บทที่ 1
การอินทิเกรตเบื้องต้น

ในหัวข้อเรื่องอนุพันธ์ เราสามารถหาความความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง โดยการหาอนุพันธ์ของสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ ในทางกลับกัน ถ้าเราทราบความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง คือ $m = \frac{dy}{dx}$ แล้วเราจะสามารถหาสมการเส้นโค้งได้อย่างไร

สมมติให้สมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ มีอนุพันธ์คือ $f'(x) = 3x^2$ แล้วฟังก์ชันนั้นคืออะไร นั่นคือต้องการถามหาฟังก์ชันอะไรที่มีอนุพันธ์เท่ากับ $3x^2$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าคำตอบคือ $f(x) = x^3$

แต่ถามต่อว่ามีคำตอบอื่นอีกหรือไม่ คำตอบคือมีและมีเป็นจำนวนอนันต์ อาทิ $f(x) = x^3 + 1$ หรือ $f(x) = x^3 - 3$ หรืออื่นๆ อีกจำนวนอนันต์ จึงสรุปได้ว่าฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์เท่ากับ $3x^2$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของ $f(x) = x^3 + c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

ดังนั้น วิธีการหาฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อกำหนด $f'(x)$ มาให้เรียกว่า **<u>การอินทิเกรต</u>**

การอินทิเกรตไม่จำกัดเขต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกระบวนการหาฟังก์ชันจากค่าเริ่มต้นที่เป็นฟังก์ชันอนุพันธ์ นั่นคือการหาฟังก์ชันอนุพันธ์ย้อนกลับ ซึ่งเราเรียกว่าการอินทิเกรตหรือปฏิยานุพันธ์นั่นเอง

บทนิยามที่ 1.1

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีค่าบนช่วง I เราเรียก F ว่าเป็น**<u>การอินทิเกรตของ f</u>** ถ้า $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in I$

ทฤษฎีบทที่ 1.1

ถ้า F เป็นการอินทิเกรตของ f บนช่วง I แล้ว G เป็นการอินทิเกรตของ f บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ $G(x) = F(x) + c$ สำหรับทุกค่า $x \in I$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

พิสูจน์ ($\leftarrow$)

ถ้า $G(x) = F(x) + c$ และ $F'(x) = f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ

จะได้ว่า $G'(x) = \frac{d}{dx}(F(x) + c) = F'(x) + 0 = f(x)$

($\rightarrow$)

สมมติให้ G เป็นการอินทิเกรตของ f

และ $H(x) = G(x) - F(x)$ สำหรับทุกค่า a , b $(a < b)$ ซึ่ง H เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a , b]$ และสามารถหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a , b)

จะได้ว่า $H'(c) = \dfrac{H(b) - H(a)}{b - a}$ สำหรับบางค่า $c \in (a, b)$

แต่ $H'(c) = 0$ จึงได้ว่า $H(b) = H(a)$

เนื่องจาก a และ b เป็นจุดบนช่วง จะได้ว่า H เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว c

ดังนั้น $G(x) - F(x) = c$

สรุปได้ว่า $G(x) = F(x) + c$

หลักการเบื้องต้นของการอินทิเกรตไม่จำกัดเขต

จงพิจารณาการแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$

จาก $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$ สามารถเขียนอยู่ในรูปของ $dy = f(x)dx$

การดำเนินการหาคำตอบของสมการดังกล่าว เรียกว่า**<u>การอินทิเกรต</u>** หรือเรียกว่า **<u>การอินทิเกรตไม่จำกัดเขต</u>** ของ f เทียบกับ x ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int$

และคำตอบทั่วไป เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $y = \int f(x)dx = F(x) + c$

โดยเรียก f ว่า **<u>อินทิแกรนด์</u>**

x ว่า **<u>ตัวแปรของการอินทิเกรต</u>**

c แทนค่าคงตัวใดๆ ของการอินทิเกรต

$F(x)$ แทนการอินทิเกรตของ f

กฎพื้นฐานของการอินทิเกรต

บทกลับของการอินทิเกรตกับอนุพันธ์ สามารถเขียนได้หลากหลาย ในที่นี้ขอนิยามกฎดังนี้

$\int F'(x)dx = F(x) + c$ เรียกการอินทิเกรตนี้ว่าเป็นบทกลับของอนุพันธ์

อย่างไรก็ตาม

ถ้า $\int f(x)dx = F(x) + c$ แล้ว $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$ เรียกอนุพันธ์นี้ว่าเป็นบทกลับของการอินทิเกรต

