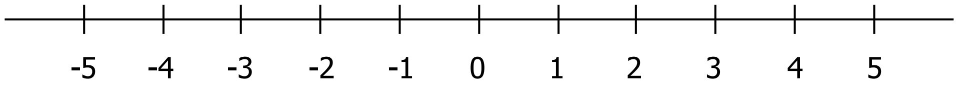
บทที่ 3
เส้นจำนวนและการแก้อสมการ

ถ้าลากเส้นตรงเส้นหนึ่งแล้วเลือกจุดๆ หนึ่ง เรียกว่าจุด 0 ให้จุดนี้แทนจำนวนศูนย์ เลือกหน่วยความยาวให้จุดทางขวาของ 0 ซึ่งอยู่ห่างจาก 0 เท่ากับ $1, 2, 3, \ldots$ หน่วย แทนจำนวน $1, 2, 3, \ldots$ ตามลำดับ ให้จุดทางซ้ายซึ่งอยู่ห่างจาก 0 เท่ากับ $1, 2, 3, \ldots$ หน่วย แทนจำนวน $-1, -2, -3, \ldots$ ตามลำดับ



จำนวนจริงทุกจำนวนจะมีจุดบนเส้นตรงนี้จับคู่ด้วยเพียงจุดเดียว และในทางตรงข้ามทุกจุดบนเส้นตรงนี้จะจับคู่กับจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว เรียกเส้นตรงนี้ว่า “เส้นจำนวน”

เราสามารถใช้เส้นจำนวนเหล่านี้ไปช่วยในการแก้อสมการได้

3.1 เส้นจำนวนและการแก้อสมการเบื้องต้น

บทนิยาม 3.1.1 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < b$ เขียนสัญลักษณ์ต่อไปนี้แทนสับเซตของ R

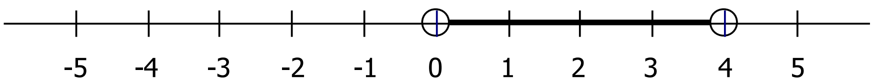
$$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$$
$$[a, b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$$
$$[a, b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$$
$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$$
$$(a, \infty) = \{x \in R \mid a < x\}$$
$$[a, \infty) = \{x \in R \mid a \le x\}$$
$$(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$$
$$(-\infty, a] = \{x \in R \mid x \le a\}$$

หมายเหตุ 1. เรียกช่วง (a, b) ว่าช่วงเปิด
ช่วง $[a, b]$ ว่าช่วงปิด
ช่วง $[a, b)$ ว่าช่วงปิด – เปิด
ช่วง $(a, b]$ ว่าช่วงเปิด – ปิด

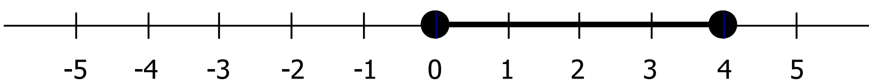
2. บางครั้งเรียกช่วง $[a, b)$ และ $(a, b]$ ว่าช่วงกึ่งเปิด
3. เรียกช่วง (a, ∞), $[a, \infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, a]$ ว่าช่วงอนันต์
4. บางครั้งเขียน R ในรูป $(-\infty, \infty)$

เมื่อกำหนดค่าของ a และ b อาจแสดงช่วงต่างๆ บนเส้นจำนวนและเรียกว่ากราฟของช่วงนั้นๆ เช่น

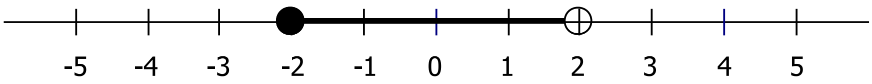
กราฟของช่วง $(1, 4)$ คือ



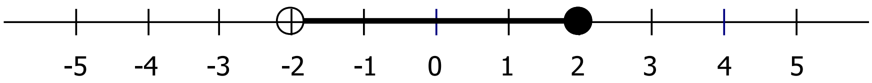
กราฟของช่วง $[1, 4]$ คือ



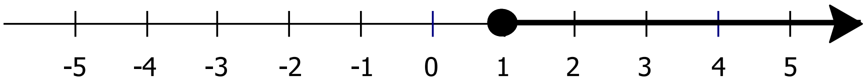
กราฟของช่วง $[-2, 2)$ คือ



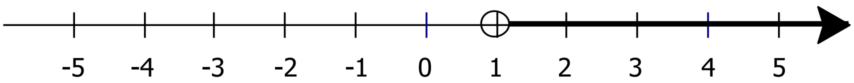
กราฟของช่วง $(-2, 2]$ คือ



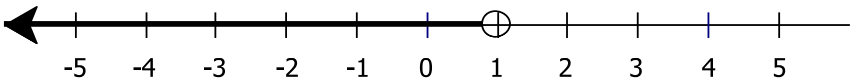
กราฟของช่วง $[1, \infty)$ คือ



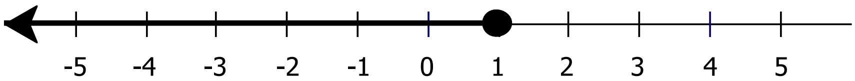
กราฟของช่วง $(1, \infty)$ คือ



กราฟของช่วง $(-\infty, 1)$ คือ



กราฟของช่วง $(-\infty, 1]$ คือ



ความรู้เกี่ยวกับคุณสมบัติของ $<$, $\leq$ และ $=$ สามารถนำมาใช้กับการแก้อสมการ

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $2x + 5 < -3x + 1$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $x^2 - 3x - 4 < 0$

....

