บทที่ 4

ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Spaces)

เวกเตอร์ใน 2 มิติ

1. ความหมายของเวกเตอร์

เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$

ตัวอย่าง 1.1 กำหนดให้ $A\left(2,1\right)$, $B\left(4,5\right)$ และ $C\left(3,2\right)$ จงหา $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ และ $\overrightarrow{BC}$

....

....

....

....

....

....

....

ให้ $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} = \left\langle a,\, b\right\rangle = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เราเรียก $a\hat{i}$ และ $b\hat{j}$ ว่า Vector component ของ $\vec{u}$ ในทิศทางของ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$

และเรียกเรียก a และ b ว่า Scalar component ของ $\vec{u}$ ในทิศทางของ $\hat{i}$ และ $\hat{j}$

2. การเท่ากันของเวกเตอร์

นิยาม 2.1 เวกเตอร์สองเวกเตอร์ใด ๆ จะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เช่นกำหนดให้ $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ และ $\vec{v} = c\hat{i} + d\hat{j}$ จะได้ว่า $\vec{u} = \vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ตัวอย่าง 2.1 กำหนดให้ $A\left(0,0\right)$, $B\left(1,2\right)$, $C\left(4,1\right)$ และ $D\left(5,3\right)$ จงแสดงว่า $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

....

....

....

....

....

....

....

....

3. การบวกและการลบของเวกเตอร์

นิยาม 3.1 ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้วผลบวกของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}+\vec{v}$

ตัวอย่าง 3.1 กำหนดให้ $A\left(0,0\right)$, $B\left(1,2\right)$, $C\left(4,1\right)$ และ $D\left(5,3\right)$ จงหา $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

....

....

....

....

....

....

....

นิยาม 3.2 ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ แล้วผลลบของ $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u}+\left(-\vec{v}\right)$

ตัวอย่าง 3.2 กำหนดให้ $A\left(0,0\right)$, $B\left(1,2\right)$, $C\left(4,1\right)$ และ $D\left(5,3\right)$ จงหา $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

....

....

....

....

....

....

....

นิยาม 3.3 ถ้า $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้วผลคูณของ $\vec{u}$ กับ k เขียนแทนด้วย $k\vec{u}$

ตัวอย่าง 3.3 กำหนดให้ $\vec{u}=3\hat{i}-4\hat{j}$ และ $k=2$ จงหา $k\vec{u}$

....

....

....

....

....

....

4. เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector)

นิยาม 4.1 เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์หรือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นและจุดปลายสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน เรียกว่า เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ $\vec{u} = 3\hat{i} - 4\hat{j}$ จงแสดงว่า $\vec{u} - \vec{u} = \vec{0}$

....

....

....

....

....

....

....

5. เวกเตอร์ที่ขนานกัน

นิยาม 5.1 เวกเตอร์ที่ขนานกัน คือเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกันหรือมีทิศทางตรงข้ามกัน

ตัวอย่าง 5.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \hat{i} + 4\hat{j}$ และ $\vec{v} = 3\hat{i} + k\hat{j}$ จงหา k ที่ทำให้ $\vec{u} \;//\; \vec{v}$

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 5.2 ถ้า $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานมีพิกัดจุด A เป็น $\left(-1, 2\right)$ และ $\overrightarrow{AB} = 9\hat{i} + 4\hat{j}$, $\overrightarrow{AD} = -\hat{i} + 5\hat{j}$ จงหาพิกัดจุด B, C และจุด D

....

....

....

....

....

....

6. ขนาดของเวกเตอร์

นิยาม 6.1 ถ้า $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ ขนาดของ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $\left\|\vec{u}\right\| = \left\|a\hat{i} + b\hat{j}\right\| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ตัวอย่าง 6.1 กำหนดให้ $\vec{u} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ จงหา $\left\|\vec{u}\right\|$

....

....

....

....

....

7. เวกเตอร์หน่วย (Unit Vector)

นิยาม 7.1 ถ้า $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\dfrac{\vec{u}}{\left\|\vec{u}\right\|} = \dfrac{a\hat{i} + b\hat{j}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ เป็นเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\vec{u}$

ตัวอย่าง 7.1 กำหนดให้ $A\left(-1,3\right)$ และ $B\left(2,-7\right)$ เป็นจุดสองจุด จงหาเวกเตอร์หน่วยในทิศทางของ $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$

....

....

....

....

....