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int 3dx$

วิธีทำ จะได้ว่า $\int 3dx = 3x + c$

เนื่องจาก $\frac{d}{dx}(3x + c) = 3$

นั่นคือ $3x + c$ เป็นฟังก์ชันอนุพันธ์กลับของ 3

และ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int 2xdx$

วิธีทำ จะได้ว่า $\int 2xdx = x^2 + c$

เนื่องจาก $\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$

นั่นคือ x^2 เป็นฟังก์ชันอนุพันธ์กลับของ $2x$

และ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\int 4x^2 dx$

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\int 7x^6 dx$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา $\int 11x^5 dx$

จากตัวอย่างที่ 2 - 5 ข้างต้นสามารถสรุปได้ว่า

$$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนตรรกยะและ } n \neq -1$$

จะได้ว่า $F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะและ $n \neq -1$

ดังนั้น $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ x^n ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนตรรกยะและ } n \neq -1$$

กฎของการอินทิเกรตไม่จำกัดเขต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกฎของการอินทิเกรตไม่จำเขตที่ใช้เป็นพื้นฐานของการอินทิเกรตในระดับสูงต่อไป ดังต่อไปนี้

บทนิยามที่ 1.2

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีค่าบนช่วง I และ c เป็นค่าคงตัวใดๆ จะได้ว่า

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$ เมื่อ n เป็นจำนวนตรรกยะและ $n \neq -1$
2. $\int dx = \int 1\,dx = x + c$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาค่าของ $\int \frac{(x^3-1)(4x^2-7)}{(x-1)} dx$

หมายเหตุ จากตัวอย่างที่ 7 การอินทิเกรตแต่ละเทอมจะให้ค่าคงตัวออกมาซึ่ง ณ ตัวอย่างนี้มีอยู่ 5 ค่าด้วยกัน คือ c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 ดังนั้นเพื่อความสะดวก และให้ง่ายขึ้น จึงรวมค่าคงตัวทั้ง 5 ค่านี้เป็นค่าคงตัวเพียงค่าเดียว ดังนี้

$$c = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5$$

ข้อตกลง ตั้งแต่ตัวอย่างที่ 8 จะขอใช้ค่าคงที่ c เพียงค่าเดียวเท่านั้น

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ $\int x^3 (x + 5x^4)\, dx$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาสมการของเส้นโค้งที่มีความชันที่จุด (x, y) เป็น $4x^2$ และผ่านจุด $(2, -1)$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาสมการของเส้นโค้งบนระนาบ xy ซึ่งผ่านจุด $(1, 4)$ และมีความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด (x, y) ใดๆ เป็น $(2x+1)^3$

แบบฝึกหัดที่ 1.1

1. จงหาอินทิกรัลไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1.1 $\int (x+1)dx$

1.2 $\int (5-7x)dx$

1.3 $\int (2x^2+10x-1)dx$

1.4 $\int \left(8\sqrt{x^3}-2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$

1.5 $\int \sqrt{x}(2-3x)dx$

1.6 $\int \sqrt[3]{x}(x-4)dx$

1.7 $\int \left(8x^3+\frac{1}{2x^2}\right)dx$

1.8 $\int x^2(1-2x^2)dx$

1.9 $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$

1.10 $\int \frac{x\sqrt{x}+\sqrt{x}}{x^2}dx$

2. จงใช้อนุพันธ์ตรวจสอบว่า $\int (7x+1)^2\,dx = \frac{(7x+1)^3}{3}+c$

3. จงหาสมการเส้นโค้ง $y = f(x)$ บนระนาบ xy ที่ผ่านจุด $(9\,,2)$ ซึ่งมีความชันเส้นสัมผัสเส้นโค้งเท่ากับ $2(1-x)^2$

4. จงหาสมการเส้นโค้งที่มีคุณสมบัติดังนี้

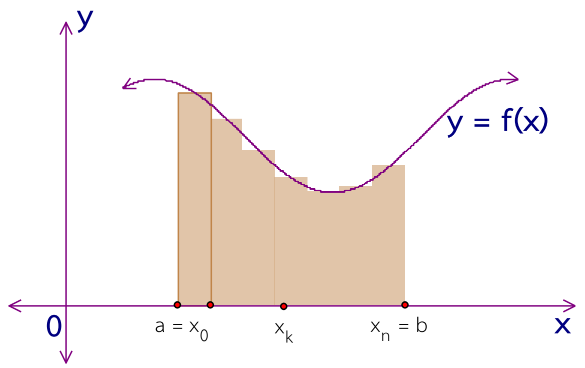
4.1 $\frac{d^2y}{dx^2} = 8$

4.2 เส้นโค้งผ่านจุด $(2\,,0)$ และเส้นสัมผัสขนานกับแกน y

5. จากข้อ 4 จะมีสมการเส้นโค้งตามคุณสมบัติเหล่านี้เป็นจำนวนเท่าใด

การคำนวณหาค่าการอินทิเกรตโดยใช้ลิมิตของผลบวก หรือการอินทิเกรตจำกัดเขต

ในเรื่องนี้จะเป็นการศึกษาถึงที่มาของการอินทิกรัลจำกัดเขจ ที่ได้มาจากการประยุกต์ในการหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้งกับแกน x โดยจะเริ่มจากการพิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและ $f(x) \geq 0$ บน $[a , b]$ ดังรูปที่ 1.1