....

....

....

....

....

พิจารณาอสมการ

$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n) > 0$

$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n) < 0$

$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n) \geq 0$

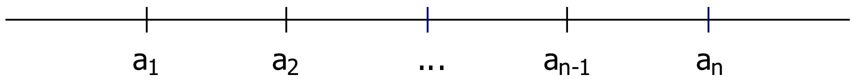
$(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n) \leq 0$

โดยที่ $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$

ขั้นแรกหารากของสมการ $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n) = 0$

จะได้ว่ารากของสมการคือ $a_1, a_2, \ldots, a_n$

เขียนรากทั้งหมดลงบนเส้นจำนวน



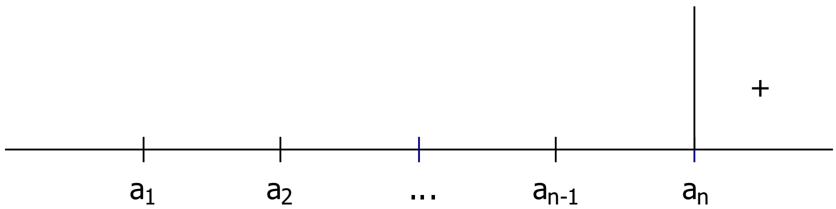
$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ ก่อให้เกิด $n+1$ ช่วงดังนี้

$(-\infty, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{n-1}, a_n), (a_n, \infty)$

เนื่องจาก ถ้า $x \in (a_n, \infty)$ จะได้ว่า

$x > a_n, x > a_{n-1}, \ldots, x > a_2, x > a_1$

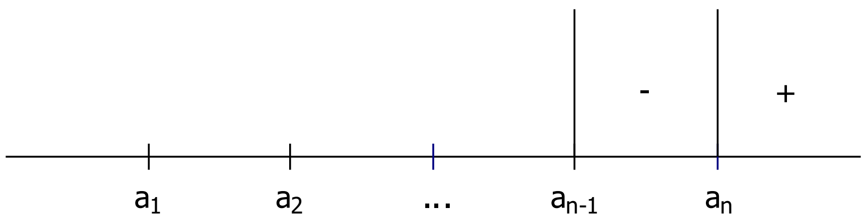
ดังนั้น $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n) > 0$



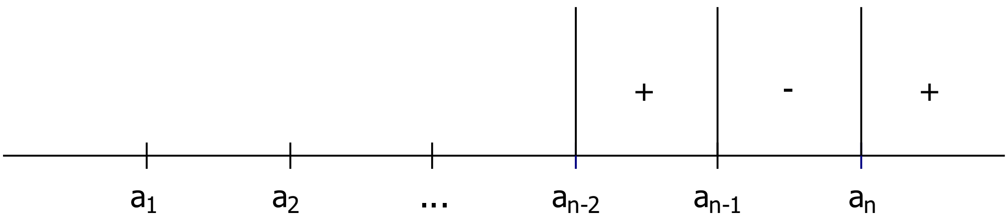
เนื่องจาก ถ้า $x \in (a_{n-1}, a_n)$ จะได้ว่า

$x < a_n, x > a_{n-1}, \ldots, x > a_2, x > a_1$

ดังนั้น $(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_{n-1})(x - a_n) < 0$



เนื่องจาก ถ้า $x \in (a_{n-2}, a_{n-1})$ จะได้ว่า
$x < a_n, x < a_{n-1}, x > a_{n-2}, \ldots, x > a_2, x > a_1$
ดังนั้น $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{n-2})(x - a_{n-1})(x - a_n) > 0$



ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$(x - 1)(x - 4) > 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.1.4 จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$x(x - 2)(x - 1)(x + 3) \geq 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.1.5 จงหาเซตคำตอบของสมการ $(2x+1)(3x-2) > 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

ข้อสังเกต ต้องเขียนข้างซ้ายมือของอสมการในรูป $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{n-1})(x-a_n)$
โดยที่ $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n$ ก่อนเสมอ

ตัวอย่าง 3.1.6 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(-3x+1)(x-2) < 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.1.7 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(x-1)(x-2)^4(x-3) < 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.1.8 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(x-1)(x-2)^5(x-3) < 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.1.9 จงหาคำตอบของอสมการ $\frac{(x+1)(x-4)}{(x-2)^3} < 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.1.10 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(x-1)(x-4)}{(x-3)^5(x-5)^4} > 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด 3.1

1. กำหนด $A_n = [\frac{1}{3}, 2n)$ เมื่อ $n \in Z$ จงหา $(A_1 \cup A_4) - (A_2 \cap A_3)$
2. จงหาเซตคำตอบของอสมการ
   (1) $(x-3)(x-4) > 0$
   (2) $(x-1)(x-5) > 0$
   (3) $(x+1)(x-7) < 0$
   (4) $(3x+2)(3x-1) > 0$
   (5) $(2x-3)(x-5) \geq 0$
   (6) $(-2x+1)(x-4) < 0$
   (7) $(-3x+1)(-2x+1)(x-8) \leq 0$
   (8) $(-4x+1)(-x+1)(-2x-8) > 0$
   (9) $(x-2)(x-3)^2(x-7) < 0$
   (10) $(x+2)(x-3)^6(x-5) < 0$
   (11) $(-x+3)(x-5)^4(x-8) > 0$
   (12) $(x+1)(x-4)^3(x-5)(x-7) > 0$
   (13) $\frac{(x-2)(x-5)}{(x-3)^2} < 0$
   (14) $\frac{(x-3)(x-4)}{(x-1)^8} \geq 0$
   (15) $\frac{(x-3)(x-8)}{(x-4)^5} \leq 0$
   (16) $\frac{(x+2)(x-8)}{x(x-3)^{10}} \leq 0$
   (17) $\frac{(x-5)^6}{(x-8)^4} > 0$
   (18) $\frac{(x-5)^6}{(x-8)^4} \geq 0$
   (19) $\frac{(x-5)^6}{(x-8)^4} < 0$
   (20) $\frac{(x-5)^6}{(x-8)^4} \leq 0$
   (21) $t + \frac{1}{t} \leq -2$
   (22) $x^3 + 1 \geq x^2 + x$