8. ผลคูณเชิงสเกลาร์ (Scalar Product or Dot Product)

ผลคูณเชิงสเกลาร์ คือ ขนาดของเงาของเวกเตอร์หนึ่งที่ทาบบนเวกเตอร์หนึ่งคูณกับขนาดของเวกเตอร์นั้น

นิยาม 8.1 ให้ $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$ และ $\vec{v} = c\hat{i} + d\hat{j}$ ผลคูณเชิงสเกลาร์เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ นิยามโดย $\vec{u} \cdot \vec{v} = ac + bd$ หรือ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\left\|\vec{v}\right\|\cos\theta$

ตัวอย่าง 8.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 6,\, 0\right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 5,\, 5\right\rangle$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และมุมระหว่างสองเวกเตอร์นี้

....

....

....

....

ตัวอย่าง 8.2 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 4,\, 3 \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 5,\, 0 \right\rangle$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และ $\vec{v} \cdot \vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 8.3 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 3,\, 2 \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 1,\, 5 \right\rangle$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และ $\vec{v} \cdot \vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 8.4 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle -2,\, 1 \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 3,\, 6 \right\rangle$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และ $\vec{v} \cdot \vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

หมายเหตุ ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ แล้ว $\vec{u} \perp \vec{v}$

9. เวกเตอร์ภาพฉาย (Vector Projection)

นิยาม 9.1 ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และมีจุด O เป็นจุดเริ่มต้นร่วมกัน จากจุดปลายของ $\vec{u}$ ลากตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ที่จุด P จะเรียก $\overrightarrow{OP}$ ว่า ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u}_{\vec{v}}$ หรือ $proj_{\vec{v}}\vec{u}$ นิยามโดย

- ภาพฉายเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\vec{u}_{\vec{v}} = \left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|^2}\right)\vec{v}$
- ภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\left\|\vec{u}_{\vec{v}}\right\| = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 9.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 4,\, 3\right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 5,\, 0\right\rangle$ จงหาภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

เวกเตอร์ใน 3 มิติ

เวกเตอร์ในสามมิติสามารถดำเนินการได้เช่นเดียวกับเวกเตอร์ในสองมิติ และมีคุณสมบัติเพิ่มเติมดังนี้

10. ผลคูณเชิงเวกเตอร์หรือผลคูณไขว้ (Vector Product or Cross Product)

นิยาม 9.1 ให้ $\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ และ $\vec{v} = d\hat{i} + e\hat{j} + f\hat{k}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในสามมิติ ผลคูณเชิงเวกเตอร์เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{u} \times \vec{v}$ นิยามโดย

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

ตัวอย่าง 10.1 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 0,\, 1,\, -2 \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle 2,\, 0,\, 3 \right\rangle$ จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$ และ $\vec{v} \times \vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 10.2 กำหนดให้ $\vec{u} = \left\langle 1,\, 2,\, 3 \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle -2,\, 3,\, -4 \right\rangle$ จงหา $\vec{v} \times \vec{v}$ และ $\vec{u} \times \vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้า $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใน R^2 หรือใน R^3 และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้ว

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
3. $\vec{u} \cdot \left(\vec{v} - \vec{w}\right) = \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $k\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \left(k\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \left(k\vec{v}\right)$

ทฤษฎีบท 1.2 ถ้า $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน R^3 แล้ว

1. $\vec{u} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = 0$
2. $\vec{v} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = 0$
3. $\vec{u} \times \left(\vec{v} \times \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)\vec{w}$
4. $\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) \times \vec{w} = \left(\vec{u} \cdot \vec{w}\right)\vec{v} - \left(\vec{v} \cdot \vec{w}\right)\vec{u}$

ทฤษฎีบท 1.3 ถ้า $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน R^3 และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้ว

1. $\vec{u}\times\vec{v} = -\left(\vec{v}\times\vec{u}\right)$
2. $\vec{u}\times\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \left(\vec{u}\times\vec{v}\right)+\left(\vec{u}\times\vec{w}\right)$
3. $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\times\vec{w} = \left(\vec{u}\times\vec{w}\right)+\left(\vec{v}\times\vec{w}\right)$
4. $k\left(\vec{u}\times\vec{v}\right) = \left(k\vec{u}\right)\times\vec{v} = \vec{u}\times\left(k\vec{v}\right)$
5. $\vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{u} = \vec{0}$
6. $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ปริภูมิแบบยุคลิด n มิติ (Euclidean n – space)

นิยาม 1 สำหรับจำนวนเต็มบวก n อันดับ n ตัว(ordered n – tuple) ของจำนวนจริง หมายถึง $\left\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \right\rangle$ โดยที่ a_i เป็นจำนวนจริงทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$ ในบางครั้งเราอาจเขียน

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \text{ แทน } \left\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \right\rangle$$

