บทที่ 1
ความน่าจะเป็น

ชีวิตความเป็นอยู่ทุกวันนี้โดยทั่วไปเรามักจะพบกับเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่มีโอกาสจะเกิดขึ้น เช่น ถ้าเราซื้อสลากกินแบ่งรัฐบาล เรามีโอกาสจะถูกรางวัล หรือไม่ถูกรางวัลก็ได้ หรือการโยนเหรียญ 1 อัน 1 ครั้ง มีโอกาสขึ้นหัวหรือก้อยได้เท่า ๆ กัน หรือจากการหยิบไพ่ 1 ใบ จากไพ่ 1 สำรับ ที่มี 52 ใบ มีโอกาสที่จะได้ควีนสีแดงหรือไม่ได้ควีนสีแดงก็ได้ เป็นต้น โอกาสหรือความน่าจะเป็น จึงเป็นคำตอบที่เป็นไปได้ของเหตุการณ์สนใจที่เกิดขึ้นจากการกระทำที่เป็นการทดลองสุ่ม ดังนั้น ก่อนที่จะหาค่าความน่าจะเป็นได้ จึงจำเป็นต้องรู้จักคำที่เกี่ยวข้องอย่างน้อย 3 คำ คือ การทดลองสุ่ม แซมเปิลสเปซ และเหตุการณ์

1.1 ความหมายของความน่าจะเป็น

ในชีวิตประจำวันเราอยู่กับเหตุการณ์ต่าง ๆ และมีคำถามอยู่ในใจตลอดเวลา เช่น

- พรุ่งนี้ฝนจะตกหรือไม่
- ทีมฟุตบอลทีมใดจะได้เป็นแชมป์โลก
- นายกอาจลาออกและยุบสภาเร็วๆนี้

คำว่า “**ความน่าจะเป็น**” หรือ “**Probability**” เป็นวิธีการวัดความไม่แน่นอนในรูปแบบคณิตศาสตร์ เช่น การโยนเหรียญ ซึ่งมีโอกาสเกิดหัวหรือเกิดก้อย ความน่าจะเป็นของเหรียญที่จะออกหัวหรือออกก้อยเท่ากับ 0.5 ซึ่งความน่าจะเป็นจะมีการกำหนดค่าเป็นเศษส่วนหรือเป็นเปอร์เซนต์ หรือให้มีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1

ดังนั้น ความน่าจะเป็น หมายถึง ค่าที่แสดงให้ทราบว่าเหตุการณ์หนึ่ง ๆ จะมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด

1.2 การทดลองสุ่ม แซมเปิลสเปซและเหตุการณ์

การทดลองสุ่ม คือ การทดลองที่ไม่สามารถทำนายผลการทดลองได้อย่างถูกต้องแน่นอน เนื่องจากผลการทดลองที่ได้เกิดขึ้นได้หลายอย่าง

ตัวอย่างของการทดลองสุ่ม เช่น

- การโยนเหรียญ 1 ครั้ง
- การทอดลูกเต๋า 1 ลูก
- การตรวจสอบอายุการใช้งานของหลอดไฟ

แซมเปิลสเปซ (Sample space) ของการทดลองสุ่มหนึ่ง ๆ คือ **เซต** ซึ่งสมาชิกในเซตเป็นผลการทดลองเชิงสุ่มที่เป็นไปได้ทั้งหมด เขียนแทนด้วย S และเรียกสมาชิกของแซมเปิลสเปซ ว่า **แซมเปิลพ้อยท์** (Sample point)

เหตุการณ์ (Event) คือ **เซตย่อย** (Subset) ของแซมเปิลสเปซ โดยเรียกเซตย่อยที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวว่า **<u>เหตุการณ์เดี่ยว</u>** (Simple event) และเรียกเซตย่อยที่มีสมาชิกหลายตัวว่า **<u>เหตุการณ์ประกอบ</u>** (Compound event)

เนื่องจากเหตุการณ์แทนได้ด้วยเซต ดังนั้น จึงมีการดำเนินการระหว่างเซต (Operation on set) ได้แก่ ยูเนียน (Union), อินเตอร์เซคชัน (Intersection), ผลต่าง (Difference) และคอมพลีเมนท์ (Complement) ซึ่งทำให้เกิดเหตุการณ์ใหม่ขึ้น