รูปที่ 1.1

เราจะหาพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน x บน $[a , b]$ โดยแบ่งช่วง $[a , b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยดังนี้

$$[x_0 , x_1], [x_1 , x_2], \ldots , [x_{k-1} , x_k], \ldots , [x_{n-1} , x_n]$$

โดยที่ $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

ให้ $P = \{x_1 , x_2 , x_3 , \ldots , x_n\}$ ซึ่งเรียกว่า **<u>ผลแบ่งกั้น</u>** ของช่วง $[a , b]$

ผลแบ่งกั้น P จะให้ช่วงย่อยปิด n ช่วง เราจะใช้ $[x_{k-1} , x_k]$ เป็นตัวแทนของช่วงย่อยเหล่าดังกล่าว โดยค่า k มีค่าตั้งแต่ 1 ถึง n และเรียก $[x_{k-1} , x_k]$ ว่าช่วงย่อยที่ k ของ P

ให้ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ เป็นความยาวของช่วงย่อยที่ k

C_k เป็นจุดใดๆ ใน $[x_{k-1} , x_k]$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a , b]$

ดังนั้น $f(C_k)$ มีค่า ทุกๆ ค่า $k = 1 , 2 , 3 , \ldots , n$

สร้างรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วงย่อยที่ k ซึ่งมีความยาวเท่ากับ Δx_k และมีความสูงเท่ากับ $f(C_k)$

จะได้พื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าบนช่วงย่อยที่ k คือ $f(C_k) \cdot \Delta x_k$ ซึ่งมีช่วงย่อยทั้งหมด n ช่วง

ให้ S_P แทนผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้ง n ช่วงย่อย

จึงได้ว่า $S_P = f(C_1)\cdot\Delta x_1 + f(C_2)\cdot\Delta x_2 + \ldots + f(C_k)\cdot\Delta x_k + \ldots + f(C_n)\cdot\Delta x_n$

$$S_P = \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\cdot\Delta x_k$$

จะเห็นว่าผลบวกของ S_P ขึ้นอยู่กับผลบวกแบ่งกั้น P และค่าของจุด C_k และเราเรียก S_P ว่า **<u>ผลบวกรีมันน์</u>** สำหรับ f บน [a , b]

$$\text{ถ้า} \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ |P|\to 0}} S_P \quad \text{หรือ} \quad \lim_{\substack{n\to\infty \\ |P|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\cdot\Delta x_k$$

ถ้าค่า S_P มีค่าไม่ขึ้นกับผลแบ่งกั้น P กับจุด C_k ในช่วงย่อยที่ k , k = 1 , 2 , 3 , ... , n เราเรียกลิมิตนี้ว่า **<u>พื้นที่ของอาณาบริเวณระหว่างเส้นโค้ง y = f(x) กับแกน x บน [a , b]</u>** และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ |P|\to 0}} S_P = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |P|\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\cdot\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx$$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาผลบวกรีมันน์สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ บนช่วง [0 , 2] ซึ่งเกิดจาก

1) ผลแบ่งกั้น $P = \left\{0, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ และเลือกจุด C_k เป็นจุดทางขวาสุดของช่วงย่อยที่ k

วิธีทำ จากโจทย์ให้ $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = 2$

จะได้ว่า $\Delta x_1 = x_1 - x_0 = 1$, $\Delta x_2 = \frac{1}{2}$, $\Delta x_3 = \frac{1}{2}$

และ $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{3}{2}$, $C_3 = 2$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
S_P &= f(C_1)\cdot\Delta x_1 + f(C_2)\cdot\Delta x_2 + f(C_3)\cdot\Delta x_3 \\
&= f(1)\cdot(1) + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= (1)^3(1) + \left(\frac{3}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) + (2)^3\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= 1 + \frac{27}{16} + 4 \qquad = \frac{107}{16} \qquad \approx 6.69
\end{aligned}$$

2) ผลแบ่งกั้น $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{4}{3}, 2\right\}$ และเลือกจุด C_k เป็นจุดทางซ้ายสุดของช่วงย่อยที่ k

วิธีทำ จากโจทย์ให้ $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = \frac{4}{3}$, $x_4 = 2$

