บทที่ 3

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

จากเรื่องตัวแปรสุ่มที่กล่าวมาแล้วนั้น พอสรุปได้ว่า ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีทั้งแบบไม่ต่อเนื่องและแบบต่อเนื่อง ในบทนี้เราจะศึกษาการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่องที่สำคัญ กล่าวคือ สถานการณ์หรือปรากฏการณ์ทางธรรมชาติบางอย่างสามารถอธิบายได้ด้วยฟังก์ชันทางคณิตศาสตร์ เช่น โอกาสที่เครื่องจักรจะผลิตสินค้าที่ไม่ได้มาตรฐานสามารถแทนด้วยการแจกแจงทวินาม โดยที่พารามิเตอร์ของการแจกแจงทำให้ฟังก์ชันดังกล่าวสอดคล้องกับคุณสมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็น และจำนวนอุบัติเหตุ ณ สี่แยกแห่งหนึ่ง สามารถแทนด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซอง เป็นต้น นอกจากจะกล่าวถึงการแจกแจงความน่าจะเป็นที่สำคัญแล้ว จะกล่าวถึงคุณสมบัติที่สำคัญของการแจกแจง เช่น ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนด้วย

3.1 การแจกแจงยูนิฟอร์มชนิดไม่ต่อเนื่อง

นิยาม 3.1 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, \ldots, x_k$ และความน่าจะเป็นของแต่ละค่ามีค่าเท่ากัน แล้วจะกล่าวว่า X มีการแจกแจงยูนิฟอร์มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete uniform distribution) และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x\,;k) = \frac{1}{k} \quad , \quad x = x_1, x_2, \ldots, x_k$$

ทฤษฎีที่ 3.1 ค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของการแจกแจงยูนิฟอร์มชนิดไม่ต่อเนื่อง คือ

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \quad , \quad \sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X) \\
&= \sum_{i=1}^{k} x_i f\left(x_i\,;k\right) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \\
\sigma^2 &= E\left[\left(X-\mu\right)^2\right] \\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\mu\right)^2 f\left(x_i\,;k\right) = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i-\mu\right)^2
\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง 3.1</u> ในการเลือกกรรมการสมาคม 3 คน จากผู้สมัคร 6 คน โดยที่ผู้สมัครแต่ละคนมีโอกาสถูกเลือกเท่า ๆ กัน จงเขียนฟังก์ชันความน่าจะเป็นของกรรมการแต่ละชุด

<u>วิธีทำ</u> จำนวนชุดของกรรมการที่เป็นไปได้ทั้งหมด $= {}^{6}C_{3} = \frac{6!}{3!3!} = 20$ ชุด

ถ้าให้ X เป็นเลขที่ของชุดของกรรมการ ดังนั้น $x = 1, 2, \ldots, 20$

เนื่องจากกรรมการแต่ละชุดมีโอกาสถูกเลือกเท่า ๆ กัน ทำให้

$$f(x\,;k) = \frac{1}{20} \quad , \quad x = 1, 2, \ldots, 20$$

<u>ตัวอย่าง 3.2</u> ให้ X แทนแต้มลูกเต๋าที่หงาย จากการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายอย่างมาก 3 แต้ม

ข. ค่าเฉลี่ย และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $f(x\,;k) = \frac{1}{6} \quad , \quad x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

ก. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายอย่างมาก 3 $= P(X \leq 3)$

$$= \sum_{x=1}^{3} \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 0.5$$

ข. $\mu = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3.5$

$$\sigma^2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i - 3.5)^2$$

$$= \frac{1}{6}\left[(1-3.5)^2 + (2-3.5)^2 + \ldots + (6-3.5)^2\right] = 2.9167$$

$$\therefore \quad \sigma = \sqrt{2.9167} = 1.71$$

3.2 การแจกแจงแบบแบร์นูลลี

ในการทดลองสุ่มที่ผลที่ได้จากการทดลองเป็นไปได้ 2 แบบ คือ แบบที่เราสนใจ ซึ่งเราจะเรียกว่า ความสำเร็จ (Success) และแบบที่เราไม่สนใจ หรือที่เรียกว่า ความไม่สำเร็จ (Failure) เช่น ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ ถ้าเราสนใจการที่เหรียญจะขึ้นหัวหรือไม่ เราอาจจะเรียกการที่เหรียญขึ้นหัว ว่าเป็นความสำเร็จและการที่เหรียญขึ้นก้อยถือเป็นความไม่สำเร็จ หรือในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก ถ้าเราสนใจการที่ลูกเต๋าขึ้นหน้า 1 หรือไม่ เราก็อาจจะเรียกการที่ลูกเต๋าได้แต้ม 1 เป็นความสำเร็จ และการที่ลูกเต๋าขึ้นหน้าอื่น ๆ เป็นความไม่สำเร็จ เป็นต้น การแจกแจงของการทดลองดังกล่าวเพียง 1 ครั้ง เรียกว่า **การแจกแจงแบบแบร์นูลลี**