ให้ A และ B เหตุการณ์ใด ๆ จากการทดลองที่มีแซมเปิลสเปซ S

1. A union B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลการทดลองที่อยู่ใน A หรือ B
2. A intersect B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลการทดลองที่อยู่ใน A และ B
3. Difference ของ A เขียนแทนด้วย $A - B$ คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลการทดลองที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B
4. Complement ของ A เขียนแทนด้วย A' หรือ A^c คือ เหตุการณ์ที่ประกอบด้วยผลการทดลองที่ไม่อยู่ใน A แต่อยู่ใน S

<u>ตัวอย่าง 1.1</u> ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก 1 ครั้ง แซมเปิลสเปซ คือ

<u>วิธีทำ</u> แซมเปิลสเปซ คือ S = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),

(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),

(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),

(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),

(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),

(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลบวกของแต้มเป็น 12 A = { (6,6) }

ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ได้ผลบวกของแต้มเป็น 6 B = { (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) }

ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายแต้มเดียวกัน C = { (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) }

ให้ D เป็นเหตุการณ์ที่แต้มของลูกเต๋าอย่างน้อย 1 ลูก หารด้วย 2 ลงตัว

D = { (1,2), (1,4), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,2), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

ซึ่ง A, B, C และ D ต่างก็เป็นเซตย่อยของ S โดย A เป็น**เหตุการณ์เดี่ยว** ส่วน B, C และ D เป็น**เหตุการณ์ประกอบ**

และได้ $B \cup C$ คือ เหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเป็น 6 หรือลูกเต๋าหงายแต้มเดียวกัน

$B \cup C$ = { (1,1), (1,5), (2,2), (2,4), (3,3), (4,2), (4,4), (5,1), (5,5), (6,6) }

$B \cap D$ คือ เหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มเป็น 6 และลูกเต๋าอย่างน้อย 1 ลูก หารด้วย 2 ลงตัว

$B \cap D$ = { (2,4), (4,2) }

C' คือ เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าไม่หงายแต้มเดียวกัน

C' = { (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5) }

1.3 การจัดลำดับ (Permutation)

การนำสิ่งของหลายสิ่งต่าง ๆ กัน มาจัดเรียงคราวละทั้งหมดหรือเพียงบางส่วน โดย**คำนึงถึงลำดับ**ของแต่ละสิ่งของที่จัดเรียง จะเรียกว่า **การจัดลำดับ**

การจัดลำดับสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

ทฤษฎีที่ 1.1 จัดลำดับของ n สิ่ง ที่แตกต่างกัน โดยจัดคราวละ n สิ่ง ได้

$$n(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) \quad = \quad n! \text{ วิธี}$$

หมายเหตุ 1. สัญลักษณ์ $n!$ อ่านว่า n แฟคทอเรียล (n-factorial)

2. $0! = 1$

ตัวอย่าง 1.2 จงหาจำนวนวิธีจัดลูกบอล 4 ลูก ซึ่งมีสีแดง สีดำ สีขาว และสีเขียว อย่างละ 1 ลูก โดย

ก. ไม่มีข้อแม้ใด ๆ

ข. ถ้าให้ลูกบอลสีแดงและสีดำอยู่ชิดติดกันเสมอ

ค. ถ้าไม่ให้ลูกบอลสีแดงและสีดำอยู่ชิดติดกัน

วิธีทำ ก. มีลูกบอล 4 ลูก และจัดลำดับคราวละ 4 ลูก

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดลำดับทั้งหมด เท่ากับ 4! = 24 วิธี

ข. ถ้าให้ลูกบอลสีแดงและสีดำอยู่ชิดติดกันเสมอ ก็เหมือนกับการจัดลูกบอลเพียง 3 ลูก ซึ่งจะจัดได้ 3! วิธี แต่ลูกบอลสีแดงและสีดำซึ่งอยู่ชิดติดกัน ยังสลับที่กันได้ เท่ากับ 2! วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีจัดลำดับลูกบอล 4 ลูก โดยลูกบอลสีแดงและสีดำอยู่ชิดติดกันเสมอ เท่ากับ 2!3! = 12 วิธี

