บทที่ 1
เมทริกซ์(Matrices)

1. สมบัติทางพีชคณิตของการดำเนินการบนเมทริกซ์

บทนิยาม 1.1 เมทริกซ์ (Matrix) คือการจัดเรียงจำนวนใด ๆ ในรูปของแถว (row) และหลัก (column) เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากฉายในเครื่องหมาย [ ] หรือ ( ) ดังนี้

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เรียก a_{ij} ว่า สมาชิก (element หรือ entry) ในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ A โดยที่ $i=1,2,3,\ldots,m$ และ $j=1,2,3,\ldots,n$ ถ้าเมทริกซ์ A ประกอบด้วย m แถวและ n หลักเราจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์มิติ (dimension) หรืออันดับ (order) $m\times n$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 1.2 เมทริกซ์ที่มีมิติ $1\times n$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก 1 แถว เรียกว่า เมทริกซ์แถว (row matrix) หรือเวกเตอร์แถว (row vector) และเมทริกซ์ที่มีมิติ $m\times 1$ ซึ่งเป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิก 1 หลัก เรียกว่า เมทริกซ์หลัก (column matrix) หรือเวกเตอร์หลัก (column vector)

บทนิยาม 1.3 เมทริกซ์ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์ เรียกว่า เมทริกซ์ศูนย์(zero matrix) เขียนแทนด้วย $\underline{0}$

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 1.4 ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ ถ้า $m=n$ แล้วเราจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) มิติ n สำหรับเมทริกซ์จัตุรัส A มิติ n เรานิยมเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A_n

$$E=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ 2 หรือ E_2

บทนิยาม 1.5 กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ เมทริกซ์ A จะเท่ากับเมทริกซ์ B ก็ต่อเมื่อ A และ B มีมิติเดียวกัน และ $a_{ij}=b_{ij}$ สำหรับทุกค่า $i=1,2,3,\ldots,m$ และ $j=1,2,3,\ldots,n$ เขียนแทนด้วย $A=B$

ถ้า A ไม่เท่ากับ B เขียนแทนด้วย $A\neq B$

บทนิยาม 1.6 กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ ผลบวกของ A และ B เขียนแทนด้วย $A+B$

นิยามโดย $A+B=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}+\left[b_{ij}\right]_{m\times n}=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & -5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1 & 3\\ -5 & 6 & 4\end{bmatrix}=$$

บทนิยาม 1.7 กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ c เป็นสเกลาร์ใด ๆ ผลคูณระหว่างสเกลาร์ c และเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย cA

นิยามโดย $cA=[\mathrm{ca}_{ij}]_{m\times n}$ และเราจะเขียน $-A$ ด้วย $(-1)A$

บทนิยาม 1.8 กำหนดให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ ผลต่างระหว่างเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย $A-B$

บทนิยาม 1.9 ถ้า $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{n\times p}$ แล้วผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB คือเมทริกซ์ $C=[\mathrm{c}_{ij}]_{m\times p}$ โดยที่ $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$

นั้นคือ $AB=[c_{ij}]_{m\times p}$ โดยที่ $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

$$\begin{bmatrix}3 & -2 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{bmatrix}=$$

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ $m\times n$ แล้ว $A+B=B+A$

พิสูจน์ ให้ $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ และ $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$

จากนิยามการบวกเมทริกซ์ จะได้ $A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}$

เนื่องจาก a_{ij} และ b_{ij} เป็นจำนวนจริง ซึ่งมีสมบัติสลับที่

ดังนั้น
$$\begin{aligned}A+B&=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{m\times n}\\ &=\left[b_{ij}+a_{ij}\right]_{m\times n}\\ &=B+A\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 1.2 ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ แล้ว $A+(B+C)=(A+B)+C$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.3 ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ แล้วจะมี $\underline{0}$ มิติ $m \times n$ ที่ทำให้ $A+\underline{0}=A=\underline{0}+A$ เรียก $\underline{0}$ ว่าเอกลักษณ์การบวกของ A

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.4 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ จะมีเมทริกซ์ B ที่มีมิติเท่ากับ A ที่ทำให้ $A+B=\underline{0}$ เรียกเมทริกซ์ B ว่า ตัวผกผัน(inverse) การบวกของ A เขียนแทนด้วย $-A$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.5 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ และถ้า α และ β เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้วจะได้ว่า

1. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
2. $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
3. $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A = \beta(\alpha A)$

