทอมของฟังก์ชันตรีโกณมิติ แล้วใช้เทคนิคการอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติดำเนินการต่อ ซึ่งสามารถแบ่งรูปแบบการอินทิเกรตออกเป็น 3 แบบ โดยอาศัยเอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติต่อไปนี้ประกอบการอินทิเกรต ได้ดังนี้**

$$\begin{aligned} \sin^2(x)+\cos^2(x) &= 1 \\ 1+\tan^2(x) &= \sec^2(x) \\ 1+\cot^2(x) &= \operatorname{cosec}^2(x) \end{aligned}$$

รูปแบบที่ 1 ถ้าฟังก์ชันมีเทอมของ $\sqrt{a^2-x^2}$ ประกอบ

ให้ $x = a\sin(\theta)$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ แล้วจะได้ว่า $\sqrt{a^2-a^2\sin^2(\theta)} = a\cos(\theta)$

รูปแบบที่ 2 ถ้าฟังก์ชันมีเทอมของ $\sqrt{a^2+x^2}$ ประกอบ

ให้ $x = a\tan(\theta)$, $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ แล้วจะได้ว่า $\sqrt{a^2+a^2\tan^2(\theta)} = a\sec(\theta)$

รูปแบบที่ 3 ถ้าฟังก์ชันมีเทอมของ $\sqrt{x^2-a^2}$ ประกอบ

ให้ $x = a\sec(\theta)$, $\theta \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ แล้วจะได้ว่า $\sqrt{a^2\sec^2(\theta)-a^2} = a\tan(\theta)$

เมื่ออินทิเกรตแล้วต้องเปลี่ยน θ ให้กลับเป็นตัวแปร x อย่างเดิม โดยใช้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากช่วยพิจารณาเพื่อความสะดวก

ตัวอย่างที่ 25 จงหา $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx$

วิธีทำ ให้ $x = 2\sec(\theta)$ แล้วจะได้ $dx = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$

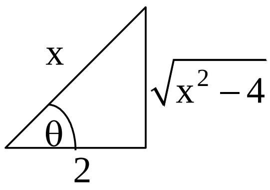
และ $\sqrt{x^2-4} = 2\tan(\theta)$

ดังนั้น $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{1}{2\tan(\theta)} \cdot \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$

$= \int \frac{1}{2} \cdot \sec(\theta)d\theta$

$= \frac{1}{2}\ln|\sec(\theta)+\tan(\theta)|+c$

จาก $x = 2\sec(\theta)$ จะได้ว่า $\sec(\theta) = \frac{x}{2}$



รูปที่ 2.1

ดังนั้น $\cos(\theta) = \frac{2}{x}$

(สามารถวาดรูปสามเหลี่ยมประกอบการพิจารณา ดังรูปที่ 2.1)

สรุปได้ว่า $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+c$

ตัวอย่างที่ 26 จงหา $\int \frac{x^3}{\sqrt{9-x^2}}dx$

ตัวอย่างที่ 27 จงหา $\int \frac{1}{(1+9x^2)^2}dx$

ตัวอย่างที่ 28 จงหา $\int \frac{dx}{\sqrt{25x^2 - 4}}$

แบบฝึกหัดที่ 2.3

1. จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1.1 $\int \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

1.2 $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx$

1.3 $\int \sqrt{25-x^2}dx$

1.4 $\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$

1.5 $\int \frac{dx}{(4+x^2)^2}$

1.6 $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-4x^2}}$

1.7 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}$

1.8 $\int \sqrt{3-2x-x^2}dx$

1.9 $\int \frac{x-1}{x^2+x+1}dx$

1.10 $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}$

2. จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{4+x^2}$

2.2 $\int_{0}^{1} x(3x^2+1)^{3/2}$

2.2 $\int_{1}^{3/2} \frac{(x-1)dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

2.4 $\int_{2}^{4} \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}$

2.5 $\int_{\sqrt{2}-1}^{1} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{2x+x^2}}$

