บทที่ 3
ระบบสมการเชิงเส้นและเมทริกซ์

1. ระบบสมการเชิงเส้น

1.1 สมการเชิงเส้น

สมการเชิงเส้น คือสมการที่แต่ละพจน์มีเพียงค่าคงตัว หรือเป็นผลคูณระหว่างค่าคงตัวกับตัวแปรยกกำลังหนึ่ง ซึ่งจะมีดีกรีของพหุนามเท่ากับ 0 หรือ 1 สมการเหล่านี้เรียกว่า "เชิงเส้น" รูปแบบทั่วไปของสมการเชิงเส้นในตัวแปร x และ y คือ $y = mx + c$

ตัวอย่าง 1.1 จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่

1. $2y = 3x + 5$
2. $x + \dfrac{1}{y} = 11$
3. $y = \sin x$
4. $2y^2 - 3x + 5 = 0$
5. $x = 2$
6. $e^y + 5x = 1$
7. $\dfrac{1}{2}x + 5y = 12$
8. $\ln y = x$
9. $\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 1$
10. $xy = 1$

1.2 ระบบสมการเชิงเส้น

ระบบสมการเชิงเส้น หมายถึงชุดของสมการเชิงเส้นของตัวแปร $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ ซึ่งมีจำนวนสมการจำกัด รูปทั่วไปของระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการและ n ตัวแปร เขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

โดยที่ a_{ij} และ b_i เป็นค่าคงที่ สำหรับทุก $i = 1, 2, 3, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, 3, \ldots, n$

ตัวอย่าง 1.2 ระบบสมการเชิงเส้น

1. $\begin{aligned} 2y + 3x &= 5 \\ y - 3x &= 7 \end{aligned}$
2. $\begin{aligned} y + 2x &= 2 \\ y + 2x &= 4 \end{aligned}$
3. $\begin{aligned} 5x_1 + 10x_2 - 20x_3 &= 40 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 8 \end{aligned}$

2. เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented matrix)

พิจารณาระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการและ n ตัวแปร

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

ซึ่งทำให้เราสามารถเขียนระบบสมการเชิงเส้นข้างต้นได้ในรูปของสมการเมทริกซ์ $AX = B$ ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

โดยที่ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ เรียกว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ เรียกว่า เมทริกซ์ตัวแปร

$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ เรียกว่า เมทริกซ์ค่าคงที่

เราเรียกเมทริกซ์ $[A : B]$ ว่า เมทริกซ์แต่งเติม (Augmented matrix)

$$.[A : B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

ตัวอย่าง 2.1 จงหาเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการต่อไปนี้

1. $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ -3x + y &= 7 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 - 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 13 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 4x_2 - x_3 + 11x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_3 - 5x_4 &= 3 \end{aligned}$$

3. การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

3.1 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n แล้ว $AX = B$ จะเป็นระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการและ n ตัวแปร สมมุติให้ A เป็นเมทริกซ์ที่หาตัวผกผันได้ และให้ A^{-1} เป็นเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ A

จาก $AX = B$ จะได้

$$\begin{aligned} A^{-1}\left(AX\right) &= A^{-1}B \\ \left(A^{-1}A\right)X &= A^{-1}B \\ I_n X &= A^{-1}B \\ X &= A^{-1}B \end{aligned}$$

ดังนั้น $A^{-1}B$ เป็นผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้น

นั่นคือถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานแล้วระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ จะมีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

ตัวอย่าง 3.1 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

1. $$\begin{aligned} 3x + 2y &= 5 \\ -3x + y &= 7 \end{aligned}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $$\begin{aligned} x - 2y - 3z &= 3 \\ 2x - y - 4z &= 7 \\ 3x - 3y - 5z &= 8 \end{aligned}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.2 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยกฎของคราเมอร์ (Cramer's Rule)

ถ้า

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เป็นระบบสมการซึ่งมี n สมการและ n ตัวแปร และให้ $A = \left[a_{ij}\right]$ เป็นเมทริกซ์สัมประสิทธิ์

ซึ่งทำให้สามารถเขียนระบบสมการข้างต้นได้ในรูป $AX = B$ เมื่อ $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ ถ้า $|A| \neq 0$

แล้วจะได้ว่า ระบบสมการนี้มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียวดังนี้

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|}, \; x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}$$

โดยที่ A_i เป็นเมทริกซ์ซึ่งได้จากเมทริกซ์ A โดยการแทนที่หลักที่ i ของ A ด้วยเมทริกซ์ B

ตัวอย่าง 3.2 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

1. $3x_1 + 2x_2 = 5$

   $-3x_1 + x_2 = 7$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 3$

   $2x_1 - x_2 - 4x_3 = 7$

   $3x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 8$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.3 การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การกำจัดตัวแปรด้วยวิธีของเกาส์และและชอร์ดอง (Gauss – Jordan elimination)

การหาผลเฉลยด้วยวิธีนี้ สามารถใช้กับระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ ที่มี m สมการและ n ตัวแปรได้ โดยพิจารณาจากเมทริกซ์แต่งเติม $\left[A : B\right]$ แล้วใช้การดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานจนได้เมริกซ์ขั้นบันไดตามแถว หรือเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถว

ตัวอย่าง 3.3 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

1. $$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 5 \\ -3x_1 + x_2 &= 7 \end{aligned}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 8 \end{aligned}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

4. การพิจารณาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

นิยาม 4.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ ค่าลำดับชั้น (rank) ของ A คือจำนวนแถวที่ไม่เป็นศูนย์ทั้งหมดของเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวซึ่งสมมูลกับ A เขียนแทนด้วย $\operatorname{rank}(A)$

ตัวอย่าง 4.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ จงหา $\operatorname{rank}(A)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $AX = B$ เป็นระบบสมการเชิงเส้น ซึ่งมี m สมการและ n ตัวแปร แล้วข้อใดข้อหนึ่งต่อไปนี้จะเป็นจริง

1. ถ้า $\operatorname{rank}\Big(\big[A : B\big]\Big) > \operatorname{rank}(A)$ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ ไม่มีผลเฉลย

2. ถ้า $\operatorname{rank}\Big(\big[A : B\big]\Big) = \operatorname{rank}(A) = n$ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ มีผลเฉลยเพียงผลเฉลยเดียว

3. ถ้า $\operatorname{rank}\Big(\big[A : B\big]\Big) = \operatorname{rank}(A) < n$ แล้วระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ มีผลเฉลยเป็นจำนวนอนันต์

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดให้
$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= -1 \\ 3x - y + 2z &= 7 \\ 5x + 3y - 4z &= 2 \end{aligned}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่าง 4.3 กำหนดให้

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 &= 7 \\ 3x_1 - 3x_2 - 5x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.4 กำหนดให้

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 4x_3 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.5 กำหนดให้

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 6x_4 &= -2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= -1 \\ 6x_1 + x_3 - 9x_4 &= -2 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 8x_4 &= 3 \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.6 กำหนดให้

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 &= 4 \\ x_1 - x_3 + x_4 &= 5 \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$