บทที่ 5

การแปลงเชิงเส้น (Linear Transformation)

การแปลงเชิงเส้น T ที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจากเวกเตอร์สเปซหนึ่งไปยังอีกเวกเตอร์สเปซหนึ่ง โดยที่ฟังก์ชันอยู่ในรูป $T(u)=v$ ซึ่งตัวแปรต้นคือ u และตัวแปรตามคือ v เป็นเวกเตอร์ทั้งคู่ เรียก v ว่าเป็น image ของ u ภายใต้ T

5.1 การแปลงเชิงเส้น

นิยาม 1 ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $T:V\to W$ จะกล่าวว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้น จาก V ไปยัง W เมื่อมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. $T(\vec{u}+\vec{v})=T(\vec{u})+T(\vec{v})$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{u},\vec{v}\in V$
2. $T(k\vec{u})=kT(\vec{u})$ สำหรับทุกเวกเตอร์ $\vec{u}\in V$ และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ

ถ้า $T:V\to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้นจาก V ไปยัง W เราจะเห็นว่า T เป็นฟังก์ชันที่มี V เป็นโดเมน(Domain) และ W เป็นเรนจ์(Range)

ถ้า $T:V\to V$ เป็นการแปลงเส้นจาก V ไปยัง V เราจะกล่าวว่า T เป็น การดำเนินการเชิงเส้น (Linear Operator) ใน V

ตัวอย่าง 1 ให้ $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ โดยที่ $T\left(\left\langle a,b\right\rangle\right)=\left\langle -a,b\right\rangle$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2 ให้ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ โดยที่ $T\left(\left\langle a,b\right\rangle\right)=\left\langle 0,b\right\rangle$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3 ให้ $T:V \to V$ กำหนดโดย $T(v)=kv$ เมื่อ k เป็นสเกลาร์คงที่ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 4 ให้ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ กำหนดโดย $T\left(\left\langle a,b\right\rangle\right)=\left\langle 3b,0\right\rangle$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5 ให้ $T:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ กำหนดโดย $T\left(\left\langle x,y\right\rangle\right)=\left\langle x-y,x+y,5x\right\rangle$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6 ให้ $T: P_2 \to P_3$ กำหนดโดย $T(p(x)) = xp(x)$ ทุก $p(x)$ ใน P_2 จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 7 ให้ $T: P \to P$ กำหนดโดย $T(x) = 3x + 4$ จงแสดงว่า T เป็นการแปลงเชิงเส้นหรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.2 สมบัติของการแปลงเชิงเส้น

ให้ V และ W เป็นปริภูมิเวกเตอร์ และ $T : V \to W$ เป็นการแปลงเชิงเส้น จะได้ว่า

1. $T(\vec{0}) = \vec{0}$
2. $T(-\vec{u}) = -T(\vec{u})$
3. $T(\vec{u} - \vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v})$
4. $T(k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + ... + k_n\vec{u}_n) = k_1T(\vec{u}_1) + k_2T(\vec{u}_2) + ... + k_nT(\vec{u}_n)$

ตัวอย่าง 8 ให้ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น โดยที่ $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix},\ T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$

จงหา $T\begin{bmatrix}4\\-3\\2\end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 9 ให้ $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น โดยที่ $T\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$, $T\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}$

จงหา $T\begin{bmatrix}1\\3\\-6\end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 10 ให้ $T : P_2 \to P_2$ เป็นการแปลงเชิงเส้น โดยที่ $T(1) = 1 + x,\ T(x) = 3 - x^2$ และ $T(x^2) = 4 + 2x - 3x^2$ จงหา $T(2 - 2x + 3x^2)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 11 ให้ $T : P_2 \to P_3$ เป็นการแปลงเชิงเส้น โดยที่ $T(x) = 1 - x,\ T(1 + x^2) = 1 + x^3$ และ $T(x - x^2) = x^2 - x^3$ จงหา $T(1 - 2x + x^2)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....