2.6 $\int_{0}^{\ln(4)} \frac{e^x dx}{\sqrt{9+e^{2x}}}$

2.7 $\int_{\ln(3/4)}^{\ln(4/3)} \frac{e^x dx}{(e^{2x}+1)^{3/2}}$

2.8 $\int_{1/12}^{1/4} \frac{2dx}{\sqrt{x}+4x\sqrt{x}}$

2.9 $\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1+(\ln(x))^2}}$

2.10 $\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^2}dx$

การอินทิกรตทีละส่วน

การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูปฟังก์ชันผลคูณ $f(x)\cdot g(x)$ สามารถหาได้โดยการอินทิเกรตทีละส่วนได้ดังนี้

ถ้าให้ $u = f(x)$ และ $v = g(x)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันของตัวแปร x และต่างก็มีอนุพันธ์

จะได้ว่า $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

ดังนั้น $$uv = \int u\frac{dv}{dx}\,dx + \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

หรือ $$uv = \int u\,dv + \int v\,du \qquad \text{---(1)}$$

จากสมการ (1) จะได้สูตรการอินทิเกรตทีละส่วน ดังนี้

$$\boxed{\int u\,dv = uv - \int v\,du}$$

จะเห็นว่าการอินทิเกรตทีละส่วนนั้น เป็นการเปลี่ยนการอินทิเกรตจากรูปแบบ $\int u\,dv$ ไปสู่รูปแบบ $\int v\,du$ ดังนั้นต้องเลือก u และ dv ให้เหมาะสมโดยยึดหลักว่าต้องทำให้อินทิกรัลขั้นต่อไปง่ายขึ้นกว่าเดิม และนอกจากนั้นต้องคำนึงถึงด้วยว่า dv ที่เลือกต้องสามารถอินทิเกรตได้เพื่อหา v แล้วแทนเข้าไปในสูตรการอินทิเกรตทีละส่วน

ตัวอย่างที่ 29 จงหา $\int \ln(x)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln(x)$ และ $dv = dx$

$du = \frac{1}{x}dx$ และ $v = x$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned}\int \ln(x)\,dx &= x\ln(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}dx\\ &= x\ln(x) - \int 1\,dx\\ &= x\ln(x) - x + c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 30 จงหา $\int x\ln(x)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \ln(x)$ และ $dv = xdx$

$du = \frac{1}{x}dx$ และ $v = \frac{x^2}{2}$

จะได้ว่า

$$\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \int \frac{x}{2}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + c$$

ตัวอย่างที่ 31 จงหา $\int x\sin(x)\,dx$

ตัวอย่างที่ 32 จงหา $\int x\arctan(x)\,dx$

ตัวอย่างที่ 33 จงหา $\int x^2 e^x \, dx$

ตัวอย่างที่ 34 จงหา $\int e^x \sin(x) \, dx$

แบบฝึกหัดที่ 2.4

1. จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1.1 $\int x \cdot \cos(2x)dx$