ทฤษฎีบท 1.6 ถ้า A, B และ C เป็นเมทริกซ์ซึ่งสามารถหา AB และ BC ได้แล้ว จะได้ว่า $(AB)C = A(BC)$

พิสูจน์ ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [\mathrm{b}_{ij}]_{n\times p}$ และ $C = [\mathrm{C}_{ij}]_{p\times q}$

$$
\begin{aligned}
A(BC) &= [\mathrm{a}_{ij}]_{m\times n}\left([b_{ij}]_{n\times p}\left[c_{ij}\right]_{p\times q}\right) \\
&= [\mathrm{a}_{ij}]_{m\times n}\left[\sum_{k=1}^{p} b_{ik}c_{kj}\right]_{n\times q} \\
&= \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}\right)\right]_{m\times q} \\
&= \left[\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{il}\left(b_{lk}c_{kj}\right)\right]_{m\times q} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(b_{lk}c_{kj}\right)\right]_{m\times q} \\
&= \left[\sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj}\right]_{m\times q} \\
&= \left[\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right]_{m\times p}\left[c_{kj}\right]_{p\times q} \\
&= \left([\mathrm{a}_{ij}]_{m\times n}[b_{ij}]_{n\times p}\right)\left[c_{ij}\right]_{p\times q} \\
&= (AB)C
\end{aligned}
$$

ทฤษฎีบท 1.7 ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m\times n$, B เป็นเมทริกซ์มิติ $n\times p$ และ α เป็นสเกลาร์ใด ๆ แล้ว $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

พิสูจน์

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 1.8 1. ถ้า B และ C เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times p$ และ A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ แล้ว $A(B+C) = AB + AC$

2. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ และ C เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times p$ แล้ว $(A+B)C = AC + BC$

พิสูจน์

ทฤษฎีบท 1.9 ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ แล้ว $A \cdot \underline{0} = \underline{0}$ และ $\underline{0} \cdot A = \underline{0}$

พิสูจน์

2. การแบ่งส่วนย่อยของเมทริกซ์

บทนิยาม 2.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ เมทริกซ์ย่อย (Submatrices) ของ A คือเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวบางแถวหรือตัดหลักบางหลักของเมทริกซ์ A ออกไป

ตัวอย่าง 2.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 6 & -7 \\ 2 & -3 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a. ถ้าตัดแถวที่ 1 และหลักที่ 1 ของเมทริกซ์ A ออกไปจะได้เมทริกซ์ย่อย คือ

....

....

....

....

....

b. ถ้าตัดแถวที่ 2, 3 และหลักที่ 3, 4 ของเมทริกซ์ A ออกไปจะได้เมทริกซ์ย่อย คือ

....

....

....

....

....

c. ถ้าตัดแถวที่ 1, 2, 3 ของเมทริกซ์ A ออกไปจะได้เมทริกซ์ย่อย คือ

....

....

....

....

....

d. ถ้าตัดหลักที่ 2, 3, 4 ของเมทริกซ์ A ออกไปจะได้เมทริกซ์ย่อย คือ

....

....

....

....

....

A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ เราอาจเขียน A ในรูปเมทริกซ์ย่อย เช่น

ตัวอย่าง 2.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 5 & 4 & 6 & -8 & 9 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ตัวอย่าง 2.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา AB ในรูปผลคูณของเมทริกซ์ย่อย

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

บทนิยาม 3.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ $m \times n$ เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix) ของ A เขียนแทนด้วย A^t คือเมทริกซ์มิติ $n \times m$ ที่ได้จากการสลับที่กันระหว่างแถวและหลักของเมทริกซ์ A

นั่นคือ ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, m$ และ $j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ แล้ว

$A^t = [a_{ij}]^t_{m \times n} = [a_{ji}]_{n \times m}$ สำหรับทุก $i = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ และ $j = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad\qquad A^t =$$

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่สามารถบวกหรือคูณกันได้ และ k เป็นสเกลาร์ใด ๆ จะได้ว่า

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A+B)^t = A^t + B^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$
4. $(kA)^t = k(A^t)$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4. เมทริกซ์ทแยงมุม

บทนิยาม 4.2 ให้ $A=[a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เรียกสมาชิก $a_{11},a_{22},\dots,a_{nn}$ ว่าเส้นทแยงมุมหลัก (main diagonal) ของ A

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&6&4\\2&5&9\end{bmatrix}$$ เส้นทแยงมุมหลักของ A คือ