จะได้ว่า $\Delta x_1 = \frac{1}{2}$, $\Delta x_2 = \frac{1}{2}$, $\Delta x_3 = \frac{1}{3}$, $\Delta x_4 = \frac{2}{3}$

และ $C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{2}$, $C_3 = 1$, $C_4 = \frac{4}{3}$

ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
S_P &= f(C_1)\cdot\Delta x_1 + f(C_2)\cdot\Delta x_2 + f(C_3)\cdot\Delta x_3 + f(C_4)\cdot\Delta x_4 \\
&= f(0)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= (0)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + (1)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right) \\
&= 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{3} + \frac{128}{81} \qquad \approx 1.98
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 12 จงหาผลบวกรีมันน์สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = x^3$ บนช่วง $[0 , 2]$ ซึ่งเกิดจากการแบ่งช่วง $[0 , 2]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่าๆ กัน และเลือก C_k เป็นจุดกึ่งกลางของช่วงย่อยที่ k

ตัวอย่างที่ 13 จงหาค่าของ $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$ โดยใช้บทนิยามของผลบวกรีมันน์

แบบฝึกหัดที่ 1.2

1. จงหาผลบวกรีมันน์สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = 1 + 2x$ บนช่วง $[0, 1]$ โดยที่

   1.1 ผลแบ่งกั้น $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ และเลือกจุด C_k เป็นจุดทางซ้ายสุดของช่วงย่อยที่ k

   1.2 ผลแบ่งกั้น $P = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ และเลือกจุด C_k เป็นจุดทางขวาสุดของช่วงย่อยที่ k

   1.3 โดยการแบ่งช่วง $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่าๆ กัน และเลือกจุด C_k เป็นจุดกึ่งกลางของช่วงย่อยที่ k

2. จงหาผลบวกรีมันน์สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = 3x^2$ โดยแบ่งช่วง $[0, 1]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่าๆ กัน และเลือก C_k เป็นจุดกึ่งกลางของช่วงย่อยที่ k

3. จงหาค่าการอินทิเกรตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ผลบวกรีมันน์ที่แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยเท่าๆ กัน และ C_k เป็นจุดกึ่งกลางของช่วงย่อยที่ k

   3.1 $\int_1^2 -x\,dx$

   3.2 $\int_0^1 (1 - x^2)\,dx$

   3.3 $\int_{3/2}^3 (2x - 3)\,dx$

   3.4 $\int_{-1}^4 (2x - 3)\,dx$

   3.5 $\int_1^2 (x^2 + 1)\,dx$

   3.6 $\int_{-2}^2 (2x^3 + 3)\,dx$

กฎการอินทิเกรตจำกัดเขต

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงกฎการอินทิเกรตจำเขตที่ใช้เป็นพื้นฐานของการอินทิเกรตในระดับสูงต่อไป ดังต่อไปนี้

บทนิยามที่ 1.3

ถ้า f อินทิเกรตได้บนช่วง [a , b] จะได้ว่า

1. $\int_{c}^{c} f(x)dx = 0$ สำหรับทุกค่า $c \in [a,b]$
2. $\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$

ทฤษฎีบทที่ 1.2

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บนช่วง [a , b] และ k เป็นค่าคงตัวใดๆ จะได้ว่า

1. $\int_{a}^{b} k\,dx = k(b-a)$
2. $\int_{a}^{b} kf(x)dx = k\int_{a}^{b} f(x)dx$
3. $\int_{a}^{b} [f(x)+g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{b} g(x)dx$
4. $\int_{a}^{b} [f(x)-g(x)]dx = \int_{a}^{b} f(x)dx - \int_{a}^{b} g(x)dx$
5. $\int_{a}^{b} kf(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$ เมื่อ $c \in [a,b]$
6. ถ้า $f(x) \geq 0$ เมื่อ $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq 0$
7. ถ้า $f(x) \geq g(x)$ เมื่อ $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $\int_{a}^{b} f(x)dx \geq \int_{a}^{b} g(x)dx$

8. ถ้า $n \le f(x) \le N$ เมื่อ $x \in [a,b]$ จะได้ว่า $n(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le N(b-a)$

พิสูจน์ (3) จาก

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[f(x_k)+g(x_k)]\cdot\Delta x_k$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x_k\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\Delta x_k$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

พิสูจน์ (1 – 2 , 4 – 8 ทำเป็นแบบฝึกหัด)

