

การศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู และระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิต
ของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎี ของ van Hiele เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส
สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

A STUDY OF TEACHER'S USING SYSTEM OF EXTERNAL
REPRESENTATIONS AND THE LEVEL OF STUDENTS '
GEOMETRIC UNDERSTANDING BASED ON VAN HIELE'S THEORY
ABOUT PYTHAGORAS THEORY FOR MATHAYOMSUKSA II STUDENTS

ฐิติพร มาตรโคกสูง – ดร.หล้า ภวภูตานนท์
มหาวิทยาลัยขอนแก่น

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู และระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ van Hiele เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ซึ่งประกอบด้วย ผู้วิจัย 1 คน ผู้ช่วยวิจัย 4 คน กลุ่มเป้าหมายคือ ครูสอนคณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 1 คน และนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนจากครูกลุ่มเป้าหมาย ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 3 คน โรงเรียนสาธิต (ศึกษาศาสตร์) มหาวิทยาลัยขอนแก่น โดยใช้การเลือกแบบเจาะจง ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้บันทึกการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และทดสอบนักเรียนภายหลังจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พร้อมทั้งสัมภาษณ์ และนำมาผลที่ได้มาใช้ในการวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครูและระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียน

การศึกษาครั้งนี้พบว่า ระบบการนำเสนอภายนอกที่ครูใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ได้แก่ การใช้ภาษา รูปภาพ สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ และสื่อที่เป็นรูปธรรม โดยครูใช้ภาษาในการอธิบายทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ทฤษฎีบทกลับ การประยุกต์ และโจทย์ที่ครูเขียนลงบนกระดาน ครูใช้รูปภาพเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจและเกิดจินตนาการในเรื่องที่ครูอธิบายได้ง่ายขึ้น วาดภาพในโจทย์เรื่องการประยุกต์ลงบนกระดานเพื่อให้ง่ายต่อการทำความเข้าใจ ครูใช้สื่อรูปธรรมที่สร้างขึ้นเองเพื่ออธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการแก้โจทย์ปัญหา และจากผลการวิเคราะห์การทำแบบทดสอบของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย 3 คน พบว่านักเรียนมีระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิต ถึงระดับที่ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน

(Formal deduction) ตามทฤษฎีบทของ van Hiele โดยนักเรียนสามารถหารูปทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัส สามารถพิสูจน์ด้วยวิธีการที่หลากหลายและมีความเข้าใจเกี่ยวกับทฤษฎีที่จำเป็นในการพิสูจน์ทางเรขาคณิต นอกจากนี้ นักเรียนยังมีความเข้าใจในความแตกต่างระหว่างทฤษฎีกับทฤษฎีบทกลับ ซึ่งการคิดเชิงเรขาคณิตในระดับนี้เป็นระดับที่คาดหวังว่านักเรียนในระดับมัธยมศึกษาจะต้องมี

คำสำคัญ : ระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิต, การนำเสนอภายนอก, ทฤษฎีบทของ van Hiele

ABSTRACT

The objectives of this research was to investigate teacher's use of external representation and the level of students' geometric understanding based on van Hiele's theory about Pythagoras theory for Mathayomsuksa II students. The research team consisted of a researcher and four research assistants. The participants of the study were a Mathematics teacher who were teaching Mathayomsuksa II in the second semester in academic year 2009 and three students who were taught by this teacher. The case school was Khon Kaen University Demonstration School. The student subjects were drawn by purposive sampling. In this research, all of the teaching activities related to Pythagoras theory were recorded. At the end of lessons, the subjects were tested and interviewed. The data was analyzed for the uses of teacher's external representations and the level of students' geometric understanding.

According to the study, the teacher used external representations in learning activities in different forms. Language, pictures, geometric signs and concrete teaching tools were introduced in the class. The teacher verbally explained the Pythagoras theory, reverse Pythagoras theory, applications. In addition, the problems were written on a board and pictures were used for illustration so that the students could easily understand and made on imagination about what the teacher was explaining. That is, drawing along with problems on application could ease students' understanding. In addition, some teaching tools were created to explain the Pythagoras theory; meanwhile, the mathematical signs were used to solve the problems. According to the results of the test, the students could achieve geometric understanding as high as level four – formal deduction based on van Hiele. To illustrate, the subjects demonstrated ability of finding general pictures of Pythagoras

theory and they could prove the theory through various approaches and achieve understanding about theories necessary for geometric proof. Moreover, the students were able to understand the differences between the theory and reverse Pythagoras theory. This was the level that Mathayomsuksa were supposed to be attained.