3.2 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)

บทนิยาม 3.2.1 สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัว ค่าสัมบูรณ์ของ x ซึ่งเขียนแทนด้วย $|x|$ มีความหมายดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 3.2.1

$$|4| = 4$$
$$|0| = 0$$
$$|-3| = -(-3) = 3$$

ตัวอย่าง 3.2.2 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x| = 5$

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.2.1 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว

$|x| = |y|$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ หรือ $x = -y$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x-5| = 12$

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x-6| = 0$

วิธีทำ $|x-6| = 0$

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.5 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x| = -1$

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.6 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|2x-10| = -4$

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.2.2 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว

(1) $|x| = |-x|$

(2) $|x^2| = |x|^2 = x^2$

(3) $x^2 = y^2$ ก็ต่อเมื่อ $|x| = |y|$

ข้อสังเกต

โดยทฤษฎีบท 3.2.2 ตอน (3) $x^2 = y^2$ ก็ต่อเมื่อ $|x| = |y|$

โดยทฤษฎีบท 3.2.1 $|x| = |y|$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ หรือ $x = -y$

ดังนั้น $x^2 = y^2$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$ หรือ $x = -y$

ตัวอย่าง 3.2.7 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x+5| = |-6|$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.8 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x+2| = x$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ข้อสังเกต “ ถ้า $|x+2| = x$ แล้ว $|x+2|^2 = x^2$ ” ไม่อาจสรุปได้ว่า
“ ถ้า $|x+2|^2 = x^2$ แล้ว $|x+2| = x$ ”

ตัวอย่าง 3.2.9 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x+2| = |x|$

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.2.3 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว

(1) $|xy| = |x||y|$

(2) ถ้า $y \neq 0$ แล้ว $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

ตัวอย่าง 3.2.10 จงหาเซตคำตอบของ $x^2 - 3|x| - 10 = 0$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.11 จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x^2 - x - 6| = x + 2$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.2.4 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงและ a เป็นจำนวนจริงบวก

$|x| < a$ ก็ต่อเมื่อ $-a < x < a$

บทแทรก 3.2.5 กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงและ a เป็นจำนวนจริงบวก

(1) $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

(2) $|x| > a$ ก็ต่อเมื่อ $x > a$ หรือ $x < -a$

(3) $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq a$ หรือ $x \leq -a$

ตัวอย่าง 3.2.12 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x| > 2$

ตัวอย่าง 3.2.13 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x - 3| < 5$

ตัวอย่าง 3.2.14 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x - 3| > 5$

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.2.6 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.15 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|4x - 9| \leq |6x + 7|$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.16 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|4x - 1| < 8x$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.17 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $-3x - 7 \leq |x + 5|$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ข้อสังเกต สำหรับโจทย์ข้อนี้จะแก้อสมการโดยวิธียกกำลังสองทั้งสองข้างไม่ได้ เพราะในกรณีข้างซ้ายเป็นจำนวนจริงลบอาจมีปัญหา เช่น

$$-4 \leq |-3| \quad \text{แต่} \quad (-4)^2 \geq |-3|^2$$

ตัวอย่าง 3.2.18 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left|\frac{3x-2}{x-7}\right| < 4$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.2.7 สำหรับจำนวนจริง x และ y ทุกตัว จะได้ว่า

(1) $|x+y| \le |x|+|y|$

(2) $|x|-|y| \le |x-y|$

(3) $|y|-|x| \le |x-y|$

(4) $\big||x|-|y|\big| \le |x-y|$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.19 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x| > 0$

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.20 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x-2| > 0$

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.21 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $0 < |x-3| < 2$

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.22 ถ้าให้ x อยู่ในช่วง $[-2, 2]$ จงหาจำนวนจริง M ซึ่ง $|x^3-5| \leq M$

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.23 ถ้าให้ x อยู่ในช่วง $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ จงหาจำนวนจริง M ซึ่ง $\left|\frac{x+2}{x-2}\right| \leq M$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.24 ถ้าให้ x อยู่ในช่วง (2, 5) จงหาจำนวนจริง M ซึ่ง $\left|\frac{x+3}{x} - 6\right| < M$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.2.25 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x-1| - |x| + |2x+3| > 2x+4$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาเซตคำตอบของสมการ

(1) $|x-2| = 5$

(2) $|4x+5| = |-9|$

(3) $-|6x-1| = |-x|$

(4) $|2x-1| = |x-3|$

(5) $|-(x+11)| = |-43|$

(6) $\left|\frac{x+2}{2x-2}\right| = 1$

(7) $\left|\frac{3x-4}{4x+7}\right| = \left|\frac{x-1}{x+1}\right|$

(8) $-\left|\frac{7x-14}{4x+8}\right| = -5x$

(9) $|3x-2|+1 = -(3x+8)$

(10) $|7x+5|-9 = |5x-3|$

(11) $|x-3| = |x-1|+2$

(12) $\left|\frac{x+2}{2x-2}\right|-3 = |2x+23|$

(13) $\left|\frac{9x+2}{2x-1}\right|+8 = \left|\frac{x-6}{2+x}\right|-\left|\frac{x}{x+2}\right|$