ตัวอย่างที่ 14 จงใช้ทฤษฎีบทที่ 1.2 ข้อ 3 และ 4 หาค่าของ $\int_0^2 (3+2x^3)dx$

วิธีทำ จะได้ว่า

$$\int_0^2 (3+2x^3)dx = \int_0^2 3\,dx + \int_0^2 2x^3\,dx$$

$$= \int_0^2 3\,dx + 2\int_0^2 x^3\,dx$$

จากทฤษฎีบทที่ 1.2 ข้อ 2 จะได้

$$\int_0^2 3\,dx = 3(2-0) = 6$$

และจากตัวอย่างที่ 12 ได้ว่า

$$\int_0^2 x^3\,dx = 4$$

ดังนั้น

$$\int_0^2 (3+2x^3)dx = 6+4 = 10$$

ตัวอย่างที่ 15 กำหนดให้ $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 7$, $\int_{2}^{5} f(x)\,dx = 3$, $\int_{-2}^{2} g(x)\,dx = 10$ จงหา

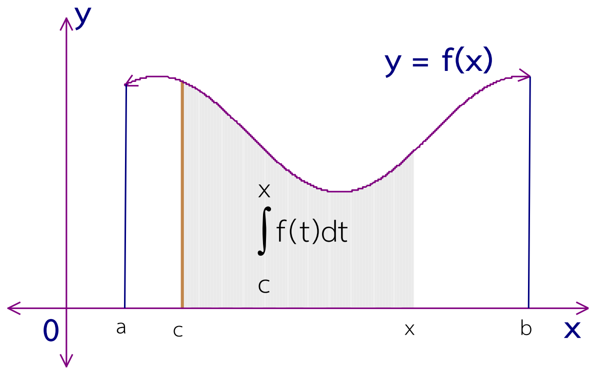
1) $\int_{5}^{2} f(x)\,dx$ 2) $\int_{-2}^{2} [5f(x) - 3g(x)]\,dx$ 3) $\int_{-2}^{5} f(x)\,dx$

วิธีทำ 1) จะได้ว่า $\int_{5}^{2} f(x)\,dx = -\int_{2}^{5} f(x)\,dx = -3$

ตัวอย่างที่ 16 จงใช้ทฤษฎีบทที่ 1.2 ข้อ 5 หาค่าของ $\int_{-1}^{1} |x|\,dx$

ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

จงพิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วง [a , b] ดังรูปที่ 1.2



รูปที่ 1.2

ให้ $c \in [a,b]$ เป็นค่าคงตัว และ $x \in [a,b]$ จะเห็นว่า $\int_c^x f(t)dt$ เป็นพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(t)$ กับแกน t จาก $t = c$ ถึง $t = c$ ซึ่งค่าที่ออกมาขึ้นอยู่กับค่า x

ถ้าให้ $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ จะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่งมีค่าบนช่วง [a , b]

ทฤษฎีบทที่ 1.3 (ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส)

กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a , b] และ c เป็นค่าคงตัวในช่วง [a , b] จะได้ว่า $F(x) = \int_c^x f(t)dt$ เมื่อ $c\ ,\ x \in [a,b]$ ซึ่ง F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a , b] และมีอนุพันธ์บนช่วง (a , b) และ $F^{/}(x) = f(X)$

พิสูจน์ ถ้า $x\ ,\ x+h \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_c^{x+h} f(t)dt - \int_c^{x} f(t)dt \\ &= \left(\int_c^{x} f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt \right) - \int_c^{x} f(t)dt \quad \text{(จาก ทบ. 4.1 ข้อ 5)} \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

สำหรับ $h \neq 0$ จะได้ว่า $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x}^{x+h} f(t)dt$

สมมติให้ $h > 0$ และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[x, x+h]$

และให้ $u, v \in [x, x+h]$ จะได้ว่า $f(u) = n$ และ $f(v) = N$ เมื่อ n, N เป็นค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บนช่วง $[x, x+h]$

จากทฤษฎีบทที่ 1.2 ข้อ 8 จะได้ว่ามี $nh \le \displaystyle\int_{x}^{x+h} f(t)dt \le Nh$

ดังนั้น $f(u)h \le \displaystyle\int_{x}^{x+h} f(t)dt \le f(v)h$

เมื่อ $h > 0$ ทำให้ได้ว่า $f(u) \le \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_{x}^{x+h} f(t)dt \le f(v)$

$$f(u) \le \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \le f(v)$$

สำหรับกรณีที่ $h < 0$

สมมติให้ $h \to 0$ แล้ว $u \to x$ และ $v \to x+h$ ดังนั้น u, v เป็นค่าระหว่าง x กับ $x+h$ จะได้ว่า

$$\lim_{h\to 0} f(u) = \lim_{u\to x} f(u) = f(x)$$

และ
$$\lim_{h\to 0} f(v) = \lim_{v\to x+h} f(v) = f(x)$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x สามารถสรุปได้ว่า