บทนิยาม 4.2 ให้ $A=[\mathrm{a}_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เรียกเมทริกซ์ A ว่า เมทริกซ์ทแยงมุม (diagonal matrix) ถ้า $a_{ij}=0$ สำหรับทุก $i\neq j$

และเรียกเมทริกซทแยงมุมที่สมาชิกในเส้นทแยงมุมหลักเท่ากันนั่นคือ $a_{11}=a_{22}=a_{33}=\ldots=a_{nn}$ ว่า เมทริกซเชิงสเกลาร์ (scalar matrix)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&6&0\\0&0&9\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}6&0&0\\0&6&0\\0&0&6\end{bmatrix}$$

5. เมทริกซ์เอกลักษณ์

บทนิยาม 5.1 ให้ $I_n=[a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์เชิงสเกลาร์ เรียกเมทริกซ์ I_n ว่าเมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) ถ้า $a_{ii}=1$ และ $a_{ij}=0$ สำหรับทุก $i\neq j$

$$I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 5.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์มิติ $m\times n$ แล้ว $AI_n=A$ และ $I_mA=A$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&4\\3&1&-1\end{bmatrix}=$$

6. เมทริกซ์สามเหลี่ยม

บทนิยาม 6.1 ให้ $A=[a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมบน (upper triangular) ถ้า $a_{ij}=0$ สำหรับทุก $i>j$

$$A=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&2&5\\0&0&3\end{bmatrix}$$

และเรียก A ว่า เป็นเมทริกซ์สามเหลี่ยมล่าง (lower triangular) ถ้า $a_{ij}=0$ สำหรับทุก $i<j$

$$B=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&2&0\\6&5&3\end{bmatrix}$$

7. เมทริกซ์สมมาตรและเมทริกซ์สมมาตรเสมือน

บทนิยาม 7.1 ให้ $A=[a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์สมมาตร (symmetric matrix) ถ้า $A^t=A$

บทนิยาม 7.2 ให้ $A=[a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n เรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน (skew symmetric matrix) ถ้า $A^t=-A$

$$A=\begin{bmatrix}3&1&2\\1&4&7\\2&7&5\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3&-1&2\\1&1&-3\\-2&3&2\end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 7.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n แล้วจะได้ว่า

1. AA^t เป็นเมทริกซ์สมมาตร
2. $A+A^t$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร
3. $A-A^t$ เป็นเมทริกซ์สมมาตรเสมือน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 7.2 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์สมมาตรมิติ n แล้ว

1. A^k เป็นเมทริกซ์สมมาตร สำหรับทุก $k \in N$
2. $A+B$ เป็นเมทริกซ์สมมาตร

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8. เมทริกซ์ไม่เอกฐานและเมทริกซ์เอกฐาน

บทนิยาม 8.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติ n จะกล่าวว่า A มีตัวผกผัน หรือ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (non-singular matrix) ถ้าเราสามารถหาเมทริกซ์จัตุรัส B มิติ n ที่ทำให้ $AB = BA = I_n$ เรียกเมทริกซ์ B ว่า ตัวผกผันของ A ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ A^{-1} นั่นคือ $B = A^{-1}$

ดังนั้นจะได้ว่า ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานมิติ n แล้ว $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ และถ้า A ไม่มีตัวผกผันแล้ว เรียก A ว่าเป็นเมทริกซ์เอกฐาน(singular matrix)

ตัวอย่าง 8.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จงหาตัวผกผันของ A

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

ทฤษฎีบท 8.1 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานแล้ว ตัวผกผันของ A จะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 8.2 ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานมิติ n แล้ว AB เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานมิติ n และ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ทฤษฎีบท 8.3 ถ้า A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานมิติ n แล้วจะได้ว่า

1. $(\mathrm{A}^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^{t})^{-1} = (A^{-1})^{t}$
3. kA เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานมิติ n และ $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$

9. การดำเนินการขั้นมูลฐานและเมทริกซ์มูลฐาน

การดำเนินการตามแถว(หลัก) ขั้นมูลฐานของเมทริกซ์ใด ๆ ทำได้ 3 แบบดังนี้

บทนิยาม 9.1 ให้ A เป็นเมทริกซ์ใด ๆ การดำเนินการตามแถว(หลัก) ขั้นมูลฐาน(elementary row(column) operation) ของเมทริกซ์ A คือการดำเนินการอย่างใดอย่างหนึ่งต่อไปนี้