(14) $\left|\frac{x}{7-2x}\right|-4 = |x+1|+6$

(15) $\left|\frac{9-x}{2x}\right|+\frac{5}{3x} = \left|\frac{x+1}{3-x}\right|-\left|-(\frac{4}{x+4})\right|$

(16) $\frac{-12}{7x} = |2x-1|^2$

2. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

(1) $|5x-3| < 7$

(2) $|5x-3| > 7$

(3) $|5x+4| < |5x-4|$

(4) $|x-1| < x+1$

(5) $|12x-11| \leq |21x+1|$

(6) $|5x-15| < 5x$

(7) $|x-1|+6 < |3x+4|$

(8) $|13x| \leq |x-6|$

(9) $|7x+4| \geq |-7|$

(10) $|22x+3| < 6$

(11) $-2 < \frac{2}{x+4} < 2$

(12) $\frac{|x-2|}{|2x+1|-3} > 6$

(13) $\frac{3|2-x|}{5x-2} < -3x$

(14) $2+\frac{x+3}{|x-4|} > 0$

(15) $\frac{|8-3x|}{3x-8} - 12 \geq 2x + 9$

(16) $|(x+3)^2| \geq |-x|$

(17) $|3-2x| < 6x\,|-x|$

(18) $-x < \frac{2-x}{x+4} < x$

(19) $\frac{|x-3|^2}{-|x+1|} > 6$

(20) $-3x^2 < \frac{3|2-x|}{5x-2} - 3x$

(21) $(2 + \frac{x+3}{|x-4|})^2 > 2 + \frac{x+3}{|x-4|}$

(22) $\frac{|0-x|}{|x-1|} - |\,x\,| \geq 2|\,x\,| + 1$

3. ในแต่ละข้อจงหาจำนวนจริง M ซึ่ง

(1) $|x^3 - x^2 - 4| < M$ เมื่อ $|x-2| < 1$

(2) $|2x^2 - 3x - 2| < M$ เมื่อ $|x-2| < 1$

(3) $\frac{2x-5}{x-6} + \frac{3}{2} < M$ เมื่อ $|x-4| < 1$

4. วิธีทำต่อไปนี้ผิดตรงไหน

กำหนดให้	$a + b$	$=$	$2a$
จะได้ว่า	$a - 2c$	$=$	$-b$
และ	a	$=$	$-b + 2c$
ดังนั้น	$a(a - 2c)$	$=$	$(-b + 2c)(-b)$
หรือ	$a^2 - 2ac$	$=$	$b^2 - 2bc$
	$a^2 - 2ac + c^2$	$=$	$b^2 - 2bc + c^2$
ดังนั้น	$(a-b)^2$	$=$	$(b-c)^2$
เพราะฉะนั้น	$a - b$	$=$	$b - c$
ดังนั้น	a	$=$	b

3.3 สัจพจน์ความบริบูรณ์

บทนิยาม 3.3.1 ถ้า S เป็นสับเซตของ R S จะมีขอบเขตบน (bounded above) ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง a ซึ่ง $x \le a$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัวใน S เรียกจำนวนจริง a นี้ว่า ขอบเขตบน (upper bound) ของ S

บทนิยาม 3.3.2 ถ้า S เป็นสับเซตของ R a จะเป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด (least upper bound หรือ supremum) ของ S ก็ต่อเมื่อ

(1) a เป็นขอบเขตบนของ S

และ (2) ถ้า b เป็นขอบเขตบนของ S จะได้ว่า $a \le b$

ตัวอย่าง 3.3.1 ให้ S เท่ากับช่วงปิด $[5,\ 7]$

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3.2 ให้ S เท่ากับช่วงเปิด $(1,\ 6)$

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3.3 ให้ $S = \{8,\ 6,\ 0, -4,\ 2, -9\}$

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3.4 ให้ S เท่ากับช่วง $[-1,\ \infty)$

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.3.1 กำหนดให้ S เป็นสับเซตของ R ถ้า S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด จะมีได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ ถ้า a และ b ต่างก็เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S

จะได้ว่า $a \leq b$ เพราะ b เป็นขอบเขตบน และ a เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด

และ $b \leq a$ เพราะ a เป็นขอบเขตบน และ b เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด

เพราะฉะนั้น $a = b$

โดยทฤษฎีบท 3.3.1 เราสามารถให้สัญลักษณ์ของขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S เขียนแทนด้วย $\sup. S$ (หรือ $\text{lub}. S$) เช่น ถ้า $S = (1, 4)$ $\sup. S = 5$

ถ้า S ไม่มีขอบเขตบน S จะไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด ถ้า S มีขอบเขตบนผู้อ่านอาจจะคิดว่า S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด แต่ข้อความหลังนี้ไม่จริง เพราะถ้า $S = \emptyset$ จำนวนจริงทุกตัวเป็นขอบเขตบนของ S แต่ S ไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด เราจึงให้สัจพจน์ข้อสุดท้ายสำหรับระบบจำนวนจริงดังนี้

สัจพจน์ความบริบูรณ์

สัจพจน์ 15 ถ้า S เป็นสับเซตของ R, $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตบน แล้ว S จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