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$$

ดังนั้น ถ้า $x = a, b$ และ F ต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

จะได้ว่า
$$\frac{d}{dx}\int_{c}^{x} f(t)dt = f(x)$$

ตัวอย่างที่ 17 ให้ $F(x) = \int_{c}^{x^2} \sqrt{2+t}\,dt$ จงหา $F^{/}(x)$

วิธีทำ ให้ $P(x) = \int_{c}^{x} \sqrt{2+t}\,dt$ ดังนั้น $F(x) = P(x^2)$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส จะได้ว่า

$$P^{/}(x) = \sqrt{2+x}$$

โดยกฎลูกโซ่จะได้ว่า $F^{/}(x) = \frac{d}{dx}P(x^2) = \frac{d}{dx}P(u) \quad ,u = x^2$

ดังนั้น $F^{/}(x) = \frac{d}{dx}P(u)\frac{du}{dx} = P^{/}(u)(2x) = \sqrt{2+u}(2x) = 2x\sqrt{2+x^2}$

ทฤษฎีบทที่ 1.4

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a , b] และ u เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วง [a , b] จะได้ว่า

$$f(x) = F^{/}(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{c}^{u} f(t)dt\right) = f(u)\frac{du}{dx}$$

พิสูจน์ ให้ $F(u) = \int_{c}^{u} f(t)dt$

โดยทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส จะได้ว่า

$$F^{/}(x) = \frac{d}{dx}F(u) = \frac{d}{dx}\left(\int_{c}^{u} f(t)dt\right) = f(u)$$

ดังนั้น $\frac{d}{dx}\left(\int_{c}^{u} f(t)dt\right) = \frac{d}{dx}F(u)$

$= f(u)\frac{du}{dx}$ จากกฎลูกโซ่

ตัวอย่างที่ 18 จงหาค่าของ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{1+t}$

ตัวอย่างที่ 19 จงหาค่าของ $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{1+t^2}$, $x \neq 0$

แบบฝึกหัดที่ 1.3

1. กำหนดให้ $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx = 6$, $\int_{-1}^{6} f(x)\,dx = 8$, $\int_{-1}^{6} g(x)\,dx = -5$ จงหา

1.1 $\int_{2}^{2} f(x)\,dx$ 1.2 $\int_{6}^{-1} g(x)\,dx$

1.3 $\int_{-1}^{2} 7f(x)\,dx$ 1.4 $\int_{2}^{6} f(x)\,dx$

1.5 $\int_{-1}^{6} [f(x) - g(x)]\,dx$ 1.6 $\int_{-1}^{6} [-5f(x) + 3g(x)]\,dx$

2. กำหนดให้ $\int_{0}^{3} h(x)\,dx = 2$ จงหา $\int_{0}^{3} h(u)\,du$

3. กำหนดให้ $\int_{-3}^{0} f(t)\,dt = \sqrt{3}$ จงหา $\int_{-3}^{0} \frac{g(r)}{2}\,dr$

4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

4.1 $y = \int_{0}^{\sqrt{x}} \cos(t)\,dt$ 4.2 $y = \int_{1}^{\cos(x)} 5t^3\,dt$

4.3 $y = \int_{2}^{x} \frac{1}{t^5}\,dt$ 4.4 $y = \int_{x^2}^{0} \sin(6\sqrt{t})\,dt$

4.5 $y = \int_{\tan(x)}^{0} \frac{2}{\sqrt[3]{2+3x}}\,dt$ 4.6 $y = \int_{x}^{x^3} \sqrt[5]{t+1}\,dt$

4.7 $y = \int_{0}^{x} t\sin(t)\,dt$ 4.8 $y = \int_{x}^{x+2} (4t+1)\,dt$

4.9 $y = \int_{-x}^{x} \frac{-2t^3}{3+t}\,dt$ 4.10 $y = \int_{2}^{x^2+x} \sin(t^2+1)\,dt$

5. จงหา $f(x)$ สำหรับค่าคงตัว c ใดๆ ที่ทำให้ $\int_c^x f(t)\,dt = x^2 + x - 2$

6. จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด ถ้าผิดจงยกตัวอย่างประกอบ

6.1 $\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)$

6.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a , b]$ แล้วค่าต่ำสุดของ $f(x)$ บนช่วง $[a , b]$ คือ $f(a)$

6.3 ค่าของ $\int_a^b f(x)\,dx$ มีค่าเป็นบวกเท่านั้น

6.4 ค่าของ $\int_3^3 \cos(x^2)\,dx$ มีค่าเท่ากับ 0

7. จงพิสูจน์ว่า

7.1 $\int_a^b x\,dx = \dfrac{b^2 - a^2}{2}$

7.2 $\int_a^b x^2\,dx = \dfrac{b^3 - a^3}{3}$

ทฤษฎีบทที่ 1.5 (ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ F เป็นฟังก์ชันซึ่ง $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุกค่า $x \in [a,b]$ จะได้ว่า