ค. จำนวนวิธีจัดลำดับลูกบอล 4 ลูก โดยไม่ให้ลูกบอลสีแดงและสีดำอยู่ชิดติดกัน เท่ากับ 4! – 2!3! = 24 – 12 = 12 วิธี

ทฤษฎีที่ 1.2 จำนวนวิธีจัดลำดับของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกัน โดยจัดคราวละ r สิ่ง คือ ${}^{n}P_{r}$ วิธี โดย

$$ {}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} \quad , \; r \le n $$

<u>ตัวอย่าง 1.3</u> ในการประชุมสมาชิกของสมาคมแห่งหนึ่ง เพื่อเลือกตั้งกรรมการตำแหน่งนายกสมาคมและรองนายกสมาคม มีผู้เสนอชื่อสมาชิก 7 คน โดยครั้งแรกจะเลือกนายก และครั้งที่สองจะเลือกรองนายกสมาคม ในการเลือกตั้งกรรมการครั้งนี้จะมีกรรมการต่าง ๆ กันได้กี่ชุด

<u>วิธีทำ</u> การเลือกตั้งกรรมการชุดนี้เป็นการจัดคน 2 คนจาก 7 คน โดยคนแรกให้เป็นนายกสมาคม คนที่สองให้เป็นรองนายกสมาคม ดังนั้นมีจำนวนกรรมการที่เป็นไปได้ เท่ากับ

$$ {}^{7}P_{2} = \frac{7!}{(7-2)!} = 7 \times 6 = 42 \text{ วิธี} $$

<u>ตัวอย่าง 1.4</u> จงหาเลข 3 หลัก ชนิดไม่ซ้ำกันที่เป็นไปได้ทั้งหมด โดยมีค่ามากกว่า 700

<u>วิธีทำ</u> หลักร้อยอาจเป็นเลข 7 หรือ 8 หรือ 9 จึงจัดได้ ${}^{3}P_{1}$ วิธี

ในแต่ละวิธีของหลักร้อย จัดหลักหน่วยและหลักสิบได้ ${}^{9}P_{2}$ วิธี

ดังนั้น จัดเลข 3 หลัก ชนิดไม่ซ้ำกันมีค่ามากกว่า 700 ได้ทั้งหมด

$$ = {}^{3}P_{1}\,{}^{9}P_{2} $$

$$ = \frac{3!}{2!} \times \frac{9!}{7!} = 216 \text{ วิธี} $$

การจัดลำดับสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

พิจารณาการจัดลำดับของตัวอักษร a, b และ c จำนวนวิธีจัดลำดับอักษรทั้ง 3 ตัว เท่ากับ 3! = 6 วิธี คือ abc, acb, bca, bac, cab, cba

แต่ถ้าตัวอักษร a และ b เหมือนกัน โดยสมมติให้เป็น x จากวิธีจัดลำดับทั้ง 6 วิธี จะกลายเป็น xxc, xcx, xcx, xxc, cxx, cxx ซึ่งมีจำนวนวิธีจัดลำดับที่แตกต่างกันอยู่ 3 วิธี

ทฤษฎีที่ 1.3 จัดลำดับของ n สิ่ง ซึ่งมี $n_1, n_2, \ldots, n_k$ สิ่ง เหมือนกัน ได้

$$ {}^{n}P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} \text{ วิธี โดย } {}^{n}P_{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \text{ เมื่อ } \sum_{i=1}^{k} n_i = n $$

<u>**ตัวอย่าง 1.5**</u> จากคำว่า “STATISTICS” จงหาจำนวนคำที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่เกิดจากการผสมของตัวอักษรของคำดังกล่าว เมื่อถือว่าคำที่ผสมได้มีความหมาย โดย