Keyword (s) : Level of Geometric Understanding ,External Representation, van Hiele Theory

บทนำ

ปานทอง กุลนาถศิริ (2541) กล่าวว่าไว้ว่า ประเทศจะพัฒนาด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีได้ ก็ต่อเมื่อประเทศนั้นได้พัฒนาทางด้านคณิตศาสตร์แล้วเป็นอย่างดี ดังนั้นในการพัฒนาด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี จึงจำเป็นต้องพัฒนาด้านคณิตศาสตร์ก่อน เพราะความรู้ทางคณิตศาสตร์จะเป็นความรู้พื้นฐานที่สำคัญและจำเป็น และเป็นเครื่องมือที่มนุษย์จะได้นำไปใช้ในการพัฒนาความรู้ด้านวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีให้เจริญก้าวหน้าต่อไป ซึ่งสอดคล้องกับปัจจุบันนี้ความก้าวหน้าทางด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยีและสารสนเทศเจริญไปอย่างรวดเร็ว ดังนั้นการศึกษาจึงเป็นสิ่งสำคัญและมีความจำเป็นต่อการพัฒนาประเทศให้อยู่ในระดับที่สูงขึ้น มีความเจริญก้าวหน้าทันต่อการเปลี่ยนแปลง ความรู้ทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานของการศึกษาในศาสตร์ด้านอื่นๆ เนื่องจากคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ฝึกกระบวนการคิดที่มีเหตุผล มีขั้นตอนระเบียบวิธีอย่างเป็นระบบ มีทักษะกระบวนการที่ทำให้ผู้เรียน เกิดการเรียนรู้และสามารถนำมาใช้แก้ปัญหาต่างๆ ได้ คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตลอดจนศาสตร์อื่นๆที่เกี่ยวข้อง คณิตศาสตร์จึงเป็นประโยชน์ต่อการดำรงชีวิตและช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น

Goldin (1998) กล่าวว่า ระบบการนำเสนอ (Representational system) ประกอบด้วยระบบย่อยๆ หลายระบบ ระบบภาษาพูด ภาษาเขียน ภาพเขียน หรือรูปภาพ รูปแบบการจัดการ และสถานการณ์จริงของโลกที่อยู่รอบๆ ตัวเรา การนำเสนอมี 2 แบบคือ การนำเสนอภายนอก (External representations) และ การนำเสนอภายใน (Internal representation) หรือการนำเสนอทางจิตวิทยาของบุคคล ระบบการนำเสนอภายนอกประกอบด้วยระบบย่อยๆ ตั้งแต่สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ไปจนถึงสิ่งแวดล้อมของการเรียนรู้ที่มีโครงสร้าง เช่น วัสดุ เครื่องมือที่จับต้องได้ ในทางตรงข้ามระบบการนำเสนอภายในจะรวมเอาการสร้างสัญลักษณ์ภายในตัวบุคคล และการกำหนดส่งผ่านความหมายไปยังสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ต่างๆ รวมถึงการนำเสนอด้วยภาพที่สื่อถึงแนวคิด และการนำเสนอในเชิงปริภูมิ และครอบคลุมถึงยุทธวิธีในการแก้ปัญหา และที่สำคัญคือผลของการนำเสนอมีความสัมพันธ์เกี่ยวข้องกับการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยองค์ประกอบของระบบการ

นำเสนอภายในประกอบด้วย 5 ประเภท คือ 1) ภาษาพูดและระบบ โครงสร้างของภาษา (Verbal and syntactic systems) 2) ระบบการจินตนาการ (Imagistic systems) 3) ระบบสัญลักษณ์ต่างๆ ทางคณิตศาสตร์ (Formal notational systems of mathematics) 4) ระบบการวางแผนและการควบคุม (a system of planning , monitoring , and executive control) 5) ระบบการนำเสนอที่เกี่ยวข้องกับอารมณ์ (a system of affective representation)

Godin and Janvier (1998) ได้กล่าวถึงความหลากหลายของการให้ความหมายของการนำเสนอ และระบบการนำเสนอ ในมุมมองที่เชื่อมโยงกับการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์ การสอนคณิตศาสตร์ และการพัฒนา ดังต่อไปนี้ 1) ในแง่มุมมองภายนอก เป็นโครงสร้างของสถานการณ์ หรือโครงสร้างของกลุ่มสถานการณ์ ในสิ่งแวดล้อมทางกายภาพ ที่สามารถถูกอธิบายในเชิงคณิตศาสตร์ หรือ มองเห็นเป็นการรวบรวมแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 2) ในแง่มุมมองการก่อร่างทางภาษา เป็นระบบของภาษาที่ปัญหาทางคณิตศาสตร์ถูกนำเสนอขึ้นมา หรือถูกอธิบาย ด้วยการเน้นย้ำบนระบบลักษณะที่เป็นโครงสร้างที่เกี่ยวกับการศึกษาตามหลักไวยากรณ์ (Syntactic) และ โครงสร้างที่เกี่ยวข้องกับความหมาย (Semantic) 3) โครงสร้างคณิตศาสตร์ที่เป็นทางการ หรือระบบของโครงสร้างที่สามารถถูกนำเสนอสถานการณ์ผ่านสัญลักษณ์ หรือผ่านระบบของสัญลักษณ์ ซึ่งมักจะอยู่ในรูปของสัญลักษณ์ นิยาม ที่มีความชัดเจน หรือ โครงสร้างทางคณิตศาสตร์ที่อาจจะนำเสนอจากโครงสร้างในแง่มุมมองอื่น 4) ในแง่มุมมองภายใน เป็นโครงสร้างเชิงการรู้ของแต่ละบุคคล หรือระบบที่ซับซ้อนของโครงสร้างเชิงการรู้ เป็นการสรุปจากพฤติกรรมหรือทบทวนพฤติกรรม แนวคิดของตนเองในกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