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

พิสูจน์ ให้ $g(x) = \int_c^x f(t)dt$

นั่นคือ $g'(x) = f(x)$ จะได้ว่า $F(x) = g(x) + c$

สำหรับ $a < x < b$ ซึ่ง f, F เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$

ถ้าให้ $x = a$ จะได้ว่า $g(a) = \int_c^a f(t)dt = 0$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (g(b) + c) - (g(a) + c) \\ &= g(b) - g(a) \\ &= g(b) \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

ฉะนั้น ถ้า $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ จะได้ว่า $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

ตัวอย่างที่ 20 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x}$ จงหาค่าของ $\int_1^4 \sqrt{x}dx$

วิธีทำ จะได้ว่า
$$\begin{aligned} \int_1^4 \sqrt{x}dx &= \int_1^4 x^{1/2}dx \\ &= \left(\frac{x^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1}\right)\Bigg|_{x=1}^{x=4} \\ &= \frac{2}{3}\left(4^{3/2} - 1^{3/2}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{2}{3}\left(8-1\right)$$

$$= \frac{14}{3}$$

ตัวอย่างที่ 21 จงหาค่าของ $\int_{0}^{1}(x^2+1)^3\,dx$

ตัวอย่างที่ 22 จงหาค่าของ $\int_{-1}^{4}|x^2-2x|\,dx$

การอินทิเกรตฟังก์ชันอดิศัย

ณ ที่นี้ฟังก์ชันอดิศัย ได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิค

ในรายวิชานี้จะไม่ศึกษาเรื่องการอินทิเกรตของฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิค

การอินทิเกรตของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ทฤษฎีบทที่ 1.6

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถอินทิเกรตได้ที่ x จะได้ว่า

1. $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$
2. $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$
3. $\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + c$
4. $\int \operatorname{cosec}^2(x)dx = -\cot(x) + c$
5. $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + c$
6. $\int \operatorname{cosec}(x)\cot(x)dx = -\operatorname{cosec}(x) + c$
7. $\int \tan(x)dx = \ln|\sec(x)| + c$
8. $\int \cot(x)dx = \ln|\sin(x)| + c$
9. $\int \sec(x)dx = \ln|\sec(x) + \tan(x)| + c$
10. $\int \operatorname{cosec}(x)dx = \ln|\operatorname{cosec}(x) - \cot(x)| + c$

พิสูจน์ (7) จาก $\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$

ให้ $u = \cos(x)$ จะได้ว่า $du = -\sin(x)dx$

ดังนั้น
$$\int \tan(x)dx = \int \frac{1}{u}(-du) = -\ln|u| + c$$
$$= -\ln|\cos(x)| + c$$
$$= \ln|\cos(x)|^{-1} + c$$
$$= \ln|\sec(x)| + c$$

พิสูจน์ (1 - 6 , 8 – 10 ทำเป็นแบบฝึกหัด)

นอกจากนี้ ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จากกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

1. $\int \sin(u)du = -\cos(u) + c$
2. $\int \cos(u)du = \sin(u) + c$
3. $\int \sec^2(u)du = \tan(u) + c$
4. $\int \operatorname{cosec}^2(u)du = -\cot(u) + c$
5. $\int \sec(u)\tan(u)du = \sec(u) + c$
6. $\int \operatorname{cosec}(u)\cot(u)du = -\operatorname{cosec}(u) + c$
7. $\int \tan(u)du = \ln|\sec(u)| + c$
8. $\int \cot(u)du = \ln|\sin(u)| + c$
9. $\int \sec(u)du = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + c$
10. $\int \operatorname{cosec}(u)du = \ln|\operatorname{cosec}(u) - \cot(u)| + c$

ตัวอย่างที่ 23 จงหาค่าของ $\int \cos(2x+4)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = \cos(x)$ จะได้ว่า $du = -\sin(x)dx$

ดังนั้น
$$\int \cos(2x+4)\,dx = \int \cos(u)\frac{du}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\sin(u) + c$$
$$= \frac{1}{2}\sin(2x+4) + c$$

ตัวอย่างที่ 24 จงหาค่าของ $\int x\sin(2x^2)\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x^2$ จะได้ว่า $du = 4xdx$

ดังนั้น
$$\int x\sin(2x^2)\,dx = \int x\sin(u)\,\frac{du}{4x}$$
$$= -\frac{1}{4}\cos(u) + c$$
$$= -\frac{1}{4}\cos(2x^2) + c$$