นิยาม 3.2 การทดลองแบบแบร์นูลลี คือ การทดลองที่มีลักษณะ ดังนี้

1. ผลลัพธ์แต่ละครั้งของการทดลอง มีเพียง 2 ประเภท คือ ความสำเร็จและไม่สำเร็จ
2. ในแต่ละครั้งของการทดลอง ความน่าจะเป็นที่จะเกิดความสำเร็จเท่ากับ p

และความน่าจะเป็นที่เกิดความไม่สำเร็จเท่ากับ q โดย $p+q = 1$

นิยาม 3.3 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ที่มีค่าเป็น

$$x = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อเกิดความไม่สำเร็จ} \\ 1 & \text{เมื่อเกิดความสำเร็จ} \end{cases}$$

แล้วเรียก X ว่า เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี และเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ว่า การแจกแจงแบบแบร์นูลลี โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ

$$f(x\,;p) = p^{x}q^{1-x} \quad , \quad x = 0, 1$$

ตัวอย่างของตัวแปรสุ่มแบบแบร์นูลลี เช่น

1. ในการตรวจสอบคุณภาพของสินค้า 1 ชิ้น ว่าเป็นสินค้าดีหรือเสีย ถ้าสนใจจำนวนสินค้าเสีย และให้ X เป็นจำนวนของสินค้าเสีย ดังนั้นค่าของ X จะมีค่า 2 ค่า คือ

$$x = \begin{cases} 0 & \text{ถ้าเป็นสินค้าดี} \\ 1 & \text{ถ้าเป็นสินค้าเสีย} \end{cases}$$

2. ในการศึกษาถึงผลของการโฆษณาทางทีวี จึงสอบถามลูกค้าว่ารู้จักสินค้าจากสื่อใด และถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่แสดงถึงการที่รู้จักสินค้าจากการโฆษณาทางทีวี ดังนั้นค่าของ X จะมีค่า 2 ค่า คือ

$$x = \begin{cases} 0 & \text{ถ้ารู้จักสินค้าจากสื่ออื่น ๆ} \\ 1 & \text{ถ้ารู้จักสินค้าจากทีวี} \end{cases}$$

<u>ทฤษฎีที่ 3.2</u> ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบแบร์นูลลี คือ

$$\mu = p \qquad , \qquad \sigma^2 = pq$$

<u>พิสูจน์</u>

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^{k} x\, p^x q^{1-x} \\ &= (0)q + (1)p \quad = \quad p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum_{i=1}^{k} (x-p)^2 p^x q^{1-x} \\ &= (0-p)^2 q + (1-p)^2 p \\ &= p^2 q + q^2 p \qquad \text{เนื่องจาก} \quad 1-p = q \\ &= pq(p+q) \\ &= pq \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง 3.3</u> ในการทำข้อสอบปรนัยที่มี 4 ตัวเลือก 1 ข้อ โดยการเดา ให้

X = 1 เมื่อตัวเลือกที่เลือกจากการเดานั้นเป็นตัวเลือกที่ถูก

X = 0 เมื่อตัวเลือกที่เลือกจากการเดานั้นเป็นตัวเลือกที่ผิด

ดังนั้น X มีการแจกแจงแบบแบร์นูลลีและการแจกแจงความน่าจะเป็นเขียนได้ ดังนี้

$$f\left(x\ ;\ \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{1-x}\ ,\ x = 0,1$$

<u>ตัวอย่าง 3.4</u> โรงงานทอผ้าแห่งหนึ่งมีพนักงานร้อยละ 50 เป็นเพศหญิง ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม โดย $x = 1$ เมื่อพนักงานเป็นเพศหญิง และ $x = 0$ เมื่อพนักงานเป็นเพศชาย จงหาค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของ X

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $p = 0.5$

ดังนั้น $\mu = p = 0.5$ และ $\sigma^2 = pq = 0.5(1-0.5) = 0.25$

<u>ตัวอย่าง 3.5</u> สุ่มหยิบสินค้า 1 ชิ้นจากกล่องที่มีสินค้า 12 ชิ้น ซึ่งมีสินค้าชำรุดปนอยู่ 5 ชิ้น จงหาความน่าจะเป็นที่ได้สินค้าชำรุด

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากสิ่งที่เราสนใจคือ สินค้าชำรุด จึงให้ X แทนจำนวนสินค้าชำรุดที่ได้

ดังนั้น จึงมีเพียง 2 ค่า คือ $x = 0$ หรือ 1 เนื่องจากสุ่มสินค้าเพียงชิ้นเดียว

X จะเป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบแบร์นูลลี ที่มีค่า

$$p = P(\text{ได้สินค้าชำรุด}) = \frac{5}{12} = 0.42$$

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x\,;p) = p^{x}q^{1-x} = (0.42)^{x}(1-0.42)^{1-x}\ ,\ x = 0,1$$