1.2 $\int x^2 e^{2x} dx$

1.3 $\int 3x^3 \sqrt{x^2+4}dx$

1.4 $\int e^x \sin(x)dx$

1.5 $\int x \cdot \operatorname{arccot} x dx$

1.6 $\int \arccos(x)dx$

1.7 $\int x \cdot \sec^2(x)dx$

1.8 $\int \frac{\arctan x}{x^2}dx$

1.9 $\int x \cdot 2^x dx$

1.10 $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

2. จงหาค่าอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x}dx$

2.2 $\int_{0}^{2} x^2 e^{-x} dx$

2.3 $\int_{0}^{\pi/2} x \cos 4x dx$

2.4 $\int_{-1}^{1} x\sqrt{1-x}dx$

2.5 $\int_{0}^{1} \frac{\arcsin x}{x^2}dx$

2.6 $\int_{0}^{\pi/2} x^2 \sin(2x)dx$

2.7 $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} 2x \arcsin(x^2)dx$

2.8 $\int_{\ln(3)}^{\ln(7)} (x^2+x+1)e^x dx$

2.9 $\int_{2/\sqrt{3}}^{2} x \operatorname{arcsec}(x)dx$

2.10 $\int_{2}^{e} x^3 \ln(x)dx$

การอินทิกรตโดยใช้เศษส่วนย่อย

การอินทิเกรตฟังก์ชันที่อยู่ในรูปฟังก์ชันผลหาร $\frac{f(x)}{g(x)}$ หรือฟังก์ชันตรรกยะ เมื่อ f(x) และ g(x) ต่างเป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 จะต้องทำให้เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้เสียก่อน นั่นคือดีกรีของ f(x) ต้องน้อยกว่าดีกรีของ g(x) ซึ่งทำโดยนำส่วนไปหารเศษจนให้ได้ฟังก์ชันตรรกยะแท้ ดังนี้

(1) $\frac{x^5+2x^3-x+1}{x^6-5x^5+2x}$ เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

(2) $\frac{x^4-2x+1}{x^2+3}$ ไม่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

สามารถทำให้เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ดังนี้ $\frac{x^4-2x+1}{x^2+3}=x^2-3+\frac{-2x+10}{x^2+3}$

(3) $\frac{x^2+3}{x^2-1}$ ไม่เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้

สามารถทำให้เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้ดังนี้ $\frac{x^2+3}{x^2-1}=1+\frac{4}{x^2-1}$

เมื่อทำให้เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้แล้ว จะมีเทอมอื่นเพิ่มขึ้นมาคือฟังก์ชันพหุนามเท่านั้น ซึ่งสามารถอินทิเกรตได้ง่ายขึ้น

ขั้นตอนที่ 2 พิจารณาว่าสามารถแยกตัวประกอบได้หรือไม่ ถ้าแยกได้ก็สามารถทำฟังก์ชัน $\frac{f(x)}{g(x)}$ ให้เป็นเศษส่วนย่อยได้ ซึ่งสามารถแบ่งออกเป็น 3 กรณี ดังนี้

<u>*หมายเหตุ*</u> โดยฟังก์ชันที่กล่าวถึงต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันตรรกยะแท้แล้ว

กรณีที่ 1 เมื่อตัวประกอบแต่ละตัวของ g(x) มีกำลังสูงสุดเป็น 1 และไม่มีตัวประกอบซ้ำกันเลย เช่น

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)...(x-k)}$$

เราสามารถจัดรูปฟังก์ชันตรรกยะแท้นี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อยได้โดยสมมติให้

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)} + \ldots + \frac{K}{(x-k)} \quad (1)$$

เมื่อ A , B , C , ... , K เป็นค่าคงตัว แล้วทำการคำนวณหาค่า A , B , C , ... , K โดยวิธีการหาตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) นำมาแทนค่าลงในสมการ **(1)** ดังนี้

จาก

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-c)} + \ldots + \frac{K}{(x-k)}$$

จะได้ว่า

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A[(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-k)] + \ldots + K[(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-(k-1))]}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-k)}$$

ดังนั้น

$$f(x) = A[(x-b)(x-c)(x-d)\ldots(x-k)] + \ldots + K[(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-(k-1))] \quad (2)$$

แล้วดำเนินการหาค่า A , B , C , ... , K ด้วยวิธีต่อไปนี้

วิธีที่ 1 กำหนดค่า x ต่างๆ กัน ทั้งหมดเท่ากับจำนวนค่าคงตัวที่ต้องการหา แทนค่า x แต่ละค่าลงในสมการ **(2)** จะได้จำนวนสมการเท่ากับจำนวนค่าคงตัว แล้วแก้สมการหาค่าคงตัวออกมา

หรือ ***วิธีที่ 2*** โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ของ x ซึ่งมีกำลังเท่ากัน ให้มีค่าเท่ากันก็จะได้จำนวนสมการเท่ากับจำนวนค่าคงตัว แล้วดำเนินการแก้สมการหาค่า A , B , C , ... , K