Zhang (1997) ได้ให้ความหมายการนำเสนอภายนอกว่าเป็นความรู้และ โครงสร้างในสิ่งแวดล้อม สัญลักษณ์ทางกายภาพ วัตถุ มิติ (การเขียนสัญลักษณ์ ลูกคิด มิติของกราฟ) และกฎภายนอกและความสัมพันธ์ภายนอกที่อยู่ในโครงสร้างทางกายภาพ (เช่น ความสัมพันธ์เชิงปริภูมิของเลขโดด โครงงานของแผนภาพ ข้อจำกัดทางกายภาพในลูกคิด) ข้อมูลในการนำเสนอภายนอกสามารถถูกคัดเลือก ถูกวิเคราะห์ และทำเป็นกระบวนการโดยผ่านระบบการหยั่งรู้เพียงอย่างเดียว ถึงแม้ว่าการมีส่วนร่วมจากบนลงล่างของความรู้เชิงมโนคติจาก การนำเสนอภายใน บางครั้งสามารถสนับสนุนหรือขัดขวางกระบวนการหยั่งรู้ ในทางตรงกันข้าม การนำเสนอภายใน เป็นความรู้และโครงสร้างในความจำ การเสนอ การสร้างโครงสร้างทางปัญญา ระบบเครือข่ายในประสาทหรือรูปแบบอื่นๆ ข้อมูลการนำเสนอภายในดึงเอามาจากความจำโดยใช้กระบวนการหยั่งรู้ ถึงแม้ว่าการกระตุ้นใน การนำเสนอภายนอก ในบางครั้งสามารถกระตุ้นกระบวนการดึงข้อมูลมาจากหน่วยความจำ เช่น พิจารณา การคูณ 735 ด้วย 278 โดยใช้กระดาษและดินสอการนำเสนอภายใน เป็นการแปลความหมายของสัญลักษณ์ของแต่ละบุคคล (เช่น ค่าตัวเลขทางสัญลักษณ์ 7 คือ

เจ็ด) ตารางการบวกและการคูณ วิธีการทางเลขคณิตและอื่นๆ ซึ่งได้ถูกดึงมาจากหน่วยความจำ ส่วนการนำเสนอภายนอกเป็นรูปร่างและตำแหน่งของสัญลักษณ์ ปฏิบัติความสัมพันธ์ของตัวเลขแต่ละตัว เพื่อที่จะทำให้การคูณประสบความสำเร็จ บุคคลจะต้องรับรู้ข้อมูลจากการนำเสนอภายนอก แล้วหลังจากนั้นสร้างความสัมพันธ์ระหว่างการนำเสนอภายนอกกับการนำเสนอภายใน

เรขาคณิตเป็นพื้นฐานหนึ่งที่สำคัญต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ดังที่ ปานทอง กุลนาถศิริ (2541) กล่าวว่าหลักสูตรคณิตศาสตร์ไม่ว่าในยุคสมัยใด จะมีการพัฒนาปรับปรุงอย่างไร เรขาคณิตจะต้องเป็นสาขาหนึ่งที่ถูกพัฒนาเห็นสมควรให้บรรจุลงในหลักสูตร ธรรมชาติของวิชาเรขาคณิตเป็นวิชาที่เอื้อที่จะสอนให้ผู้เรียนเป็นผู้ที่มีวิจรรณญาณ ช่างสังเกต ช่างสำรวจ มีเหตุผล ดังนั้นหากผู้สอนได้จัดกิจกรรมที่เหมาะสมและถูกต้องก็จะช่วยให้เยาวชน เป็นเยาวชนที่มีคุณลักษณะดังกล่าว อันเป็นลักษณะที่พึงประสงค์ของชาติ เรขาคณิตจึงเป็นเนื้อหาที่มีความสำคัญและจำเป็นเนื้อหาหนึ่งที่จะต้องบรรจุไว้ในหลักสูตรคณิตศาสตร์ในทุกระดับ นอกจากนี้ วัฒนา มณีวงศ์ (2542) ได้กล่าวว่า เนื้อหาเรขาคณิตถือว่ามีความสำคัญแต่ในปัจจุบันพบว่าการเรียนการสอนเรขาคณิตเป็นปัญหา มากสำหรับครูสอนคณิตศาสตร์นักเรียนไม่ชอบการพิสูจน์เรขาคณิต ไม่ทราบแนวทางในการ พิสูจน์ นักเรียนไม่ทราบว่า จะเริ่มต้นการพิสูจน์อย่างไร ไม่สามารถเชื่อมโยงสิ่งที่มีอยู่หรือสิ่งที่ทราบมาเป็นเหตุผลในการพิสูจน์ นักเรียนขาดทักษะการให้เหตุผล

นันทน์ลิน แห่สงนาม (2547) ได้ทำการสังเกตและการสัมภาษณ์ครูผู้สอนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 นักเรียนและผู้ปกครองบางส่วน พร้อมทั้งสังเกตนักเรียนในขณะที่ทำการสอน ในชั่วโมงเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ปัญหาการเรียนการสอนที่มีผลทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของ นักเรียนต่ำโดยเฉพาะเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส สรุปเป็นปัญหาในลักษณะดังต่อไปนี้