ดังนั้น $P(\text{ได้สินค้าที่ชำรุด}) = P(x=1)$

$$= (0.42)^{1}(0.58)^{0} = 0.42$$

3.3 การแจกแจงแบบทวินาม

การแจกแจงทวินามเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่องชนิดหนึ่ง ที่การทดลองมีลักษณะดังต่อไปนี้

1. มีการทดลองซ้ำ ๆ กัน n ครั้ง ภายใต้สภาวการณ์เดียวกัน (ข้อจำกัดเดียวกัน)

2. การทดลองแต่ละครั้งมีผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ 2 อย่าง คือ สิ่งที่สนใจ และสิ่งที่ไม่สนใจ

3. การทดลองแต่ละครั้งเป็นอิสระกัน

4. ความน่าจะเป็นในการได้สิ่งที่สนใจจะมีค่าคงที่ทุกครั้งของการทดลองคือ p และความน่าจะเป็นในการได้สิ่งที่ไม่สนใจในแต่ละครั้งของการทดลองคือ $q = 1-p$

5. ตัวแปรสุ่ม X จะเป็นจำนวนครั้งของการทดลองที่ได้สิ่งที่สนใจจากการทดลองทั้งหมด n ครั้ง นั่นคือ $X = 0, 1, 2, \ldots, n$

จะเรียกการทดลองที่มีลักษณะข้างต้นว่า **การทดลองแบบทวินาม** (Binomial Experiment)

<u>นิยาม 3.4</u> การทดลองแบบทวินาม คือ การทดลองที่ประกอบด้วยการทดลองแบบแบร์นูลลีที่เป็นอิสระต่อกัน รวม n ครั้ง

ถ้าทำการทดลองแบบแบร์นูลลี n ครั้ง โดยอิสระกัน จะได้ตัวแปรสุ่มแบบแบร์นูลลี รวม n ตัว คือ $Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_n$

โดย Y_i เป็นตัวแปรสุ่มแบบแบร์นูลลีของการทดลองครั้งที่ i ซึ่งมีค่าเป็น

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อเกิดความไม่สำเร็จ} \\ \\ 1 & \text{เมื่อเกิดความสำเร็จ} \end{cases}$$

ให้ $Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n = X$

แล้วเรียก X ว่า เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินาม ซึ่งมีค่าเป็น $0, 1, 2, \ldots, n$ ถ้าทำการทดลองทวินามขนาด n แล้วได้ความสำเร็จ x ครั้ง และความไม่สำเร็จ $n-x$ ครั้ง จำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมด คือ

${}^{n}C_{x} = \dfrac{n!}{(n-x)!\,x!}$ วิธี ซึ่งแต่ละวิธีเกิดร่วมกันไม่ได้

<u>นิยาม 3.5</u> ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินาม แล้วจะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ว่า การแจกแจงทวินาม ซึ่งแทนด้วย $X \sim B(n\,;\,p)$ และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$b(x:n,p) = {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} \quad , \quad x = 0,1,\ldots,n$$

ตัวอย่างของตัวแปรสุ่มแบบทวินาม เช่น

1. สนใจสัดส่วนของลูกค้าที่ใช้สินค้ายี่ห้อ A

n = จำนวนลูกค้าตัวอย่างทั้งหมดที่สอบถาม

x = จำนวนลูกค้าตัวอย่างที่ใช้สินค้ายี่ห้อ A

2. สนใจสัดส่วนจำนวนสินค้าเสีย

n = สินค้าตัวอย่างที่เลือกมาตรวจสอบ

x = จำนวนสินค้าเสีย

3. สนใจสัดส่วนของนิสิตนักศึกษาชั้นปีที่ 4 ของคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชีที่จะศึกษาต่อในระดับปริญญาโท

n = จำนวนนิสิตนักศึกษาชั้นปีที่ 4 ของคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชีที่ตกเป็นตัวอย่าง

x = จำนวนนิสิตนักศึกษาชั้นปีที่ 4 ของคณะพาณิชยศาสตร์และการบัญชีที่ตกเป็นตัวอย่างที่ต้องศึกษาต่อ

4. สนใจสัดส่วนของลูกค้าที่ซื้อสินค้าโดยใช้บัตรเครดิต

n = จำนวนลูกค้าตัวอย่างทั้งหมด

x = จำนวนลูกค้าตัวอย่างที่ซื้อสินค้าโดยใช้บัตรเครดิต

ทฤษฎีที่ 3.3 ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบทวินาม คือ

$$\mu = np \qquad , \qquad \sigma^2 = npq$$

พิสูจน์ เนื่องจาก X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินาม ที่ได้จากตัวแปรสุ่มแบบแบร์นูลลี $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$