หรืออาจจะใช้ทั้งวิธีที่ 1 และวิธีที่ 2 ในการหาค่า A , B , C , ... , K ร่วมกันก็ได้

ขั้นตอนที่ 3 นำค่า A , B , C , ... , K ที่หาได้แทนลงในสมการ (1) แล้วดำเนินการเพื่อหาค่าการอินทิเกรตต่อไป

ตัวอย่างที่ 35 จงหา $\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx$

วิธีทำ เพราะว่า $$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$$

จะได้ว่า $$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$$

นั่นคือ $$x = A(x-3)+B(x-2)$$

หาค่า A , B โดยการแทนค่า x ดังนี้

ให้ $x = 2$ จะได้ $2 = -A$ $\therefore$ $A = -2$

ให้ $x = 3$ จะได้ $3 = B$ $\therefore$ $B = 3$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x^2-5x+6}dx &= \int \frac{-2}{(x-2)} + \frac{3}{(x-3)}dx \\ &= \int \frac{-2}{(x-2)}dx + \int \frac{3}{(x-3)}dx \\ &= -2\ln|x-2|+3\ln|x-3|+c \\ &= \ln\left|\frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}\right|+c\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 36 จงหา $\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}dx$

กรณีที่ 2 เมื่อตัวประกอบแต่ละตัวของ $g(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็น 1 แต่มีตัวประกอบซ้ำกันบางตัว อาทิเช่น

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3}$$

เราสามารถจัดรูปฟังก์ชันตรรกยะแท้นี้ให้อยู่ในรูปเศษส่วนย่อยได้โดยสมมติให้

$$\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)^2(x-c)^3} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-b)^2} + \frac{D}{(x-c)} + \frac{E}{(x-c)^2} + \frac{F}{(x-c)^3}$$

เมื่อ $A, B, C, \ldots, F$ เป็นค่าคงตัว

หรือกล่าวโดยทั่วไปแล้ว ทุกๆ ตัวประกอบของ $g(x)$ ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $(ax+b)^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้เศษส่วนย่อยเป็นจำนวน k เทอมด้วยกัน สำหรับแต่ละตัวประกอบเหล่านั้น และเศษส่วนย่อยเหล่านั้นจะสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\frac{A_1}{(ax+b)} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \ldots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

เมื่อ A_i , $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ เป็นค่าคงตัว ***แล้วดำเนินการหาค่าคงตัวเหล่านั้น เพื่อหาค่าอินทิเกรตต่อไปเหมือนกับกรณีที่ 1***

ตัวอย่างที่ 37 จงหา $\int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx$

วิธีทำ จะได้ว่า $$\frac{6x+7}{(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

นั่นคือ
$$\begin{aligned} 6x+7 &= A(x+2)+B \\ &= Ax+2A+B \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ x จะได้ว่า

$$A = 6 \qquad \text{---(1)}$$
$$2A+B = 7 \qquad \text{---(2)}$$

แก้สมการจะได้ $A = 6$, $B = -5$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \int \frac{6x+7}{(x+2)^2}dx &= \int \frac{6}{(x+2)} + \frac{-5}{(x+2)^2}dx \\ &= \int \frac{6}{(x+2)}dx - \int \frac{5}{(x+2)^2}dx \\ &= \int \frac{6}{(x+2)}dx - \int \frac{5}{(x+2)^2}\frac{d(x+2)}{1} \\ &= \int \frac{6}{(x+2)}dx - \int 5(x+2)^{-2}d(x+2) \\ &= 6\ln|x+2| + 5(x+2)^{-1} + c \\ &= 6\ln|x+2| + \frac{5}{x+2} + c \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 38 จงหา $\int \frac{2x+1}{x^3-2x^2+x}dx$