นิยาม 2 สำหรับจำนวนเต็มบวก n เซตของอันดับ n ตัวทั้งหมดเรียกว่าปริภูมิ n มิติ (n – space) และเขียนแทนเซตนี้ด้วย R^n กล่าวคือ

$$R^n = \{\left\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \right\rangle \mid a_i \in R \text{ ทุกค่า } i = 1, 2, \ldots, n\}$$

เช่น $R^2 = \{\left\langle a_1, a_2 \right\rangle \mid a_1, a_2 \in R\}$

เรียกสมาชิก $\left\langle a_1, a_2 \right\rangle$ ใน R^2 ว่า คู่อันดับ (ordered pair) แทนคำว่าอันดับ 2 ตัว และเราสามารถแสดงภาพทางเรขาคณิตของคู่อันดับ $\left\langle a_1, a_2 \right\rangle$ ในระนาบ 2 มิติ

ดังนั้นต่อไปนี้จะเรียกสมาชิก $\left\langle a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \right\rangle$ ของปริภูมิ n มิติ ว่าเป็นจุดหรือเวกเตอร์ในปริภูมิ n มิติ

นิยาม 3 กำหนด $\vec{u} = \left\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \right\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n

1. เวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากัน (equals) ก็ต่อเมื่อ

$$u_1 = v_1, u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n$$

2. ผลบวกของเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แทนด้วย $\vec{u} + \vec{v}$ กำหนดโดย

$$\vec{u} + \vec{v} = \left\langle u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n \right\rangle$$

3. ผลคูณสเกลาร์ (scalar multiple) ระหว่างสเกลาร์ k ที่เป็นจำนวนจริงกับเวกเตอร์ $\vec{u}$ แทนด้วย $k\vec{u}$ กำหนดโดย

$$k\vec{u} = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$$

นิยาม 4 เวกเตอร์ศูนย์ (Zero Vector) ใน R^n หมายถึงเวกเตอร์ $\left\langle 0, 0, 0, \ldots, 0 \right\rangle$ เขียนแทนด้วย $\vec{0}$ กล่าวคือ $\vec{0} = \left\langle 0, 0, 0, \ldots, 0 \right\rangle$

นิยาม 5 ให้ $\vec{u} = \left\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \right\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n นิเสธของเวกเตอร์ $\vec{u}$ (Negative of Vector $\vec{u}$) หมายถึงเวกเตอร์ $-\vec{u} = \left\langle -u_1, -u_2, \ldots, -u_n \right\rangle$

ทฤษฎี 1 กำหนด $\vec{u} = \left\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \right\rangle$, $\vec{v} = \left\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \right\rangle$ และ $\vec{w} = \left\langle w_1, w_2, \ldots, w_n \right\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน R^n และสำหรับทุกสเกลาร์ k, l ที่เป็นจำนวนจริง จะได้

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \vec{w}$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + \left(-\vec{u}\right) = \vec{0}$
5. $k\left(l\vec{u}\right) = \left(kl\right)\vec{u}$
6. $k\left(\vec{u} + \vec{v}\right) = k\vec{u} + k\vec{v}$
7. $(k + l)\vec{u} = k\vec{u} + l\vec{u}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

นิยาม 6 กำหนด $\vec{u} = \left\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \right\rangle$ เป็นเวกเตอร์ใน R^n ผลคูณภายในแบบยุคลิด (Euclidean inner product) ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ กำหนดโดย

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

ทฤษฎี 2 สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ใด ๆ ใน R^n และสเกลาร์ k ที่เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
3. $\left(k\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = k\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right)$
4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} = \vec{0}$

นิยาม 7 สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} = \left\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \right\rangle$ ใด ๆ ใน R^n ค่าประจำแบบยุคลิด (Euclidean Norm) ของเวกเตอร์ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $\left\| \vec{u} \right\|$ กำหนดโดย

$$\left\| \vec{u} \right\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$$

นิยาม 8 สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} = \left\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \right\rangle$ และ $\vec{v} = \left\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \right\rangle$ ใด ๆ ใน R^n ระยะห่างแบบยุคลิด (Euclidean Distance) ระหว่างเวกเตอร์ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $d\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ กำหนดโดย

$$d\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \left\| \vec{u} - \vec{v} \right\| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2}$$

นิยาม 9 สำหรับเวกเตอร์ $\vec{u} = \left\langle u_1, u_2, \ldots, u_n \right\rangle$ ใด ๆ ใน R^n ถ้า $\left\| \vec{u} \right\| = 1$ แล้วเรียก $\vec{u}$ ว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วยใน R^n