1. ปัญหาด้านตัวครูผู้สอน โดยพบว่าครูที่สอนคณิตศาสตร์ในระดับมัธยมศึกษา มีน้อย และต้องรับผิดชอบต่อนักเรียนที่สอนเป็นจำนวนมาก จึงดูแลนักเรียนไม่ทั่วถึง ครูผู้สอนไม่ได้สอนตามแผนการเรียนรู้ที่เขียนไว้ ขาดเทคนิคในการถ่ายทอด รูปแบบการสอนจะใช้วิธีการสอนแบบครูเป็นผู้บรรยาย ให้นักเรียนเป็นผู้ฟังและฝึกปฏิบัติตาม การสอนของครูจะดำเนินการสอนโดย ทบทวนหรือเฉลยการบ้าน หรือนำเสนอเนื้อหาใหม่โดยการยกตัวอย่างบนกระดาน อธิบายและตั้งคำถามให้นักเรียนตอบ นักเรียนที่ตอบส่วนใหญ่จะเป็นนักเรียนเก่ง แล้วครูจะให้ทำแบบฝึกหัดใน หนังสือเรียน ส่วนสื่อการสอนก็จะใช้สื่อการสอนที่มีอยู่แล้ว ได้แก่ วงเวียน ครึ่งวงกลม หนังสือของ กรมวิชาการ และแบบฝึกหัดสำเร็จรูป นอกจากนั้นครูที่สอนยังมีภาระงานอื่นๆที่ได้รับมอบหมาย นอกเหนือจากการสอน เช่น รับผิดชอบงานสหกรณ์โรงเรียน งานปกครองงานธุรการโรงเรียน เป็นต้น จึงทำให้มีเวลาเตรียมตัวในการสอนน้อย และไม่ทุ่มเทเกี่ยวกับการสอนมากนัก

2. ปัญหาด้านสื่อการเรียนการสอน สื่อน้อย และครูขาดการใช้สื่อเพราะครูมองว่าทำให้เสียเวลา ครูไม่มีการจัดทำสื่อด้วยตนเอง ครูมักจะใช้คู่มือครูของกรมวิชาการในการเรียนการสอน และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนของกรมวิชาการ และแบบฝึกหัดสำเร็จรูปที่มีอยู่ในหนังสือ และครูก็ไม่ได้พัฒนาสื่อที่เหมาะสมกับเนื้อหาและตัวนักเรียน

Pegg (1996) ได้กล่าวถึงผลการศึกษาของ Pierre van Hiele and Dina van Hiele-Geldof พบว่านักเรียนไม่เข้าใจเรขาคณิตและนักเรียนรู้สึกว่าการเรียนเรขาคณิตเป็นเรื่องที่ยาก และจากผลการศึกษาของพวกเขาพบว่าที่นักเรียนไม่ประสบความสำเร็จในการเรียนรู้เรขาคณิตนั้นมีพื้นฐานมาจากความไม่สอดคล้องกันระหว่างกิจกรรมการเรียนการสอนที่กำหนดโดยครูกับระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของตัวนักเรียนเอง ดังนั้นสองสามี-ภรรยาได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับระดับการคิดเชิงเรขาคณิตและบทบาทของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อช่วยให้นักเรียนได้บรรลุตามวัตถุประสงค์ของหลักสูตรเรขาคณิต โดย P.M. van Hiele ได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ส่วนภรรยา Dina van Hiele – Geldof ได้ศึกษาเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาระดับการคิดเชิงเรขาคณิตจากระดับหนึ่ง ไปยังอีกระดับหนึ่งต่อเนื่องกัน จนได้เป็นรูปแบบ van Hiele (van Hiele Model) ลักษณะเด่นของรูปแบบ van Hiele คือ นักเรียนต้องผ่านกระบวนการเรียนรู้ที่ละขั้นจากสิ่งที่นักเรียนสังเกตเห็นจนไปสู่การพิสูจน์อย่างเป็นแบบแผน van Hiele เชื่อว่าการที่นักเรียนจะเขียนพิสูจน์ทางเรขาคณิตได้นั้นต้องมาจากการคิดในลำดับขั้นสูง นักเรียนที่มีการคิดในลำดับขั้นต่ำต้องมีประสบการณ์ในการคิดที่มากเพียงพอก่อนที่จะเรียนรู้ความคิดรวบยอดทางเรขาคณิตที่เป็นแบบแผน โดยไม่ขึ้นกับระดับอายุของนักเรียน ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตตามรูปแบบของ van Hiele ส่วนมากพัฒนามาจากทฤษฎีทางจิตวิทยาของ Gestalt and Jean Piaget ซึ่ง Pierre van Hiele ได้กล่าวไว้ว่าเขาพัฒนาความคิดรวบยอดของแต่ละระดับขึ้นความคิดมาจาก Piaget คือทฤษฎีพัฒนาการทางสติปัญญาที่เชื่อว่า คนเราจะเกิดการเรียนรู้เป็นระดับขั้นหรือขั้นตอนที่ต่อเนื่องกัน คนทุกคนมีความพร้อมที่จะมีปฏิสัมพันธ์กับสิ่งแวดล้อมและปฏิสัมพันธ์นี้ทำให้เกิดพัฒนาการทางสติปัญญา