ก. ไม่มีข้อแม้ใด ๆ

ข. คำที่ผสมได้ต้องขึ้นต้นด้วย A และลงท้ายด้วย T

<u>**วิธีทำ**</u> “STATISTICS” ประกอบด้วยอักษร 10 ตัว คือ S 3 ตัว, T 3 ตัว, A 1 ตัว, I 2 ตัว และ C 1 ตัว

ก. จำนวนคำที่เกิดจากการผสมของตัวอักษร 10 ตัว ที่เป็นไปได้ เท่ากับ

$$ {}^{10}P_{3,3,1,2,1} = \frac{10!}{3!3!1!2!1!} = 50,400 \text{ คำ} $$

ข. จำนวนคำที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ขึ้นต้นด้วย A และลงท้ายด้วย T เท่ากับ

$$ 1 \times 1 \times {}^{8}P_{3,2,2,1} = 1 \times 1 \times \frac{8!}{3!2!2!1!} = 1,680 \text{ คำ} $$

1.4 การจัดหมู่ (Combination)

การจัดหมู่ คือ วิธีการเลือกสิ่งของทั้งหมดหรือบางสิ่งที่กำหนดให้ โดยไม่คำนึงถึงลำดับ ตัวอย่างเช่น จากตัวอักษร 3 ตัว คือ a, b และ c

ถ้านำมาจัดลำดับคราวละ 3 ตัว จะจัดได้ ${}^{3}P_{3} = 3! = 6$ คือ abc, acb, bca, bac, cab, cba แต่ถ้านำมาจัดหมู่หรือเลือกมาคราวละ 3 ตัว จะเลือกได้ 1 วิธี คือ abc

ทฤษฎีที่ 1.4 จำนวนวิธีการเลือกของ r สิ่ง จากของ n สิ่ง ซึ่งแตกต่างกัน คือ ${}^{n}C_{r}$ วิธี โดย

$$ {}^{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad , \; r \leq n $$

<u>ตัวอย่าง 1.6</u> ในการประชุมวิชาการครั้งหนึ่ง มีผู้เข้าประชุม 15 คน ถ้าจะเลือก 3 คน มาเป็นตัวแทน จะทำได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> เลือกคน 3 คนจาก 15 คนทำได้

$$^{15}C_3 = \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{15\times 14\times 13}{3\times 2} = 455 \text{ วิธี}$$

<u>ตัวอย่าง 1.7</u> ในการแข่งขันฟุตบอลครั้งหนึ่ง มีทีมฟุตบอล 10 ทีม เข้าแข่งขันแบบพบกันหมด จงหาว่าผู้จัดการแข่งขันจะต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่ครั้ง

<u>วิธีทำ</u> เลือก 2 ทีมจาก 10 ทีมทำได้

$$^{10}C_2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10\times 9}{2\times 1} = 45 \text{ ครั้ง}$$

1.5 การคำนวณค่าและกฎของความน่าจะเป็น

จากการทดลองสุ่ม เรามักสนใจเหตุการณ์ต่าง ๆ มีโอกาสหรือความน่าจะเป็น (Probability) ที่จะเกิดขึ้นมากน้อยเท่าใด โดยความน่าจะเป็นของแต่ละเหตุการณ์จะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1 กล่าวคือ ถ้าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดมีค่าเท่ากับ 0 หมายความว่าเหตุการณ์นั้นไม่เกิดขึ้นเลย แต่ถ้าเท่ากับ 1 ก็หมายความว่าเหตุการณ์ดังกล่าวต้องเกิดขึ้นอย่างแน่นอน แต่ถ้ามีค่าระหว่าง 0 กับ 1 หมายความว่ามีโอกาสที่จะเกิดขึ้นน้อยหรือมาก แล้วแต่ว่ามีค่าใกล้เคียงค่าใด

นิยาม 1.1 ถ้า A เป็นเหตุการณ์ใดๆของการทดลองสุ่ม ซึ่งมีแซมเปิลสเปซเป็น S และมีความน่าจะเป็น ซึ่งแทน ด้วย P(A) แล้วได้ว่า

1. $P(A) \geq 0$
2. $P(S) = 1$
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ที่เกิดร่วมกันไม่ได้ หรือ $A \cap B = \varnothing$