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ปริภูมิเวกเตอร์ (Vector Spaces)

นิยาม 1 กำหนดให้ K เป็นเซต และ $K \neq \varnothing$ ถ้า

$$+ : K \times K \to K \text{ และ } \cdot : K \times K \to K$$

เป็นการดำเนินการภายในเซต K ที่มีคุณสมบัติว่า ทุกสมาชิก $a,b \in K$ และ $c \in K$

1. $a+b \in K$
2. $a+b = b+a$
3. $a+(b+c) = (a+b)+c$
4. มีสมาชิก 0 ใน K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a+0 = a = 0+a$
5. มีสมาชิก $-a$ ใน K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a+(-a) = 0 = (-a)+a$
6. $a \cdot b$ เป็นสมาชิกของ K
7. $a \cdot b = b \cdot a$
8. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
9. มีสมาชิก 1 ใน K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
10. ถ้า $a \neq 0$ จะสมาชิก a^{-1} ใน K เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$
11. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

แล้วเราเรียก $(K,+,\cdot)$ เป็นสนาม (Field) ภายใต้การบวก (additive) “+” และการคูณ (multiplicative) “ $\cdot$ ”

ต่อไปถ้า $(K,+,\cdot)$ เป็นสนามเราจะเขียนย่อลงโดยเขียนเฉพาะ K เท่านั้น และการคูณของสมาชิกใน K คือ $a \cdot b$ จะเขียนแทนด้วย ab

นิยาม 2 ให้ V เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง K เป็นสนาม $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ เป็นสมาชิกใน V และ k,l เป็นสมาชิกในสนาม K

กำหนดการดำเนินการทวิภาคบนเซต V ดังนี้

$\oplus : V \times V \to V$ โดยที่ $\oplus(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u} \oplus \vec{v}$

$\odot : K \times V \to V$ โดยที่ $\odot(k,\vec{u}) = k \odot \vec{u}$

และมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $\vec{u} \oplus \vec{v} \in V$
2. $\vec{u} \oplus \vec{v} = \vec{v} \oplus \vec{u}$
3. $\vec{u} \oplus \left(\vec{v} \oplus \vec{w}\right) = \left(\vec{u} \oplus \vec{v}\right) \oplus \vec{w}$
4. มีสมาชิก $\vec{0} \in V$ ที่ $\vec{v} \oplus \vec{0} = \vec{v} = \vec{0} \oplus \vec{v}$ ทุกสมาชิกใน V
5. สำหรับแต่ละ $\vec{v} \in V$ จะมี $\vec{0} \in V$ และมีเพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ $\vec{v} \oplus \left(-\vec{v}\right) = \vec{0}$
6. $k \odot \vec{v} \in V$
7. $k \odot (\vec{u} \oplus \vec{v}) = \left(k \odot \vec{u}\right) \oplus \left(k \odot \vec{v}\right)$
8. $(k \oplus l) \odot \vec{v} = \left(k \odot \vec{v}\right) \oplus \left(l \odot \vec{v}\right)$
9. $k \odot (l \odot \vec{v}) = (kl) \odot \vec{v}$
10. $1 \odot \vec{v} = \vec{v}$

เราจะเรียก $(V,+,\cdot)$ ว่าเป็นปริภูมิเวกเตอร์บนสนาม K

ตัวอย่าง 1 ให้ $V=\left\{\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \mid a_1,a_2\in R\right\}$

ถ้า $A=\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใด ๆ ใน V และ k เป็นจำนวนจริง โดยนิยามการบวกบน V และการคูณสมาชิกใน V ด้วยจำนวนจริง k ใด ๆ โดย

$A\oplus B=\begin{bmatrix} a_1+b_1 & 0 \\ 0 & a_2+b_2 \end{bmatrix}$, $k\odot A=\begin{bmatrix} ka_1 & 0 \\ 0 & ka_2 \end{bmatrix}$ จงหาว่า V เป็นปริภูมิเวกเตอร์

ตัวอย่าง 2 ให้ $V = \{x \mid x > 0\}$ โดยนิยามการบวก การคูณดังนี้ $x \oplus y = xy$, $k \odot x = x^k$

ตัวอย่าง 3 ให้ $V = \{x \mid x > 0\}$ โดยนิยามการบวก การคูณดังนี้ $x \oplus y = x + y\,,\ k \odot x = x^k$

....