โดย

$$\begin{aligned}
X &= Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n \\
E(X) &= E\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n\right) \\
&= E\left(Y_1\right) + E\left(Y_2\right) + \ldots + E\left(Y_n\right) \quad \text{ตามคุณสมบัติของค่าคาดหวัง} \\
&= p + p + \ldots + p \quad \text{เนื่องจากค่าเฉลี่ยของการแจกแจงแบบแบร์นูลลีเท่ากับ p} \\
&= np \\
&= \mu
\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}
Var(X) &= Var\left(Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n\right) \\
&= Var\left(Y_1\right) + Var\left(Y_2\right) + \ldots + Var\left(Y_n\right) \\
&= pq + pq + \ldots + pq \quad \text{เนื่องจากความแปรปรวนของการแจกแจงแบบแบร์นูลลีเท่ากับ pq}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
Var(X) &= npq \\
&= \sigma^2
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.6 ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง1 ลูก 5 ครั้ง จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าหงายแต้ม 1 ในการทอดลูกเต๋าครั้งแรกและครั้งสุดท้าย

ข. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายแต้ม 1 รวม 2 ครั้ง

ค. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะหงายแต้ม 1 อย่างมาก 2 ครั้ง

ง. จำนวนครั้งโดยเฉลี่ยที่ลูกเต๋าจะหงายแต้ม 1

วิธีทำ ให้ Y_i เป็นตัวแปรสุ่มแบบแบร์นูลลีของการทอดลูกเต๋าครั้งที่ i ซึ่งมีค่าเป็น

$$y_i = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อลูกเต๋าหงายแต้มอื่น ๆ ด้วย } q = 5/6 \\ 1 & \text{เมื่อลูกเต๋าหงายแต้ม 1 ด้วย } p = 1/6 \end{cases}$$

ก. ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าหงายแต้ม 1 ในการทอดลูกเต๋าครั้งแรกและครั้งสุดท้าย

$$
\begin{aligned}
&P(Y_1=1,\ Y_2=0,\ Y_3=0,\ Y_4=0,\ Y_5=1)\\
&\quad = P(Y_1=1)P(Y_2=0)P(Y_3=0)P(Y_4=0)P(Y_5=1)\\
&\quad = \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\\
&\quad = 0.016
\end{aligned}
$$

ข. ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ลูกเต๋าหงายแต้ม 1 จากการทอดลูกเต๋า 1 ลูก 5 ครั้ง

ดังนั้น $X \sim B\,(5\,;1/6)$

$$P(X=2) = b(2\ ;\ 5,\ 1/6)$$

$$^{5}C_2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = 0.1608$$

ค. $$P(X \le 2) = \sum_{x=0}^{2} \mathrm{b}\left(x\ ;\ 5,\ 1/6\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= {}^{5}C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 + {}^{5}C_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^4 + {}^{5}C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3\\
&= 0.4019+0.4019+0.1608\\
&= 0.9646
\end{aligned}
$$

ง. $$E(X) = np = (5)\left(\frac{1}{6}\right) = 0.833$$

ตัวอย่าง 3.7 ถ้าโอกาสที่นายสมนึกจะยิงปืนแล้วถูกเป้าที่ตั้งไว้เป็น 80 % ถ้านายสมนึกยิงปืน 4 ครั้ง จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่จะยิงถูกเป้า 1 ครั้ง

ข. ความน่าจะเป็นที่ยิงถูกเป้าอย่างน้อย 1 ครั้ง

ค. โดยเฉลี่ยแล้วนายสมนึกยิงถูกเป้ากี่ครั้ง และจงหาค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน

วิธีทำ เนื่องจากการยิงปืนแต่ละครั้งเป็นอิสระกันและความน่าจะเป็นที่นายสมนึกจะยิงถูกเป้าเป็น 80 % ทุกครั้งของการยิง

ให้ X = จำนวนครั้งที่ยิงถูกเป้าจากการยิงปืนทั้งหมด 4 ครั้ง

X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินามที่มี $n=4$, $p=0.8$ หรือ

$X \sim B(n=4 \; , \; p=0.8)$, $x = 0, 1, 2, 3, 4$

ก. การคำนวณหา P(จะยิงถูกเป้า 1 ครั้ง) $= P(X=1)$ อาจจะทำโดยวิธี คือ

1. คำนวณโดยตรง

$$P(X=1) = {}^4C_1(0.8)^1(0.2)^{4-1} = 0.0256$$

2. หรือใช้ตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินาม ซึ่งมีค่า

$n = 1, 2, \ldots, 20$, $P = 0.05, 0.10, \ldots, 0.5$

n	x	.05	.10	.15	.20	.25	.30	.35	.40	.45	.50
		p									
4	0	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1785	.1296	.0915	.0625
	1	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3845	.3456	.2995	.2500
	2	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.3105	.3456	.3675	.3750
	3	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.1115	.1536	.2005	.2500
	4	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0150	.0256	.0410	.0625