นิยาม 1.2 ถ้าแซมเปิลสเปซของการทดลองสุ่มหนึ่งมีผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นได้ n(S) วิธี โดยแต่ละผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน (Equally likely outcome) และ E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ของการทดลองสุ่มนี้ซึ่ง จะเกิดผลลัพธ์ได้ n(E) วิธี และความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E คือ

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

<u>ตัวอย่าง 1.8</u> ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

ก. ลูกเต๋าหงายแต้มคู่

ข. ลูกเต๋าหงายแต้มมากกว่า 4

<u>วิธีทำ</u> ในการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 1 ลูก แซมเปิลสเปซ คือ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ก. ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายแต้มคู่

A = {2, 4, 6} ดังนั้น $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

ข. ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายแต้มมากกว่า 4

B = {5, 6} ดังนั้น $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

<u>ตัวอย่าง 1.9</u> ในการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่งจำนวน 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้

ก. หงายแต้มเดียวกัน จากการโยนทั้งสองครั้ง

ข. ผลบวกของแต้มมีค่าน้อยกว่า 4

ค. ผลบวกของแต้มมีค่ามากกว่า 3

<u>วิธีทำ</u> แซมเปิลสเปซ คือ S = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

ก. ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าหงายแต้มเดียวกัน

A = { (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) }

ดังนั้น $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ข. ให้ B เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มมีค่าน้อยกว่า 4

B = { (1,1), (1,2), (2,1) }

ดังนั้น $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

ค. ให้ C เป็นเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มมีค่ามากกว่า 3

C = { (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5) (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) }

ดังนั้น $P(C) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}$

ตัวอย่าง 1.10 จากตะกร้าใบหนึ่งซึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว 4 ลูก และสีดำ 3 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลมา 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีขาวทั้ง 2 ลูก

วิธีทำ แซมเปิลสเปซของการสุ่มหยิบลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอล 7 ลูก เท่ากับ ${}^{7}C_{2}$ วิธี

ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่หยิบได้ลูกบอลสีขาวทั้ง 2 ลูก ซึ่งได้ ${}^{4}C_{2}$ วิธี

ดังนั้น $$P(A) = \frac{{}^{4}C_{2}}{{}^{7}C_{2}} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{7!}{2!5!}} = \frac{4!5!}{2!7!} = \frac{4\times 3}{7\times 6} = \frac{2}{7}$$

กฎและทฤษฎีเกี่ยวกับความน่าจะเป็น

1. $P(\varnothing)=0$ สำหรับแซมเปิลสเปซ S ใด ๆ
2. $P(A')=1-P(A)$
3. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
4. $P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$
5. $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

1.6 ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ของการทดลองหนึ่งซึ่งแซมเปิลสเปซเป็น S แล้วจะเรียกความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อทราบเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้วว่า “ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข” และแทนด้วยสัญลักษณ์ $P(B/A)$ ซึ่งอ่านว่า “ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อเหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว” หรือ “ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ B เมื่อกำหนดเหตุการณ์ A”

นิยาม 1.3 ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ B จะเกิดขึ้นโดยมีเงื่อนไขว่า เหตุการณ์ A ได้เกิดขึ้นแล้ว คือ

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad ; \quad P(A) \neq 0$$

หรือความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ A จะเกิดขึ้นโดยมีเงื่อนไขว่า เหตุการณ์ B ได้เกิดขึ้นแล้ว คือ

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad ; \quad P(B) \neq 0$$

ตัวอย่าง 1.11 ครอบครัวหนึ่งมีบุตร 2 คน ถ้าโอกาสที่บุตรแต่ละคนเป็นชายเท่ากับโอกาสที่บุตรแต่ละคนเป็นหญิง จงหาความน่าจะเป็นที่บุตรทั้งสองจะเป็นชาย ถ้าทราบว่าครอบครัวนั้นมีบุตรชายอย่างน้อย 1 คน

วิธีทำ ให้ A แทนเหตุการณ์ที่เป็นชายอย่างน้อย 1 คน

B แทนเหตุการณ์ที่เป็นชายทั้งสองคน

S = { (ช, ช), (ช, ญ), (ญ, ช), (ญ, ญ) }

A = { (ช, ช), (ช, ญ), (ญ, ช) }

B = { (ช, ช) }

$A \cap B$ = { (ช, ช) }

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{4} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{4} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