ตัวอย่างที่ 25 จงหาค่าของ $\int \frac{\sec(2\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$

ตัวอย่างที่ 26 จงหาค่าของ $\int \frac{\cot(x)}{\operatorname{cosec}^2(x)}\,dx$

ตัวอย่างที่ 27 จงหาค่าของ $\int_{0}^{\pi} \sec(2x)\tan(2x)dx$

การอินทิเกรตของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ทฤษฎีบทที่ 1.7

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถอินทิเกรตได้ที่ x จะได้ว่า

1. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin(x)+c$
2. $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arccos(x)+c$
3. $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan(x)+c$
4. $\int -\frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arccot}(x)+c$
5. $\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arcsec}(x)+c$
6. $\int -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \operatorname{arccosec}(x)+c$

นอกจากนี้ ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จากกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

1. $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arcsin(u) + c$
2. $\int -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \arccos(u) + c$
3. $\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \arctan(u) + c$
4. $\int -\frac{1}{1+u^2}\,du = \text{arccot}(u) + c$
5. $\int \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\,du = \text{arcsec}(u) + c$
6. $\int -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\,du = \text{arccosec}(u) + c$

ตัวอย่างที่ 28 จงหาค่าของ $\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 3x$ จะได้ว่า $du = 3dx$

ดังนั้น

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin(u) + c$$

$$= \frac{1}{3}\arcsin(3x) + c$$

ตัวอย่างที่ 29 จงหาค่าของ $\int \frac{-3}{1+25x^2}\,dx$

ตัวอย่างที่ 30 จงหาค่าของ $\int_{0}^{1/2} \frac{1}{|2x|\sqrt{4x^2-1}}dx$

การอินทิเกรตของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน

ทฤษฎีบทที่ 1.8

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถอินทิเกรตได้ที่ x และ สำหรับจำนวนจริงใดๆ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า

1. $\int e^x dx = e^x + c$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

นอกจากนี้ ถ้า $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x จากกฎลูกโซ่ จะได้ว่า

1. $\int e^u du = e^u + c$
2. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln(a)} + c$

ตัวอย่างที่ 31 จงหาค่าของ $\int e^{4x}dx$

วิธีทำ ให้ $u = 4x$ จะได้ว่า $du = 4dx$

ดังนั้น

$$\int e^{4x}dx = \int e^{u}\frac{du}{4}$$
$$= \frac{1}{4}e^{u} + c$$
$$= \frac{1}{4}e^{4x} + c$$

ตัวอย่างที่ 32 จงหาค่าของ $\int 3e^{-5x}dx$

ตัวอย่างที่ 33 จงหาค่าของ $\int \frac{2}{7^{-6x}}dx$

ตัวอย่างที่ 34 จงหาค่าของ $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$

แบบฝึกหัดที่ 1.4

1. จงหาค่าของการอินทิเกรตต่อไปนี้

1.1 $\int_{-3}^{2}(x^3+2x+4)\,dx$

1.2 $\int_{0}^{5}\frac{3}{x^4}\,dx$

1.3 $\int_{-1}^{0}(x+1)(x^3-2)\,dx$

1.4 $\int_{2}^{3}\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt[5]{x}}\,dx$

1.5 $\int_{0}^{1}\frac{2r^3+3r^2+r}{2r+1}\,dr$

1.6 $\int_{-4}^{0}\frac{1}{t^2-8t+16}\,dt$

2. จงหาค่าของการอินทิเกรตต่อไปนี้

2.1 $\int_{0}^{\pi/2}(1+\sin(x))\,dx$

2.2 $\int_{0}^{\pi/6}5\operatorname{cosec}^2(x)\,dx$

2.3 $\int_{\pi/4}^{3\pi/4}\sec(x)\tan(x)\,dx$

2.4 $\int_{\ln(2)}^{\ln(5)}e^{3x}\,dx$

2.5 $\int_{0}^{1}\frac{-2}{r^2+1}\,dr$

2.6 $\int_{e^2}^{e^3}\frac{1}{3t}\,dt$

3. จงหาค่าของการอินทิเกรตต่อไปนี้

3.1 $\int_{0}^{1}2x(3+x^2)\,dx$

3.2 $\int_{0}^{\pi/3}5\sec^2(3x)\,dx$

3.3 $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\operatorname{cosec}(5x)\cot(5x)\,dx$

3.4 $\int_{\ln(1)}^{\ln(5)}x^2e^{x^3}\,dx$

3.5 $\int_{\pi/3}^{\pi/4}\frac{6r^2}{\sqrt{9r^2-1}}\,dr$

3.6 $\int_{3}^{7}\frac{-6}{3t^2-4}\,dt$