บทนิยาม 3.3.3 ถ้า S เป็นสับเซตของ R S จะมีขอบเขตล่าง (bounded below) ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง a ซึ่ง $a \leq x$ สำหรับจำนวนจริง x ทุกตัวใน S เรียกจำนวนจริง a นี้ว่าขอบเขตล่าง (lower bound) ของ S

บทนิยาม 3.3.4 ถ้า S เป็นสับเซตของ R จำนวนจริง a จะเป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด (greatest lower bound หรือ infimum) ของ S ก็ต่อเมื่อ

(1) a เป็นขอบเขตล่างของ S

และ (2) ถ้า b เป็นขอบเขตล่างของ S จะได้ว่า $b \leq a$

ตัวอย่าง 3.3.5 ให้ S เท่ากับช่วงปิด $[4, 7]$

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3.6 ให้ S เท่ากับช่วงเปิด $(1, 8)$

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3.7 ให้ $S = \{-2,\ 4,\ 5, -9,\ 6,\ 8\}$

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3.8 ให้ S เป็นช่วง $(-\infty\ ,\ 3)$

....

....

....

....

บทนิยาม 3.3.5 ให้ S เป็นสับเซตของ R ถ้า S มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง กล่าวว่า S มีขอบเขต

ตัวอย่าง 3.3.9 ให้ S เท่ากับช่วงเปิด $(-5,\ 17)$

....

....

....

ตัวอย่าง 3.3.10 ให้ S เท่ากับช่วงเปิด $(-\infty,\ 8)$

....

....

....

ทฤษฎีบท 3.3.2 กำหนดให้ S เป็นสับเซตของ R ถ้า S มีขอบเขตล่างค่ามากสุดจะมีได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ ถ้า a และ b ต่างก็เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S

จะได้ว่า $a \leq b$ เพราะ b เป็นขอบเขตล่าง และ a เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด

และ $b \leq a$ เพราะ a เป็นขอบเขตล่าง และ b เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด

เพราะฉะนั้น $a = b$

โดยทฤษฎีบท 3.3.2 เราสามารถให้สัญลักษณ์ของขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S เขียนแทนด้วย $\inf.\ S$ (หรือ $\text{glb.}\ S$) เช่น ถ้า S เท่ากับ $(4,\ 15)$ $\inf.\ S = 4$

ทฤษฎีบท 3.3.3 ถ้า S เป็นสับเซตของ R, $S \neq \emptyset$ และ S มีขอบเขตล่าง แล้ว S จะมีขอบเขตล่างค่ามากสุด

พิสูจน์ ให้ $S^* = \{-x \mid x \in S\}$ และ a เป็นขอบเขตล่างของ S

จะได้ว่า $a \leq x$ สำหรับ x ทุกตัวใน S

ดังนั้น $-x \leq -a$ สำหรับ x ทุกตัวใน S

เพราะฉะนั้น $-x \leq -a$ สำหรับ $-x$ ทุกตัวใน S^*

ดังนั้น $-a$ เป็นขอบเขตบนของ S^*

โดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ S^* จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด เขียนแทนด้วย $-b$

จะพิสูจน์ได้ว่า b เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S

1. เนื่องจาก $-b$ เป็นขอบเขตบนของ S^* ดังนั้น $-x \leq -b$ สำหรับ $-x$ ทุกตัวใน S^*

เพราะฉะนั้น $b \leq x$ สำหรับ $-x$ ทุกตัวใน S^*

นั่นคือ $b \leq x$ สำหรับ x ทุกตัวใน S^*

ดังนั้น b เป็นขอบเขตล่างของ S

2. ถ้า c เป็นขอบเขตล่างของ S

จะได้ว่า $c \leq x$ สำหรับสมาชิก x ทุกตัวใน S

ดังนั้น $-x \leq -c$ สำหรับสมาชิก x ทุกตัวใน S

นั่นคือ $-x \leq -c$ สำหรับสมาชิก $-x$ ทุกตัวใน S^*

เพราะฉะนั้น $-c$ เป็นขอบเขตบนของ S^*

เนื่องจาก $-b$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S^* ดังนั้น $-b \leq -c$

เพราะฉะนั้น $c \leq b$

ดังนั้น b เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S

ทฤษฎีบท 3.3.4 Z^+ ไม่มีขอบเขตบน

พิสูจน์ สมสุติว่า Z^+ มีขอบเขตบน

เนื่องจาก Z^+ ไม่ใช่เซตว่างโดยสัจพจน์ความบริบูรณ์ Z^+ มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดให้เป็น b

เนื่องจาก $b - 1 < b$ ดังนั้น $b - 1$ ไม่ใช่ขอบเขตบนของ Z^+

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก n อย่างน้อย 1 ตัว ซึ่ง $b - 1 < n$

สำหรับจำนวนเต็มบวก n นี้ เราจะได้ว่า $b < n + 1$

เนื่องจาก $n + 1$ อยู่ใน Z^+ จึงขัดกับที่ว่า b เป็นขอบเขตบนของ Z^+

เพราะฉะนั้น Z^+ ไม่มีขอบเขตบน

ทฤษฎีบท 3.3.5 สำหรับจำนวนจริง a แต่ละตัว จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $n > a$

พิสูจน์ สมมุติว่าทฤษฎีบท 3.3.5 นี้ไม่เป็นจริง

จะได้ว่ามีจำนวนจริง a ตัวหนึ่งซึ่งสำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว $n \leq a$

ดังนั้น Z^+ มีขอบเขตบน ขัดกับทฤษฎีบท 3.3.4

ทฤษฎีบท 3.3.6 สำหรับจำนวนจริงบวก ε แต่ละตัว จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\frac{1}{\mathrm{n}} < \varepsilon$