1. การสลับที่ระหว่างแถว(หลัก) ที่ i กับแถว(หลัก) ที่ j ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $R_i \leftrightarrow R_j (C_i \leftrightarrow C_j)$ เรียกว่า การดำเนินการขั้นมูลฐานแบบที่ 1 (type I operation)

2. การคูณแถว(หลัก) ที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k ที่ไม่เท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วย $R_i \to kR_i (C_i \to kC_i)$ เรียกว่า การดำเนินการขั้นมูลฐานแบบที่ 2 (type II operation)

3. การคูณแถว(หลัก) ที่ i ของเมทริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง k ที่ไม่เท่ากับศูนย์ แล้วนำไปบวกกับแถว(หลัก) ที่ j ของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย $R_j \to kR_i + R_j (C_j \to kC_i + \mathrm{C}_j)$ เรียกว่า การดำเนินการขั้นมูลฐานแบบที่ 3 (type III operation)

ตัวอย่าง 9.1 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 9 & -6 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad R_2 \to 3R_2$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_3 \to 2R_1 + R_3$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \qquad C_2 \to -2C_2$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 15 \end{bmatrix} \qquad C_3 \to 3C_1 + C_3$$

บทนิยาม 9.2 เมทริกซ์ A สมมูลตามแถว(หลัก) (row(column) equivalent) กับเมทริกซ์ B ถ้าเมทริกซ์ B ได้มาจากการดำเนินการตามแถว(หลัก)ขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด

เมทริกซ์ A สมมูลตามแถว(หลัก)กับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A \underset{R(C)}{\sim} B$

ตัวอย่าง 9.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

บทนิยาม 9.3 เมทริกซ์ A สมมูล (equivalent) กับเมทริกซ์ B ถ้าเมทริกซ์ B ได้มาจากการดำเนินการตามแถวหรือตามหลักขั้นมูลฐาน หรือทั้งสองอย่างบนเมทริกซ์ A เป็นจำนวนครั้งจำกัด

เมทริกซ์ A สมมูลตามแถว(หลัก)กับเมทริกซ์ B เขียนแทนด้วย $A \sim B$

ตัวอย่าง 9.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

....

....

....

....

....

บทนิยาม 9.4 ถ้า $A = [a_{ij}]_{m\times p}$ และ $B = [b_{ij}]_{p\times n}$ แล้วจะได้ว่า

1. [แถวที่ i ของ AB] = [แถวที่ i ของ A]B
2. [หลักที่ j ของ AB] = A [หลักที่ j ของ B]

ตัวอย่าง 9.4 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาแถวที่ 2 ของ AB

....

....

....

....

....

10. เมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถวและเมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถว

บทนิยาม 10.1 เมทริกซ์ A มิติ $m \times n$ จะเรียกว่าเป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว (row echelon matrix) ถ้า A มีสมบัติดังนี้

1. แถวที่มีสมาชิกทุกตัวเป็นศูนย์(ถ้ามี) จะอยู่ด้านล่างของเมทริกซ์
2. สมาชิกตัวแรกในแถวใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์จะเท่ากับ 1 เรียก 1 ว่าตัวนำ 1
3. สำหรับแถวสองแถวใดที่ติดกันและมีตัวนำ 1 อยู่ ตัวนำ 1 ในแถวบนจะอยู่เยื้องไปทางขวามือของแถวล่าง

ตัวอย่าง 10.1 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

บทนิยาม 10.2 เมทริกซ์ A มิติ $m \times n$ จะเรียกว่า เมทริกซ์ขั้นบันไดลดรูปตามแถว(reduced row echelon matrix) ก็ต่อเมื่อ

1. A เป็นเมทริกซ์ขั้นบันไดตามแถว
2. ถ้าตัวนำ 1 ในแต่ละแถวอยู่ในหลักใด สมาชิกตัวอื่นในหลักนั้นจะต้องเป็นศูนย์

ตัวอย่าง 10.2 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ในการหา A^{-1} ของเมทริกซ์จัตุรัส A มิติ n ให้เริ่มต้นจากเมทริกซ์ $[A : I_n]$ แล้วทำการดำเนินการตามแถวขั้นมูลฐานบนเมทริกซ์ $[A : I_n]$ จนทำให้เมทริกซ์ $[A : I_n]$ เปลี่ยนไปเป็นในรูป $[I_n : B]$ จะได้ว่า $B = A^{-1}$

ตัวอย่าง 10.3 ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} ถ้ามี

ตัวอย่าง 10.4 ให้ $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & -2 & 1\\ 5 & -2 & -3\end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} ถ้ามี

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....