แต่ในปัญหานี้ $p=0.8$ ซึ่งไม่มีในตารางแต่ยังคงใช้ตารางทวินามได้ โดยเปิดที่ $n=4$; $q=0.2$ และ $n-X = 4-1 = 3$ ซึ่งหมายความว่าจะเปิดตารางหา $P(X=1)$ ที่ $p=0.2$

และ $x=3$ แทนเนื่องจาก $P(X=1) = {}^4C_1(0.8)^1(0.2)^3$

$$P(n-x=3) = {}^4C_3(0.8)^1(0.2)^1$$

และ ${}^4C_1 = {}^4C_3 = 4$ ดังนั้น $P(X=1) = P(n-x=3)$ หรือเปิดตารางที่ $n=4$; $p=0.2$, $x = 3$ ได้ $P(X=1) = 0.0256$ ซึ่งหมายความว่า P(ยิงถูกเป้า 1 ครั้ง) = 0.0256

ข. P (ยิงถูกเป้าอย่างน้อย 1 ครั้ง)

$$= P(X \geq 1) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)$$

$$= {}^4C_1(0.8)^1(0.2)^3 + {}^4C_2(0.8)^2(0.2)^2 + {}^4C_3(0.8)^3(0.2)^1 + {}^4C_4(0.8)^4(0.2)^0$$

$$= 0.0256 + 0.1536 + 0.4096 + 0.4096$$

$$= 0.9984$$

หรือ $P(X \geq 1) = 1-P(X=0)$ เนื่องจาก $\sum_{i=1}^{4} P(X=x_i) = 1$

$$= 1-{}^4C_0(0.8)^0(0.2)^4$$

$$= 1 - 0.0016$$

$$= 0.9984$$

ค. โดยเฉลี่ยแล้วนายสมนึกยิงถูกเป้า $E(X) = np = 4(0.8) = 3.2$

และค่าความแปรปรวน $Var(X) = npq = 4(0.8)(0.2) = 0.64$

ดังนั้น ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{4(0.8)(0.2)} = \sqrt{0.64}$

การใช้ตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบทวินาม

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ การคำนวณหาค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบทวินามค่อนข้างจะเสียเวลา แต่จะคำนวณหาได้อย่างรวดเร็วยิ่งขึ้นโดยใช้ตารางที่เรียกว่า Cumulative Binomial Probability Distribution ซึ่งแสดงความน่าจะเป็นในลักษณะ

$$P(X \geq r) = P(X \geq r \mid n, p) = \sum_{x=r}^{n} \mathrm{b}(x\ ;\ n,\ p)$$

โดย n มีค่าตั้งแต่ 5 – 20 และ 25 ส่วน p มีค่าเริ่มจาก 0.01 ถึง 0.5 โดยมีวิธีใช้ดังนี้

ก. เมื่อความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จ p มีค่าเริ่มจาก **0.01 ถึง 0.5** ได้

1. $P(X = r) = \sum_{x=r}^{n} \mathrm{b}(x;n,p) - \sum_{x=r+1}^{n} \mathrm{b}(x;n,p)$

2. $P(X \leq r) \;=\; 1 - \sum_{x=r+1}^{n} \mathrm{b}(x;n,p)$

3. $P(r \leq X \leq s) \;=\; \sum_{x=r}^{n} \mathrm{b}(x;n,p) - \sum_{x=s+1}^{n} \mathrm{b}(x;n,p)$

ข. เมื่อความน่าจะเป็นที่เกิดความสำเร็จ p มีค่า**มากกว่า 0.5** ได้

$$P(X \geq r) \;=\; 1 - \sum_{x=0}^{r-1} \mathrm{b}(x;n,p)$$

$$= \; 1 - \sum_{x=n-r+1}^{n} \mathrm{b}(x;n,p^{*})$$

โดยที่ $p^{*} = q = 1-p$ ซึ่งมีค่าน้อยกว่า 0.5

<u>ตัวอย่าง 3.8</u> ผู้จัดการร้านจำหน่ายเครื่องใช้ไฟฟ้าแห่งหนึ่งทราบว่า จากลูกค้าที่เข้ามาเลือกชมสินค้ามีเพียงร้อยละ 28 ที่ซื้อสินค้า ถ้ามีลูกค้าเข้ามาเลือกชมสินค้า 12 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกค้าซื้อสินค้า

ก. อย่างน้อย 6 คน

ข. อย่างมาก 3 คน

ค. 5 คน

<u>วิธีทำ</u> ให้ X เป็นจำนวนลูกค้าที่ซื้อสินค้า โดย $X \sim B(12\,;0.28)$

ก. $P(X \geq 6) \;=\; \sum_{x=6}^{12} \mathrm{b}(x;12,0.28) =$

ข. $P(X \leq 3) \;=\; 1 - \sum_{x=4}^{12} \mathrm{b}(x;12,0.28) = 1 - 0.4452 = 0.5548$