Pegg (1996) ได้ศึกษา ระดับการคิดเชิงเรขาคณิตของ van Hiele ซึ่งแบ่งออกเป็น 5 ระดับ ดังนี้ ระดับที่ 1: การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization, or Recognition) ระดับที่ 2: การวิเคราะห์หรือพรรณารูปลักษณะ (Analysis, or Description) ระดับที่ 3: การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) ระดับที่ 4: การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) ระดับที่ 5: การเป็นนามธรรม (Rigor)

เนื่องจากนักเรียนส่วนมากมีปัญหาในการเรียนวิชาเรขาคณิต นักเรียนไม่สามารถพิสูจน์เรขาคณิตได้ จึงมีครูและนักคณิตศาสตร์หลายท่าน ได้พยายามศึกษาค้นคว้าเพื่อหาวิธีแก้ปัญหา

ดังกล่าว ต่อมาในปี ค.ศ. 1954 Pierre van Hiele และ Dina van Hiele (1984 อ้างถึงในนาคยา น้ำจิตตรง, 2546) ได้สร้าง van Hiele โมเดล คือ ระดับการคิดเชิงเรขาคณิต ซึ่งเป็นแนวคิดที่จะช่วยให้นักเรียนรู้จักคิดแก้ปัญหาโดยการวิเคราะห์และการสื่อความหมายด้วยคำพูดของตนเอง ในการพิสูจน์เรขาคณิต จากผลการศึกษาของ นวลศรี ชำนาญกิจ (2544) ได้ศึกษาผลการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ Dina van Hiele ที่มีต่อระดับการคิดทางเรขาคณิตตามตัวแบบ van Hiele และความสามารถในการพิสูจน์ทางเรขาคณิตของนักศึกษาครู สาขาวิชาคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏนครสวรรค์ พบว่า นักศึกษาครูที่ได้รับการสอนโดยใช้ลำดับขั้นของ Dina van Hiele มีระดับการคิดทางเรขาคณิตและความสามารถในการพิสูจน์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

ด้วยเหตุผลดังกล่าวข้างต้นและจากการศึกษาวรรณกรรมและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ทำให้ผู้วิจัยสนใจที่จะศึกษาเกี่ยวกับการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู และระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียนตามแนวคิดทฤษฎีของ van Hiele เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู และระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียน ตามแนวคิดทฤษฎีของ van Hiele เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงคุณภาพกรณีศึกษา ซึ่งประกอบด้วย ผู้วิจัย 1 คน ผู้ช่วยวิจัย 4 คน กลุ่มเป้าหมายคือ ครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์ ในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนสาธิต (ศึกษาศาสตร์) มหาวิทยาลัยขอนแก่น จำนวน 1 คน และนักเรียนในระดับมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนสาธิต (ศึกษาศาสตร์) มหาวิทยาลัยขอนแก่น จำนวน 3 คน ซึ่งผู้วิจัยใช้การเลือกแบบเจาะจงและกลุ่มเป้าหมายเข้าร่วมการวิจัยด้วยความสมัครใจ

การเก็บรวบรวมข้อมูล

1. ผู้วิจัยทำการศึกษานูมิหลังของนักเรียน ประวัติ พฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน คะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และนูมิหลังของครูผู้สอน เกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้ในโรงเรียนที่ทำการศึกษา คือ สังเกตและศึกษาเกี่ยวกับแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส การจัด

กิจกรรมการเรียนรู้ในห้องเรียน พฤติกรรมการสอน ประวัติการศึกษา ประสบการณ์การทำงาน และภาระงานที่ได้รับมอบหมาย

2. ผู้วิจัยทำการศึกษาและสร้างเครื่องมือในการทำวิจัยคือ แบบทดสอบอัตนัยเรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส จำนวน 3 ข้อใหญ่ 9 ข้อย่อย เมื่อเสร็จแล้วนำเสนอให้อาจารย์ที่ปรึกษาและผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบ จากนั้นนำคำชี้แนะและข้อบกพร่องมาปรับปรุงแก้ไข แล้วนำเครื่องมือที่ได้รับการแก้ไขแล้ว เสนอให้อาจารย์ที่ปรึกษาและผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบอีกครั้งหนึ่ง หลังจากปรับแก้แล้ว จึงนำแบบทดสอบที่ได้ไปใช้ทดสอบระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียนกลุ่มเป้าหมาย