พิสูจน์ ในทฤษฎีบท 3.3.5 ถ้าให้ $\mathrm{a} = \frac{1}{\varepsilon}$ จะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\mathrm{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ คูณทั้งสองข้างของอสมการด้วยจำนวนจริงบวก $\frac{\varepsilon}{\mathrm{n}}$

จะได้ว่า $\varepsilon > \frac{1}{\mathrm{n}}$

ทฤษฎีบท 3.3.7 ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก และ b เป็นจำนวนจริง จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\mathrm{na} > \mathrm{b}$

พิสูจน์ ในทฤษฎีบท 3.3.5 เรามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $\mathrm{n} > \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ คูณทั้งสองข้างของอสมการด้วยจำนวนจริงบวก a

จะได้ว่า $\mathrm{na} > \mathrm{b}$

สมบัติที่กล่าวมาในทฤษฎีบท 3.3.7 นี้ นิยมเรียกกันว่า สมบัติของอาร์คีมีดิส (Archimedean property) ในเชิงเรขาคณิตสมบัตินี้ทำให้เราทราบว่า ไม้บรรทัดไม่ว่าจะมีขนาดสั้นเพียงใด สามารถใช้วัดระยะทางซึ่งยาวมากเท่าใดก็ได้ โดยถือว่าความยาวของไม้บรรทัดเป็น a ระยะทางที่ต้องการวัดเป็น b n จะเป็นจำนวนครั้งที่ใช้ไม้บรรทัดวัด

ทฤษฎีบท 3.3.8 ถ้าจำนวนจริง 3 จำนวน a, x และ y สอดคล้องกับอสมการ $\mathrm{a} \le \mathrm{x} \le \mathrm{a} + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{n}}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n ทุกตัว

จะได้ว่า $\mathrm{x} = \mathrm{a}$

พิสูจน์ ถ้า $\mathrm{x} > \mathrm{a}$ จะได้ว่า $\mathrm{x} - \mathrm{a}$ เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้นโดยสมบัติของอาร์คีมีดิส จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง

$$\mathrm{n}(\mathrm{x} - \mathrm{a}) > \mathrm{y}$$

นั่นคือ $\mathrm{x} > \mathrm{a} + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{n}}$

ขัดกับอสมการที่กำหนดให้ $\mathrm{x} \le \mathrm{a} + \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{n}}$

เพราะฉะนั้น $\mathrm{x} = \mathrm{a}$

ทฤษฎีบท 3.3.9 ถ้า c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\mathrm{c} < \mathrm{d}$ จะมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $\mathrm{c} < \mathrm{r} < \mathrm{d}$

พิสูจน์ (1) กรณี $0 \le \mathrm{c}$

โดยทฤษฎีบท 3.3.6 จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง

$$\frac{1}{\mathrm{n}} < \mathrm{d} - \mathrm{c}$$

และโดยสมบัติของอาร์คีมีดีส จะมีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง

$$\mathrm{c} < \mathrm{m}\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\right)$$

โดยหลักการเป็นอันดับดีแล้ว เราสามารถให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกตัวแรกที่มีคุณสมบัตินี้

นั่นคือ $c < \frac{m}{n}$ และ $\frac{m-1}{n} \leq c$

ดังนั้น $c < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < c + d - c = d$

เพราะฉะนั้น ให้ $r = \frac{m}{n}$ จะได้ว่า $c < r < d$

(2) กรณี $d \leq 0$ จะได้ว่า $0 \leq -d$ และ $-d < -c$

ดังนั้นโดยกรณี (1) จะมีจำนวนตรรกยะ $-r$ โดยที่

$$-d < -r < -c$$

เพราะฉะนั้น $c < r < d$

(3) กรณี $c < 0 < d$

เราสามารถเลือก r ให้เท่ากับ 0

บทนิยาม 3.3.6 ให้ A เป็นสับเซตของ R A จะหนาแน่น (dense) ใน R ก็ต่อเมื่อสำหรับสมาชิก c และ d ใดๆ ใน R ซึ่ง $c < t < d$

จากบทนิยาม 3.3.6 นี้อาจเขียนทฤษฎีบท 3.3.9 ใหม่ได้ดังนี้ “เซตของจำนวนตรรกยะหนาแน่นใน R”

ทฤษฎีบทประกอบ 3.3.10 ให้ S เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < S < 1$ ถ้า t เป็นจำนวนจริงใดๆ จะได้ว่า

(1) $(t+S)^2 < t^2 + S(t+1)^2$

(2) $(t-S)^2 > t^2 - S(t+1)^2$

พิสูจน์ (1) เนื่องจาก $0 < S < 1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S &< t^2 + 1 \\ S^2 &< S(t^2+1) \\ 2St + S^2 &< 2St + St^2 + S \\ t^2 + 2St + S^2 &< t^2 + S(t^2 + 2t + 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(t+S)^2 < t^2 + S(t+1)^2$

(2) เนื่องจาก $0 < S < 1$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} S &> -t^2 - 1 \\ S^2 &> S(-t^2-1) \\ -2St + S^2 &> -2St - St^2 - S \\ t^2 - 2St + S^2 &> t^2 - S(t^2 + 2t + 1) \end{aligned}$$

ดังนั้น $(t-S)^2 > t^2 - S(t+1)^2$

ทฤษฎีบท 3.3.11 มีจำนวนจริงบวกซึ่งเมื่อยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 2