ค. $P(X = 5) \;=\; \sum_{x=5}^{12} \mathrm{b}(x;12,0.28) - \sum_{x=6}^{12} \mathrm{b}(x;12,0.28)$

$$= \; 0.2254 - 0.0887 = 0.1367$$

ตัวอย่าง 3.9 ถั่วเหลืองมีอัตราการงอกร้อยละ 80 ถ้าทำการเพาะถั่วเหลือดังกล่าว 15 เมล็ด จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีถั่วเหลืองงอก

ก. อย่างมาก 8 เมล็ด

ข. ตั้งแต่ 9 ถึง 11 เมล็ด

วิธีทำ ให้ X เป็นจำนวนเมล็ดถั่วเหลือที่งอก โดย $X \sim B(15\,;0.8)$

ก. $$P(X \leq 8) = \sum_{x=0}^{8} \mathrm{b}(x;15,0.8)$$

$$= \sum_{x=7}^{15} \mathrm{b}(x;15,0.2) = 0.0181$$

ข. $$P(9 \leq X \leq 11) = \sum_{x=0}^{11} \mathrm{b}(x;15,0.8) - \sum_{x=0}^{8} \mathrm{b}(x;15,0.8)$$

$$= \sum_{x=4}^{15} \mathrm{b}(x;15,0.2) - \sum_{x=7}^{15} \mathrm{b}(x;15,0.2)$$

$$= 0.3518 - 0.0181$$

$$= 0.3337$$

3.4 การแจกแจงแบบปัวส์ซอง

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง หรืออาณาบริเวณหนึ่งที่สนใจ ตัวอย่างเช่น

X เป็นจำนวนลูกค้าที่มาใช้บริการเครื่องฝาก-ถอนเงินอัตโนมัติ แห่งหนึ่งใน 1 วัน

X เป็นจำนวนครั้งที่มีโทรศัพท์ต่อเข้ามาที่หมายเลขหนึ่งระหว่างเวลา 9.00 – 10.00 น.

แล้วจะเรียก X ว่า **ตัวแปรสุ่มแบบปัวส์ซอง** ซึ่งได้จากการทดลองแบบปัวส์ซอง

<u>นิยาม 3.6</u> ถ้า X เป็นจำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา หรืออาณาบริเวณที่สนใจ ที่ได้จากการทดลองแบบปัวส์ซอง แล้วจะเรียก X ว่า **ตัวแปรสุ่มแบบปัวส์ซอง** และเรียกการแจงแจงความน่าจะเป็นของ X ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f\left(x\,;\lambda\right)$ ว่า **การแจกแจงแบบปัวส์ซอง** (Poisson distribution) โดย

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \; x = 0,1,2,\ldots$$

เมื่อ $e = 2.71828\ldots$ และ λ คือ จำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นโดยเฉลี่ยในช่วงเวลาหรืออาณาบริเวณที่สนใจ

<u>ทฤษฎีที่ 3.4</u> ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวส์ซอง คือ

$$\mu = \lambda \qquad , \qquad \sigma = \lambda$$

<u>ตัวอย่าง 3.10</u> จากการสำรวจพบว่า ถนนในชนบทสายหนึ่งมีรถยนต์วิ่งผ่าน โดยเฉลี่ยชั่วโมงละ 24 คัน จงหาความน่าจะเป็นที่ถนนสายนี้จะ

ก. มีรถยนต์วิ่งผ่านอย่างมาก 30 คัน ใน 1 ชั่วโมง

ข. มีรถยนต์วิ่งผ่าน 6 คัน ใน 20 นาที

<u>วิธีทำ</u> ก. ให้ X เป็นจำนวนรถยนต์ที่วิ่งผ่านถนนสายนี้ใน 1 ชั่วโมง

$$f(x;24) = \frac{e^{-24}24^{x}}{x!} \quad ; \; x = 0,1,2,\ldots$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 30) &= 1 - \sum_{x=31}^{\infty} f(x;24) \\ &= 1 - 0.096 \\ &= 0.904 \end{aligned}$$

ข. ให้ X เป็นจำนวนรถยนต์ที่วิ่งผ่านถนนสายนี้ใน 20 นาที

โดย $\lambda = \dfrac{(24)(20)}{60} = 8$ ใน 20 นาที

$$f(x;8) = \frac{e^{-8}\,8^{x}}{x!} \quad ; \; x = 0,1,2,\ldots$$

$$P(X=6) = \sum_{x=6}^{\infty} f(x;8) - \sum_{x=7}^{\infty} f(x;8)$$

$$= 0.809 - 0.687$$

$$= 0.122$$

<u>ตัวอย่าง 3.11</u> ร้านขายไอศครีมแห่งหนึ่งเปิดให้บริการวันละ 8 ชั่วโมง จากประสบการณ์พบว่า จะมีลูกคาเข้ามารับประทานไอศครีมโดยเฉลี่ยวันละ 10 คน จงหา

ก. ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศครีม 3 – 5 คนในวันพรุ่งนี้

ข. ความน่าจะเป็นที่ในวันพรุ่งนี้จะไม่มีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศครีมเลย

<u>วิธีทำ</u> ให้ X เป็นจำนวนลูกค้าเข้าที่เข้ามารับประทานไอศครีมใน 1 วัน

$$f(x;10) = \frac{e^{-10}\,10^{x}}{x!} \quad ; \; x = 0,1,2,\ldots$$

ก. ความน่าจะเป็นที่ในวันพรุ่งนี้จะมีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศครีม 3 – 5 คน

$$P(3 \le X \le 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= \frac{e^{-10}\,10^{3}}{3!} + \frac{e^{-10}\,10^{4}}{4!} + \frac{e^{-10}\,10^{5}}{5!}$$

$$= 0.00757 + 0.0189 + 0.0378$$

$$= 0.0643$$

ข. ความน่าจะเป็นที่ในวันพรุ่งนี้จะไม่มีลูกค้าเข้ามารับประทานไอศครีมเลย

$$P(X=0) = \frac{e^{-10}\,10^{0}}{0!}$$

$$= 0.000045$$

3.5 การประมาณค่าการแจกแจงแบบทวินามด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซอง

สำหรับการแจกแจงแบบทวินาม $b(x\ ;\ n\ ;\ p)$ ใด ๆ ถ้า n มีค่ามาก $(n \to \infty)$, p มีค่าน้อย $(p \to 0)$ และ np เป็นค่าคงตัวแล้ว สามารถประมาณค่าการแจกแจงทวินาม $b(x\ ;\ n\ ;\ p)$ ด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซอง $f\left(x;\lambda\right)$ โดย $\lambda = np$

<u>ทฤษฎี 3.5</u> ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินามที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $b(x\ ;\ n\ ;\ p)$ ถ้า

$n \to \infty$, $p \to 0$ และ $\lambda = np$ แล้ว

$$b(x\ ;\ n\ ;\ p \quad \to \quad f\left(x;\lambda\right)$$

หรือ $$b(x\ ;\ n\ ;\ p \quad = \quad f\left(x;\lambda\right)$$

<u>ตัวอย่าง 3.12</u> ถ้าความน่าจะเป็นที่คนแต่ละคนจะตาบอดสีเท่ากับ 0.001 จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มคนมาจำนวน 1,000 คน แล้วพบว่าตาบอดสีอย่างมาก 5 คน

<u>วิธีทำ</u> ให้ X เป็นจำนวนคนตาบอดสีที่สุ่มพบ โดย $X \sim B(1{,}000\ ; 0.001)$ ได้

$$\lambda = 1000\left(0.001\right) = 1$$

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= \sum_{x=0}^{5} b(x;\ 1000,\ 0.001) \approx \sum_{x=0}^{5} f(x;\ 1) \\ &= 1 - \sum_{x=6}^{\infty} f(x;\ 1) \\ &= 1 - 0.001 \\ &= 0.999 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.13 จากประสบการณ์ที่ผ่านมาพบว่า 1% ของจำนวนหลอดไฟที่ผลิตโรงงานแห่งหนึ่งจะเสีย จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนหลอดไฟมากกว่าหรือเท่ากับ 1 หลอดจะเสีย จากการสุ่มหลอดไฟที่ผลิตมา 100 หลอด

วิธีทำ ให้ X เป็นจำนวนจำนวนหลอดไฟที่เสีย $x = 0, 1, 2, 3, \ldots, 100$ โดย

$X \sim B(100\,; 0.01)$

เนื่องจาก $n = 100$ มีค่ามาก และ $p = 0.01$ มีค่าเข้าใกล้ 0 ดังนั้น จะประมาณค่าการแจกแจงแบบทวินามด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซอง นั่นคือ

$$\lambda = np = 100(0.01) = 1$$

ดังนั้น
$$P(X \geq 1) = \sum_{x=1}^{\infty} f(x;\,1) = 0.7358$$

3.6 บทสรุป

การแจกแจงยูนิฟอร์มชนิดไม่ต่อเนื่อง

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, \ldots, x_k$ และความน่าจะเป็นของแต่ละค่ามีค่าเท่ากัน แล้วจะกล่าวว่า X มีการแจกแจงยูนิฟอร์มชนิดไม่ต่อเนื่อง (Discrete uniform distribution) และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x\,;k) = \frac{1}{k} \quad , \quad x = x_1, x_2, \ldots, x_k$$

โดยมีค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของการแจกแจงยูนิฟอร์มชนิดไม่ต่อเนื่อง คือ

$$\mu = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_i \quad , \quad \sigma^2 = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \mu)^2$$

การแจกแจงแบบแบร์นูลลี

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม ที่มีค่าเป็น

$$x = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อเกิดความไม่สำเร็จ} \\ 1 & \text{เมื่อเกิดความสำเร็จ} \end{cases}$$