ตัวอย่าง 1.12 จากการสำรวจสุภาพประชากรกลุ่มหนึ่งพบว่า มีผู้ป่วยด้วยโรคหัวใจ 9% ป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูง 12% ป่วยด้วยโรคหัวใจและความดันโลหิตสูง 7% จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยจะเป็นโรคหัวใจ ถ้าทราบว่าเขาป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูง

วิธีทำ ให้ A แทน ป่วยด้วยโรคหัวใจ

B แทน ป่วยด้วยโรคความดันโลหิตสูง

$A \cap B$ แทน ป่วยด้วยโรคหัวใจและความดันโลหิตสูง

$$\therefore \quad P(A) = \frac{9}{100} = 0.09, \; P(B) = \frac{12}{100} = 0.12, \; P(A \cap B) = \frac{7}{100} = 0.07$$

ดังนั้น

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{0.07}{0.12}$$
$$= \frac{7}{12}$$

1.7 เหตุการณ์อิสระต่อกัน

สำหรับเหตุการณ์คู่ใดๆ การเกิดขึ้นของเหตุการณ์หนึ่งอาจยังผลทำให้ความน่าจะเป็นของอีกเหตุการณ์หนึ่งเปลี่ยนไปหรือไม่ก็ได้ โดยถ้าการเกิดขึ้นของเหตุการณ์หนึ่งไม่ทำให้ความน่าจะเป็นของอีกเหตุการณ์หนึ่งเปลี่ยนไป จะกล่าวว่าเหตุการณ์ทั้งสองนี้เป็น **“เหตุการณ์ที่เป็นอิสระต่อกัน”**

นิยาม 1.4 เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เรียกว่า เป็นอิสระต่อกัน ก็ต่อเมื่อ

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A) \ ,$$
$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)P(B)}{P(A)} = P(B)$$

กล่าวคือ $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

<u>ตัวอย่าง 1.13</u> ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก และเหรียญ 1 อัน เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 6 กับเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 6

B แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว

S = { (1, H), (2, H), ... , (6, H), (1, T), (2, T), ... , (6, T) }

A = { (6, H), (6, T) }

B = { (1, H), (2, H), ... , (6, H) }

$A \cap B$ = { (6, H) }

$$\therefore \quad P(A) = \frac{1}{6} \quad , \quad P(B) = \frac{1}{2} \quad , \quad P(A \cap B) = \frac{1}{12}$$

นั่นคือ

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{12}$$

ดังนั้น เหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B เป็นอิสระต่อกัน

ทฤษฎีที่ 1.5 ถ้าเหตุการณ์ A และ B เป็นอิสระต่อกันแล้ว ได้ว่าเหตุการณ์แต่ละคู่ต่อไปนี้เป็นอิสระต่อกัน

1. A' และ B
2. A และ B'
3. A' และ B'

<u>ตัวอย่าง 1.14</u> ความน่าจะเป็นที่สามีและภรรยาคู่หนึ่งจะมีอายุถึง 80 ปี เท่ากับ 0.8 และ 0.9 ตามลำดับ จงหาความน่าจะเป็นที่

ก. ทั้งคู่มีอายุถึง 80 ปี

ข. ไม่มีใครเลยอายุถึง 80 ปี

ค. อย่างน้อย 1 คน มีอายุถึง 80 ปี

<u>วิธีทำ</u> ให้ A เป็นเหตุการณ์ที่สามีมีอายุถึง 80 ปี

B เป็นเหตุการณ์ที่ภรรยามีอายุถึง 80 ปี

A' เป็นเหตุการณ์ที่สามีมีอายุไม่ถึง 80 ปี

B' เป็นเหตุการณ์ที่ภรรยามีอายุไม่ถึง 80 ปี

$$\therefore \quad P(A) = 0.8, \; P(B) = 0.9$$

ก. ทั้งคู่มีอายุถึง 80 ปี คือ $P(A \cap B)$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = (0.8)(0.9) = 0.72$$