3. ผู้วิจัยเก็บรวบรวมข้อมูลโดย บันทึกวีดิทัศน์การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส เพื่อบันทึกการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู ภายหลังจากครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ผู้วิจัยให้นักเรียนกลุ่มเป้าหมายทำแบบทดสอบ เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยผู้วิจัยและผู้ช่วยวิจัย สังเกตและบันทึกวีดิทัศน์ ในขณะที่นักเรียนกลุ่มเป้าหมายทำแบบทดสอบ และสัมภาษณ์นักเรียนภายหลังจากการทำแบบทดสอบเสร็จโดยได้นำผลจากการทำแบบทดสอบของนักเรียนแต่ละคนมาใช้ในการสัมภาษณ์ในประเด็นที่นักเรียนอธิบายยังไม่ชัดเจน เพื่อทำความเข้าใจเกี่ยวกับระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียน เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตามแนวคิดทฤษฎี ของ van Hiele เป็นรายบุคคล

4. ผู้วิจัยนำข้อมูลที่ได้จากการบันทึกวีดิทัศน์การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู และผลที่ได้จากการทำแบบทดสอบของนักเรียน การสัมภาษณ์ และการบันทึกเสียง เกี่ยวกับเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส มาถอดโปรโตคอล และบันทึกผลที่ได้เพื่อนำไปใช้ในการวิจัย

การวิเคราะห์ข้อมูล

1. นำข้อมูลที่ได้จากการบันทึกวีดิทัศน์การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส มาวิเคราะห์การใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู ว่าครูใช้ระบบการนำเสนออะไรบ้างอย่างไร

2. หลังจากที่ได้ทำการวิเคราะห์การสอนของครูแล้ว ผู้วิจัยได้นำผลจากการทำแบบทดสอบอัตนัยของนักเรียน เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส มาวิเคราะห์ระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียน ตามทฤษฎีบทของ van Hiele ดังนี้

ระดับที่ 1: การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization ,or Recognition) นักเรียนสามารถบอกชื่อ เปรียบเทียบ และจัดกระทำกับรูปเรขาคณิตได้

ระดับที่ 2: การวิเคราะห์หรือพรรณนารูปลักษณะ (Analysis, or Description) นักเรียนสามารถมองเห็นคุณลักษณะรูปเรขาคณิต การวิเคราะห์ของนักเรียนจะเป็นผลมาจากการสังเกตและ

การทำาทดลอง สมบัติเชิงเรขาคณิตจะถูกอธิบายในลักษณะเฉพาะแต่ละสมบัติจะถูกมองในลักษณะที่เป็นอิสระต่อกัน

ระดับที่ 3: การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) นักเรียนสามารถเชื่อมโยงหรือสร้างความสัมพันธ์ระหว่างสมบัติที่ได้ค้นพบอย่างมีเหตุผล สมบัติเหล่านี้จะถูกนำมาจัดลำดับความสัมพันธ์

ระดับที่ 4: การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) นักเรียนสามารถนำเอาทฤษฎีต่างๆ มาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผล และสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีทางเรขาคณิต นักเรียนสามารถพิสูจน์ด้วยวิธีการที่หลากหลายและมีความเข้าใจเกี่ยวกับปฏิสัมพันธ์ระหว่างเงื่อนไขหรือทฤษฎีที่จำเป็นและเหมาะสมในการพิสูจน์เรขาคณิต นอกจากนี้นักเรียนยังสามารถแยกแยะและมีความเข้าใจในความแตกต่างระหว่างทฤษฎีกับทฤษฎีบทกลับ

ระดับที่ 5: การเป็นนามธรรม (Rigor) เป็นระดับที่นักเรียนสามารถสร้าง วิเคราะห์ และเปรียบเทียบทฤษฎีทางเรขาคณิตในระบบสัจพจน์ที่แตกต่างกัน เรขาคณิตจะถูกมองในรูปของความ เป็นนามธรรม เช่น ถ้าสัจพจน์ที่เกี่ยวกับความขนานกันระบุว่าเส้นขนานทั้งสองเส้นไปพบกันที่อนันต์ นักเรียนสามารถนำไปใช้อย่างมีเหตุผล

3. นำผลที่ได้จากการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู มาเปรียบเทียบกับระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียนทั้งสามคน พร้อมทั้งอภิปรายผล

4. นำผลการวิเคราะห์และอภิปรายผลทั้งหมดมาเขียนรายงานการวิจัยในครั้งนี้

สรุปและอภิปรายผล

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้ศึกษาการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู และระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียน ตามแนวคิดทฤษฎีของ van Hiele เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ศึกษากลุ่มเป้าหมายจำนวน 3 คน โดยให้ชื่อสมมติ ดังนี้ แม็ก แป้ง และจำ ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้บันทึกวิดีโอ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส และภายหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู ผู้วิจัยได้ทดสอบระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียน โดยใช้แบบทดสอบอัตนัย เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส จำนวน 3 ข้อใหญ่ 9 ข้อย่อย เพื่อนำมาผลที่ได้จากการทำแบบทดสอบของนักเรียน และการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู มาวิเคราะห์ผล

ผลจากการวิเคราะห์แบบทดสอบของนักเรียนภายหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู ผลปรากฏว่า แม็ก มีระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิต ถึงระดับที่ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน (Formal deduction) แต่ในระดับนี้ แม็กยังแสดงออกมาไม่ชัดเจน โดยยังไม่