กรณีที่ 3 เมื่อตัวประกอบแต่ละตัวของ $g(x)$ มีกำลังสูงสุดเป็น 2 เช่น (ax^2+bx+c) เป็นตัวประกอบและมีซ้ำกันอยู่ k ตัว เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้เศษส่วนย่อยจำนวน k เทอมด้วยกัน สำหรับแต่ละตัวประกอบเหล่านั้น และเศษส่วนย่อยเหล่านั้นสามารถเขียนอยู่ในรูปดังต่อไปนี้

$$\frac{A_1x+B_1}{(ax^2+bx+c)}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3}+\ldots+\frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

เมื่อ A_i, B_i , $i=1,2,3,\ldots,k$ เป็นค่าคงตัว ***แล้วดำเนินการหาค่าคงตัวเหล่านั้น เพื่อหาค่าอินทิเกรตต่อไปเหมือนกับกรณีที่ 1***

ตัวอย่างที่ 39 จงหา $\int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

วิธีทำ จะได้ว่า
$$\frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{C}{(x-1)} + \frac{D}{(x-1)^2}$$

นั่นคือ
$$\begin{aligned} -2x+4 &= (Ax+B)(x-1)^2 + C(x-1)(x^2+1) + D(x^2+1) \\ &= (A+C)x^3 + (-2A+B-C+D)x^2 \\ &\quad + (A-2B+C)x + (B-C+D) \end{aligned}$$

โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ x จะได้ว่า

$$\begin{aligned} A+C &= 0 && \text{---(1)} \\ -2A+B-C+D &= 0 && \text{---(2)} \\ A-2B+C &= -2 && \text{---(3)} \\ B-C+D &= 4 && \text{---(4)} \end{aligned}$$

แก้สมการจะได้ $A=2$, $B=1$, $C=-2$, $D=1$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} \int \frac{-2x+4}{(x^2+1)(x-1)^2}dx &= \int \frac{2x+1}{(x^2+1)} + \frac{-2}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \int \frac{2x+1}{(x^2+1)}dx + \int \frac{-2}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= \int \frac{2x}{(x^2+1)}dx + \int \frac{1}{(x^2+1)}dx \\ &\quad + \int \frac{-2}{(x-1)}dx + \int \frac{1}{(x-1)^2}dx \\ &= 2\ln|x^2+1| + \arctan(x) - 2\ln|x-1| \\ &\quad - \frac{1}{(x-1)} + c \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 40 จงหา $\int \frac{x^2+2}{4x^5+4x^3+x}dx$

แบบฝึกหัดที่ 2.5

1. จงหาอินทิกรัลต่อไปนี้

1.1 $\int \frac{x^2+5x-2}{(x+1)(x-2)(x+3)}dx$

1.2 $\int \frac{4x^2+2x}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$

1.3 $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx$

1.4 $\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$

1.5 $\int \frac{2x^3+x^2+4}{(x^2+4)^2}dx$

1.6 $\int \frac{x^3+4x^2}{x^3+x}dx$

1.7 $\int \frac{e^x}{e^{2x}+e^x-6}dx$

1.8 $\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)(1+\cos^2(x))}dx$

1.9 $\int \frac{x+4}{x^2+x}dx$

1.10 $\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+\sin(x)-6}dx$

2. จงหาค่าของอินทิกรัลจำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$

2.2 $\int_2^6 \frac{x^3}{x^2-2x+1}dx$

2.3 $\int_{-1}^0 \frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}dx$

2.4 $\int_{-1}^1 \frac{x^4+2x}{x^2+1}dx$

2.5 $\int_{-2}^{-1} \frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)^2}dx$

2.6 $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3x^2+x+4}{x^3+x}dx$

2.7 $\int_{-1}^2 \frac{x^2+3x-4}{x^3-4x^2+4x}dx$

2.8 $\int_1^2 \frac{6x^2+1}{x^2(x-1)^3}dx$

2.9 $\int_4^6 \frac{x^2}{(2x-7)^2}dx$

2.10 $\int_{-3}^0 \frac{x^4+81}{x(x^2+9)^2}dx$