ข. ไม่มีใครเลยอายุถึง 80 ปี คือ $P(A' \cap B')$

$$P(A' \cap B') = P(A')P(B') = (1-P(A))(1-P(B)) = (0.2)(0.1) = 0.02$$

ค. อย่างน้อย 1 คน มีอายุถึง 80 ปี คือ $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A)+P(B)-P(A \cap B) = 0.8+0.9-0.72 = 0.98$$

1.8 บทสรุป

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ คือ การคาดคะเน การทำนาย โอกาส หรือความเป็นไปได้ที่จะเกิดแต่ละเหตุการณ์ แต่ไม่สามารถบอกได้แน่ชัดว่าเหตุการณ์เหล่านั้นจะเกิดขึ้นหรือไม่ จนกว่าจะถึงเวลาที่กำหนด โดยที่ค่าของความน่าจะเป็นมีค่าตั้งแต่ 0 (โอกาส 0% หรือ ไม่เกิดขึ้นเลย) ไปจนถึง 1 (โอกาส 100% หรือ เกิดขึ้นแน่นอน) ซึ่งในการจะคำนวณหาความน่าจะเป็นเราต้องทราบเกี่ยวกับนิยามของการทดลองสุ่ม แซมเปิลสเปซ และเหตุการณ์ พร้อมทั้งทราบเทคนิคของ การจัดลำดับ การจัดหมู่ และกฎที่เกี่ยวข้องกับความน่าจะเป็น เพื่อให้ค่าที่คำนวณได้มีความถูกต้องและแม่นยำ

ดังนั้น การหาค่าความน่าจะเป็น หาโดย ให้ $P(E)$ เป็นค่าความน่าจะเป็นที่จะเกิดโอกาส E กำหนดให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ ที่ซึ่ง มีเหตุการณ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ คือ $n(S)$ และ E เป็นเหตุการณ์ที่เราสนใจ คือ $n(E)$

แบบฝึกหัดประจำบทที่ 1

1. จงเขียนแซมเปิลสเปซในการทอดลูกเต๋า 1 ลูกพร้อมกับการโยนเหรียญ 1 เหรียญ

2. จงหาจำนวนสมาชิกแซมเปิลสเปซของการทดลองต่อไปนี้

    2.1 โยนเหรียญ 1 เหรียญ 10 ครั้ง

    2.2 โยนลูกเต๋า 1 ลูก 5 ครั้ง

    2.3 โยนเหรียญ 1 เหรียญ k ครั้ง

    2.4 มีลูกบอลอยู่ 10 ลูก สีต่าง ๆ กัน หยิบลูกบอลมา 5 ลูกโดยการสุ่ม

    2.5 หยิบไพ่ 2 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ

3. สมมติว่า A และ B เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกัน โดยที่ $P(A)=0.5$ และ $P(B)=0.2$ แล้วจงหาความน่าจะเป็นของ A หรือ B

4. ในห้องเรียนหนึ่ง มีชาย 5 คน และหญิง 7 คน เลือกคน 3 คน จากห้องนี้โดยการสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ชายทั้งสามคน

5. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ซึ่ง $P(A) = \frac{3}{8},\ P(B) = \frac{1}{2},\ P(A\cap B) = \frac{1}{4}$ แล้วจงหา

    5.1 $P(A\cup B)$

    5.2 $P(A')$

    5.3 $P(A'\cap B')$

    5.4 $P(A\cap B')$

6. ประชากรในประเทศหนึ่งมีกลุ่มเลือดแบ่งได้ดังนี้ มีกลุ่มเลือด A 18%, มีกลุ่มเลือด B 22%, มีกลุ่มเลือด AB 5% และมีกลุ่มเลือด O 55% ถ้าคนไข้คนหนึ่งกำลังได้รับการตรวจเลือด จงหาความน่าจะเป็นที่

    6.1 เขามีเลือดกลุ่ม B

    6.2 เขามีเลือดกลุ่มที่ไม่ใช่กลุ่ม AB

    6.3 เขามีเลือดกลุ่ม AB หรือ O