สามารถอธิบายให้เห็นภาพได้ การอธิบายยังมีความกำกวม แต่เมื่อกสามารถตอบคำถามได้อย่างถูกต้อง เมื่อมองภาพรวมแล้วสามารถสรุปได้ว่า เมื่อกอาจจะมีความเข้าใจในระดับที่ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน ส่วนเป้ง และจำ นั้น มีความเข้าใจถึงระดับที่ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน ซึ่งเป้ง และจำ สามารถตอบคำถามได้อย่างถูกต้องและชัดเจน โดยหารูปทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ เมื่อพื้นที่ของส่วนที่แรเงาเปลี่ยนแปลงไป และในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของนั้น นักเรียนทั้งสามคน มีความตั้งใจและทำแบบทดสอบวัดระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตได้อย่างถูกต้อง

ผลจากการวิเคราะห์การนำเสนอภายนอกของครู ผลปรากฏว่า ครูใช้การนำเสนอภายนอกที่เห็นได้อย่างชัดเจนตลอดระยะเวลาการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน คือ การใช้ภาษา และการใช้รูปภาพ และใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพียงเล็กน้อย และใช้สื่อที่เป็นรูปธรรมอธิบายตัวทฤษฎีบทพีทาโกรัส ครูใช้ภาษาในการอธิบายทฤษฎีบท อธิบายการทำโจทย์และอธิบายตัวอย่างที่ครูยกขึ้นมา โดยภาษาที่ครูใช้นั้นเป็นภาษาที่เรียบง่าย ไม่ซับซ้อนเพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถเข้าใจในเรื่องที่ครูอธิบายได้โดยง่าย เนื่องมาจากต้องการที่จะทำให้นักเรียนรับรู้และเข้าใจในเรื่องที่ต้องการสื่อสารอย่างรวดเร็ว และเข้าใจถูกต้องตรงตามที่ครูคาดหวังไว้ การใช้รูปภาพที่ครูสร้างขึ้นในการอธิบายทฤษฎีบท โดยวาดภาพลงบนกระดานเพื่อยกตัวอย่าง ทำให้นักเรียนสามารถเข้าใจได้ง่ายขึ้น ผลจากการใช้การนำเสนอภายนอกของครูนั้น มีผลทำให้นักเรียนทั้งสามคน สามารถพัฒนาระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตถึงระดับที่ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน แต่ยังไม่ถึงระดับที่ 5 การเป็นนามธรรม (Rigor) เนื่องมาจากระดับที่ 5 นั้นเป็นเรื่องที่ค่อนข้างยากที่นักเรียนในระดับมัธยมศึกษาตอนต้นจะสามารถทำความเข้าใจได้

ความสัมพันธ์ระหว่างการใช้ระบบการนำเสนอภายนอกของครู และระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียน ผลปรากฏว่า จากการวิเคราะห์ในระหว่างที่ครูจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูใช้ภาษาในการอธิบายทฤษฎีบทพีทาโกรัส และใช้สื่อที่ครูสร้างขึ้นจริงนั้นคือรูปภาพ ทำให้นักเรียนสามารถรับรู้ได้ถึงรูปทรงของสามเหลี่ยมว่ามีลักษณะอย่างไร นักเรียนสามารถเข้าใจและรู้ได้ในทันทีว่ารูปที่นักเรียนเห็นเป็นรูปอะไร ซึ่งในขั้นนี้แสดงให้เห็นถึงนักเรียนมีความเข้าใจในระดับที่ 1 การรับรู้จากการมองเห็น (Visualization ,or Recognition) นักเรียนสามารถบอกชื่อ เปรียบเทียบ และจัดกระทำกับรูปเรขาคณิตได้ เมื่อครูยกตัวอย่างการหาพื้นที่ของรูปเรขาคณิตต่างๆครูได้ตั้งคำถามนักเรียนว่า การหาพื้นที่ของรูปนี้จะใช้สูตรว่าอย่างไร นักเรียนได้พิจารณาถึงรูปร่างและลักษณะของรูปทรงทางเรขาคณิตที่ครูให้มา ทำให้นักเรียนสามารถเลือกใช้สูตรที่เหมาะสมกับรูปเรขาคณิตนั้นๆได้ แสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในระดับที่ 2 การวิเคราะห์หรือพรรณารูปลักษณะ (Analysis, or Description) สมบัติเชิงเรขาคณิตจะถูกอธิบายในลักษณะเฉพาะ ซึ่งสมบัติ

แต่ละสมบัติจะถูกลมองในลักษณะที่เป็นอิสระต่อกัน การวิเคราะห์ห้มนิยามเชิงเรขาคณิตของนักเรียนจะเป็นผลมาจากการสังเกตและการทำการทดลอง โดยจะเริ่มจากการมองเห็นคุณลักษณะรูปเรขาคณิต

ในการอธิบายบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ครูได้ยกตัวอย่างโดยการวาดภาพ รูปสามเหลี่ยมและกำหนดค่าของด้านทั้งสาม และให้นักเรียนตอบว่ารูปสามเหลี่ยมนี้เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ นักเรียนสามารถตอบได้ว่าด้านที่ครูกำหนดให้ นั้นเป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากเนื่องมาจากด้านตรงข้ามมุมฉากกำลังสอง มีค่าเท่ากับผลบวกของด้านประกอบมุมฉากกำลังสอง ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส นักเรียนยังสามารถให้คำจำกัดความอย่างมีความหมาย ซึ่งแสดงให้เห็นว่านักเรียนมีความเข้าใจในระดับที่ 3 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผนหรือการจัดลำดับความสัมพันธ์ (Informal deduction, or Ordering) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของครู เรื่องการประยุกต์ใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ครูได้อธิบายโดยใช้ภาษา และวาดภาพของโจทย์ปัญหาลงบนกระดาน เพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถมองเห็นภาพได้ง่ายขึ้น และผลจากการทำแบบทดสอบปรากฏว่านักเรียนสามารถหารูปแบบทั่วไปของทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ กล่าวได้ว่านักเรียนมีความเข้าใจในระดับที่ 4 การให้เหตุผลเชิงนิรนัยอย่างเป็นแบบแผน ซึ่งนักเรียนสามารถนำเอาทฤษฎีต่างๆ มาใช้ในการพิสูจน์และให้เหตุผล และยังสามารถสร้างความสัมพันธ์ระหว่างทฤษฎีทางเรขาคณิต พิสูจน์ด้วยวิธีการที่หลากหลายและมีความเข้าใจในทฤษฎีที่จำเป็นในการพิสูจน์เรขาคณิต นอกจากนี้ นักเรียนยังสามารถแยกแยะและมีความเข้าใจในความแตกต่างระหว่างทฤษฎีกับทฤษฎีบทกลับ ซึ่งการคิดเชิงเรขาคณิตในระดับนี้เป็นระดับที่คาดหวังว่านักเรียนในระดับมัธยมศึกษาจะต้องมี

ข้อเสนอแนะ

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการจัดการเรียนการสอน

1. ครูผู้สอนควรสอนเรขาคณิต โดยการอิงทฤษฎีบทของ van Hiele เพื่อจะได้ช่วยให้นักเรียนสามารถพัฒนาระดับความเข้าใจเชิงเรขาคณิตของนักเรียน เน้นให้นักเรียนฝึกการแก้ปัญหาในระดับที่สูงขึ้น เพื่อช่วยให้นักเรียนสามารถพัฒนาในระดับการเป็นนามธรรมได้

2. ครูผู้สอนควรใช้การนำเสนอภายนอก ในระหว่างการสอนให้มีความหลากหลาย เช่น เพิ่มเติมเรื่อง การสัญลักษณ์การเขียน สถานการณ์จริง และการนำเสนออื่นๆ เพื่อช่วยให้นักเรียนมีความเข้าใจในเนื้อหาเพิ่มมากขึ้น

ข้อเสนอแนะเกี่ยวกับการจัดวิทยานิพนธ์ต่อไป

1. ศึกษาเรื่องเดียวกันนี้กับประชากรกลุ่มอื่น เพื่อจะได้เปรียบเทียบผลการวิจัยว่ามีความเหมือนหรือแตกต่างกันอย่างไร
2. ศึกษาปัจจัยและสาเหตุของการมีระดับความเข้าใจ ยังไม่ถึงระดับที่ 5 เพื่อหาแนวทางแก้ไขและหาวิธีป้องกัน

เอกสารอ้างอิง

- นันทน์สิน แผล่งสนาม .(2547) .การพัฒนาการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ด้วยแบบฝึกทักษะการคิดคำนวณเรื่องทฤษฎีบทของพีทาโกรัส ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ของนักเรียนโรงเรียนพิมายวิทยา อำเภอพิมาย จังหวัดนครราชสีมา .วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาหลักสูตรและการสอน บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.
- นวลศรี ชำนาญกิจ.(2544).การพัฒนาตัวแบบเพื่อสร้างสมรรถภาพการสอน ภาพลักษณ์มนทัศน์ทางเรขาคณิต สำหรับนักศึกษาครู.วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ.
- ปานทอง กุลนาถศิริ.(2541). การสอนเรขาคณิตในระดับประถมศึกษาในศตวรรษที่21. สสวท.26 (กรกฎาคม-กันยายน): 3-5.
- วัฒนา มณีวงศ์. (2542). ผลของการเรียนแบบร่วมมือที่มีต่อความสามารถทางการเรียนเรขาคณิตและการเห็นคุณค่าในตนเองของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2. วิทยานิพนธ์ปริญญาศิลปศาสตรมหาบัณฑิต สาขาการสอนคณิตศาสตร์ บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์.
- Geral A. Goldin.(1998). **Representational Systems, Learning and Problem Solving in Mathematics**. Journal of Mathematic Behavior, 17(2), 137-165.
- Goldin, A.G. & Janvier, C.(1998). **Representations and the Phychology of mathematics education [Electronic version]**. Journal of Mathematical Behavior. 17(1),1 - 4.
- Pegg .(1996).**The van Hiele theory**.Teaching Secondary School Mathematics.p.88-92
- Zhang, J.(1997).**The Nature of external representations in problem solving [Electronic version]**. Cognitive Science. 21(2), 179 - 217.