แล้วเรียก X ว่า เป็นตัวแปรสุ่มแบร์นูลลี และเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ว่า การแจกแจงแบบแบร์นูลลี โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น คือ

$$f(x\,;p) = p^{x}q^{1-x} \quad , \; x = 0,1$$

ซึ่งค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบแบร์นูลลี คือ

$$\mu = p \qquad , \qquad \sigma^2 = pq$$

การแจกแจงแบบทวินาม

ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินาม แล้วจะเรียกการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ว่า การแจกแจงทวินาม ซึ่งแทนด้วย $X \sim B(n\,;p)$ และฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$b(x:n,p) = {}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x} \quad ,x \quad 0,1,\ldots,n$$

โดยมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบทวินาม คือ

$$\mu = np \qquad , \qquad \sigma^2 = npq$$

การแจกแจงแบบปัวส์ซอง

ถ้า X เป็นจำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นในช่วงเวลา หรืออาณาบริเวณที่สนใจ ที่ได้จากการทดลองแบบปัวส์ซอง แล้วจะเรียก X ว่า ตัวแปรสุ่มแบบปัวส์ซอง และเรียกการแจงแจงความน่าจะเป็นของ X ซึ่งมีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $f\left(x\,;\lambda\right)$ ว่า การแจกแจงแบบปัวส์ซอง (Poisson distribution) โดย

$$f(x;\lambda) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad ; \; x = 0,1,2,\ldots$$

เมื่อ $e = 2.71828\ldots$ และ λ คือ จำนวนครั้งของเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นโดยเฉลี่ยในช่วงเวลาหรืออาณาบริเวณที่สนใจโดยมีค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของการแจกแจงแบบปัวส์ซอง คือ

$$\mu = \lambda \quad , \quad \sigma = \lambda$$

การประมาณค่าการแจกแจงแบบทวินามด้วยการแจกแจงแบบปัวส์ซอง

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแบบทวินามที่มีฟังก์ชันความน่าจะเป็น $b(x\ ;\ n\ ;\ p)$ ถ้า

$n \rightarrow \infty,\ p \rightarrow 0$ และ $\lambda = np$ แล้ว

$b(x\ ;\ n\ ;\ p) \rightarrow f\left(x;\lambda\right)$ หรือ $b(x\ ;\ n\ ;\ p) = f\left(x;\lambda\right)$

แบบฝึกหัด บทที่ 3

1. ในมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง พบว่า 20 % ของนักศึกษาที่ถนัดมือซ้าย ถ้าเราสุ่มนักศึกษามา 20 คน จงหา

    ก. ความน่าจะเป็นที่พบนักศึกษาที่ถนัดมือซ้ายอย่างมาก 5 คน

    ข. ค่าเฉลี่ยของจำนวนนักศึกษาที่ถนัดมือซ้าย

    ค. ความแปรปรวนของจำนวนนักศึกษาที่ถนัดมือซ้าย

2. กำหนดให้ตัวแปรสุ่ม $X \sim B(10\,;0.3)$ จงหา

    ก. $P(X = 5)$

    ข. $P(X \leq 7)$

3. จำนวนอุบัติเหตุรถชนกันในมหาวิทยาลัยเชียงใหม่ โดยเฉลี่ยเกิดขึ้น 4 รายต่อวัน จงหา ความน่าจะเป็นที่

    ก. ไม่เกิดอุบัติเหตุรถชนกันเลยในวันใด ๆ

    ข. มีอุบัติเหตุเกิดขึ้น 6 รายในวันพรุ่งนี้

4. ผู้จัดการศูนย์การค้าแห่งหนึ่ง สังเกตพบว่า โดยเฉลี่ยแล้วจะมีลูกค้ามาชำระเงินที่พนักงานจ่ายเงิน จำนวน 16 คน ใน 10 นาที ดังนั้นเพื่อให้การจัดการเกี่ยวกับจำนวนพนักงานจ่ายเงินและจัดตารางเวลาที่ทำงานให้เหมาะสมจึงต้องการทราบความน่าจะเป็นดังต่อไปนี้

    ก. ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าอย่างมาก 5 คน มาชำระเงินที่พนักงานจ่ายเงินใน 1 นาทีใด ๆ

    ข. โอกาสที่จะไม่มีลูกค้าเลยมาชำระเงินที่พนักงานจ่ายเงินใน 1 นาทีใด ๆ

    ค. ความน่าจะเป็นที่จะมีลูกค้าอย่างน้อย 2 คน มาชำระเงินในช่วงเวลา 3 นาทีใด ๆ ของวันพรุ่งนี้

5. พนักงานขายเครื่องเขียนคนหนึ่งทราบว่าร้อยละ 3 ของปากกาตราหนึ่งที่สั่งมาจำหน่ายจะใช้การไม่ได้ ถ้าสั่งปากกาตราดังกล่าวมาจำหน่าย 400 ด้าม จงหาความน่าจะเป็นที่จะมีปากกาที่

    ก. ใช้การได้ทั้งหมด

    ข. ใช้การไม่ได้ 10 ด้าม