พิสูจน์ สมมุติว่าไม่มีจำนวนจริงบวกซึ่งเมื่อยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 2

ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริงบวก a ซึ่ง $a^2 < 2$

B เป็นเซตของจำนวนจริงบวก b ซึ่ง $b^2 > 2$

เซตของจำนวนจริงบวก R^+ ถูกแบ่งออกเป็น 2 เซต A และ B โดยมีสมบัติดังต่อไปนี้

1. A ไม่ใช่เซตว่าง (เพราะ $1 \in A$)
2. B ไม่ใช่เซตว่าง (เพราะ $2 \in B$)
3. ถ้า $a \in A$ และ $b \in B$ แล้ว $a < b$ (เพราะถ้า $0 < b < a$ จะได้ว่า $0 < 2 < b^2 < a^2 < 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้)

ดังนั้น A ซึ่งไม่ใช่เซตว่างและมีขอบเขตบน จึงมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด ซึ่งให้เท่ากับ t

เราจะได้ข้อขัดแย้ง ถ้าแสดงว่าจำนวนจริง t นี้ไม่อยู่ในทั้งเซต A และเซต B

ก่อนอื่นจงสังเกตว่า $1 < t < 2$ เพราะ

(1) $\frac{4}{3} \in A$ ดังนั้น $1 < \frac{4}{3} < t$ เพราะ t เป็นขอบเขตบนของ A

(2) $\frac{3}{2} \in A$ ดังนั้น $t < \frac{3}{2} < 2$ เพราะสมาชิกทุกตัวของ B เป็นขอบเขตบนเซตของ A และ t เป็นขอบเขตบนค่าน้อยของสุดของ A

สมมุติ $t \in A$ จะได้ว่า $t^2 < 2$ จะได้ข้อขัดแย้งโดยหาสมาชิกของ A ซึ่งมีค่ามากกว่า t (ทำให้ t ไม่ใช่ขอบเขตบนของ A)

วิธีการคือ หาจำนวนจริงบวก S ซึ่ง $t + S$ เป็นสมาชิกของ A

เนื่องจาก $t^2 < 2$ ให้ $S = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{2-t^2}{(t+1)^2}, 1\right\}$

โดยที่ $\min\{x, y\} = \begin{cases} x & , x \le y \\ y & , x > y \end{cases}$

ดังนั้น จะได้ว่า $0 < S < 1$ และ $S < \frac{2-t^2}{(t+1)^2}$

เพราะฉะนั้น $0 < S < 1$ และ $t^2 + S(t+1)^2 < 2$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3.3.10 ตอน (1) $(t+S)^2 < t^2 + S(t+1)^2$

เพราะฉะนั้น $(t+S)^2 < 2$

ดังนั้น $t + S \in A$ เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น t ไม่อยู่ใน A

สมมุติ $t \in B$ จะได้ว่า $t^2 > 2$ จะได้ข้อขัดแย้งโดยหาสมาชิกของ B ซึ่งมีค่าน้อยกว่า t (ทำให้ t ไม่ใช่ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ A)

วิธีการคือ หาจำนวนจริงบวก S ซึ่ง $t - S$ เป็นสมาชิกของ B

เนื่องจาก $t^2 > 2$ ให้ $S = \frac{1}{2}\min\left\{\frac{t^2-2}{(t+1)^2}, 1\right\}$

จะได้ว่า $0 < S < 1$ และ $t^2 - S(t+1)^2 > 2$

โดยทฤษฎีประกอบ 3.3.10 ตอน (2) จะได้ว่า

$$(t-S)^2 > t^2 - S(t+1)^2$$

เพราะฉะนั้น $(t-S)^2 > 2$

ดังนั้น $t - S \in B$ เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น t ไม่อยู่ใน B

เกิดข้อขัดแย้ง จึงสรุปว่ามีจำนวนจริงบวกซึ่งเมื่อยกกำลังสองเท่ากับสอง 2

บทแทรก 3.3.12 จำนวนจริงบวกซึ่งเมื่อยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 2 มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ สมมุติว่ามีจำนวนจริงบวก $a < b$ แล้ว $a^2 = b^2 = 2$

เนื่องจาก ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$ เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น จำนวนจริงบวกซึ่งเมื่อยกกำลังแล้วได้ 2 มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

หมายเหตุ เขียน $\sqrt{2}$ แทนจำนวนจริงบวกซึ่งเมื่อยกกำลังสองแล้วได้ 2 ในกรณีทั่วไปเมื่อ $a \in R^+$ เขียน $\sqrt{a}$ แทนจำนวนจริงบวกซึ่งเมื่อยกกำลังสองแล้วได้ a

บทแทรก 3.3.13 $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์ เนื่องจากทฤษฎีบท 3.3.11 $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนจริงและเราได้พิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ ดังนั้น $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ทฤษฎีบท 3.3.14 ฟิลด์อันดับของจำนวนตรรกยะไม่บริบูรณ์

พิสูจน์ สมมุติว่า ฟิลด์อันดับของจำนวนตรรกยะบริบูรณ์

ให้ $A = \{x \in Q \mid x < \sqrt{2}\}$

จะได้ว่า $A \neq \emptyset$ (เพราะ $1 \in A$) และ 2 เป็นขอบเขตบนของ A ดังนั้นโดยสมมุติฐาน A จะมีขอบเขตบนค่าน้อยสุดซึ่งให้เท่ากับ c โดย $c \in Q$