ผลรวมเชิงเส้น (Linear combination)

นิยาม 1 เวกเตอร์ $\vec{u}$ ในปริภูมิเวกเตอร์ V จะเป็นผลรวมเชิงเส้น ของเวกเตอร์ $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \dots, \vec{u}_n$ ถ้ามีสเกลาร์ $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ ที่ทำให้

$$\vec{u} = k_1\vec{u}_1 + k_2\vec{u}_2 + k_3\vec{u}_3 + \dots + k_n\vec{u}_n$$

ตัวอย่าง 1 ให้ $\vec{u}_1 = \langle 1,2,-1 \rangle$ และ $\vec{u}_2 = \langle 6,4,2 \rangle$ จงแสดงว่า $\vec{w} = \langle 9,2,7 \rangle$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นได้หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2 ให้ $\vec{u}_1 = \langle 1,2,-1 \rangle$ และ $\vec{u}_2 = \langle 6,4,2 \rangle$ จงแสดงว่า $\vec{w} = \langle 4,-1,8 \rangle$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นได้หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 3 ให้ $p_1(x)=x^2-2x+5, p_2(x)=2x^2-3x$ และ $p_3(x)=x+3$ จงแสดงว่า $p(x)=x^2+4x-3$ สามารถเขียนให้อยู่ในรูปผลรวมเชิงเส้นของพหุนาม $p_1(x),\ p_2(x)$ และ $p_3(x)$ ได้หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 4 ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ จงแสดงว่า $E=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$ สามารถเขียนในรูปรวมเชิงเส้นของเมทริกซ์ A, B และ C ได้หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

นิยาม 2 ให้ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ เป็นเวกเตอร์ในปริภูมิเวกเตอร์ V เราจะกล่าวว่า $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ เป็นปริภูมิเวกเตอร์แผ่ทั่ว (span) ถ้าทุกเวกเตอร์ใน V สามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้นของ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$

ตัวอย่าง 5 ให้ $\vec{i} = \left\langle 1,0,0 \right\rangle$, $\vec{j} = \left\langle 0,1,0 \right\rangle$ และ $\vec{k} = \left\langle 0,0,1 \right\rangle$ จงแสดงว่า $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ แผ่ทั่ว R^3

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 6 จงแสดงว่า $\{1, x, x^2\}$ แผ่ทั่ว $P_2(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 7 ให้ $\vec{v}_1 = \left\langle 1,1,2 \right\rangle$, $\vec{v}_2 = \left\langle 1,0,1 \right\rangle$ และ $\vec{v}_3 = \left\langle 2,1,3 \right\rangle$ จงตรวจสอบว่า $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ แผ่ทั่ว R^3

ตัวอย่าง 8 ให้ $\vec{v}_1 = \left\langle 1,0,2 \right\rangle$, $\vec{v}_2 = \left\langle 0,1,0 \right\rangle$ และ $\vec{v}_3 = \left\langle 1,-1,1 \right\rangle$ จงตรวจสอบว่า $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ แผ่ทั่ว R^3

นิยาม 3 ให้ $S=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\ldots,\vec{v}_n\}$ เป็นสับเซตที่ไม่ว่าง ของปริภูมิเวกเตอร์ V จะกล่าวว่า S เป็นอิสระเชิงเส้น ก็ต่อเมื่อ ถ้า $a_1\vec{v}_1+a_2\vec{v}_2+\ldots+a_n\vec{v}_n=\overline{0}$ แล้ว $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$

ตัวอย่าง 9 ให้ $S=\left\{\left\langle 1,1\right\rangle,\left\langle 1,2\right\rangle\right\}$ จงพิจารณาว่า S เป็นอิสระเชิงเส้นใน R^2 หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 10 ให้ $S=\left\{\left\langle 1,-2,3\right\rangle,\left\langle 5,6,-1\right\rangle,\left\langle 3,2,1\right\rangle\right\}$ จงพิจารณาว่า S เป็นอิสระเชิงเส้นใน R^3 หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 11 ให้ $p_1(x) = x^2 - 2x + 3$, $p_2 = 2x^2 + x + 8$ และ $p_3(x) = x^2 + 8x + 7$ เป็นอิสระเชิงเส้นใน $P_2(x)$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

นิยาม 4 ให้ B เป็นสับเซตที่ไม่ว่าง ของปริภูมิเวกเตอร์ V จะกล่าวว่า B เป็นฐาน(Basis) สำหรับ V ก็ต่อเมื่อ

1. B แผ่ทั่ว V
2. B เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่าง 12 จงแสดงว่า $B = \{1, 1+x, 1+x^2\}$ เป็นฐานสำหรับ P_2 หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 13 ให้ $\vec{u} = \langle 1,2 \rangle$ และ $\vec{v} = \langle 3,5 \rangle$ เป็นฐานสำหรับ R^2 หรือไม่

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....