เนื่องจาก $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ จะได้ว่า

(1) $c < \sqrt{2}$

หรือ (2) $\sqrt{2} < c$

พิจารณา (1) เนื่องจาก Q หนาแน่นใน R จะมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $c < r < \sqrt{2}$ ดังนั้น $c \in A$ และ $c < r$ เพราะฉะนั้น c ไม่ใช่ขอบเขตบนของ A ขัดแย้งที่ c เป็นขอบเขตค่าน้อยสุด

พิจารณา (2) เนื่องจาก Q หนาแน่นใน R จะมีจำนวนตรรกยะ S ซึ่ง $\sqrt{2} < S < c$ ดังนั้น S เป็นขอบเขตบนของ A และ $S < c$ ขัดแย้งกับที่ c เป็นขอบเขตบนค่าน้อยที่สุด

เพราะฉะนั้น ฟิลด์อันดับของจำนวนตรรกยะไม่บริบูรณ์

ทฤษฎีบท 3.3.15 กำหนดให้ a เป็นจำนวนตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ จะได้ว่า

(1) $a + b$, $a - b$ และ $b - a$ ต่างก็เป็นจำนวนอตรรกยะ

(2) ถ้า $a \neq 0$, ab, $\frac{a}{b}$ และ $\frac{b}{a}$ ต่างก็เป็นจำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์ ให้เป็นแบบฝึกหัด

ข้อสังเกต เซตของจำนวนอตรรกยะไม่มีสมบัติปิดสำหรับการบวกและการคูณ เพราะ $\sqrt{2}$ และ $-\sqrt{2}$ ต่างก็เป็นจำนวนอตรรกยะ แต่ผลบวกและผลคูณไม่ใช่จำนวนอตรรกยะ

ทฤษฎีบท 3.3.16 เซตของจำนวนอตรรกยะหนาแน่นใน R

พิสูจน์ ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ ซึ่ง $a < b$

จะได้ว่า $a\sqrt{2} < b\sqrt{2}$

เนื่องจาก Q หนาแน่นใน R จะมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่งไม่เท่ากับศูนย์

ซึ่ง $a\sqrt{2} < r < b\sqrt{2}$

(ถ้า $a\sqrt{2} < 0 < b\sqrt{2}$ เลือก r โดยที่ $0 < r < b\sqrt{2}$)

ดังนั้น $a < \frac{r}{\sqrt{2}} < b$

โดยทฤษฎีบท 3.3.15 $\frac{r}{\sqrt{2}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ดังนั้นเซตของจำนวนอตรรกยะหนาแน่นใน R

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงเขียน “ ✔ ” หน้าข้อความที่ถูกต้อง และ “ ✘ ” หน้าข้อความที่ไม่ถูกต้อง

(1) .... 51.3 เป็นขอบเขตบนของ $[-50, 12.7)$

(2) .... π เป็นขอบเขตบนของ $\{0, 3.14, \pi\}$

(3) .... e เป็นขอบเขตบนของ $(0, 2)$

(4) .... เซตของขอบเขตบนของ $[-23, -56]$ คือ $[-56, \infty)$

(5) .... $(-\infty, 99)$ มีขอบเขตบน

(6) .... $(-\infty, 99)$ มีขอบเขตล่าง

(7) .... ขอบเขตบนของ S ต้องเป็นสมาชิกของ S

(8) .... ขอบเขตบนของ S ต้องไม่เป็นสมาชิกของ S

(9) .... สับเซตของ R ทุกสับเซตจะต้องมีขอบเขตบน

(10) .... สับเซตของ R ทุกสับเซตจะต้องมีขอบเขตล่าง

(11) .... ขอบเขตบนของ S ต้องไม่เท่ากับขอบเขตล่างของ S

(12) .... ขอบเขตล่างของ S จะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

(13) .... สำหรับจำนวนตรรกยะ a แต่ละตัว จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $n > a$

(14) .... ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $na > b$

(15) .... เซตของจำนวนตรรกยะหนาแน่นใน R

(16) .... เซตของจำนวนเต็มหนาแน่นใน R

(17) .... $\sqrt{5}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

(18) .... $\sqrt{15} + \sqrt{10}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

(19) .... $\sqrt{b^2} = b$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริง

(20) .... ระบบจำนวนตรรกยะบริบูรณ์

(21) .... ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ และ b เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว ab เป็นจำนวนอตรรกยะ

(22) .... เซตของจำนวนอตรรกยะหนาแน่นใน R

2. จงหาขอบเขตบนค่าน้อยสุด และขอบเขตล่างค่ามากสุดของเซตต่อไปนี้

(1) $A = \{4, 7, -4, -2, 0, 2\}$

(2) $B = (1, 8] \cup (-15, -6)$

(3) Z^+

(4) Z

(5) Q^+

(6) R^+

(7) $C = \left\{ x \,\middle|\, x = \frac{1}{n}\ ,\ n \in Z^+ \right\}$

(8) $D = \{x \in R \mid x^2 < 9\}$

(9) $E = \{x \in R \mid x^2 > 9\}$

(10) $F = \{x \in R \mid x^2 + 4 > 0\}$

(11) $G = \{x \in R \mid x < 0$ และ $x^2 + 4x - 4 < 0\}$

(12) เซตของจำนวนตรรกยะ

3. ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกและ S เป็นซับเซตของ R

จงพิสูจน์ว่า

(1) ถ้า S มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด จะมี x บางตัวใน S ซึ่ง $x > \sup. S - \varepsilon$

(2) ถ้า S มีขอบเขตล่างค่ามากสุด จะมี x บางตัวใน S ซึ่ง $x < \inf. S + \varepsilon$