บทที่ 3
ภาคตัดกรวย (Conic Section)

ภาคตัดกรวย (conic section หรือ conic) ในทางคณิตศาสตร์ หมายถึง เส้นโค้งที่ได้จากการตัดพื้นผิวกรวยกลมด้วยระนาบแบน ภาคตัดกรวยถูกตั้งเป็นหัวข้อศึกษาตั้งแต่สมัย 200 ปีก่อนคริสต์ศักราช โดย อพอลโลเนียส แห่ง เพอร์กา (Apollonius of Perga) ผู้ซึ่งศึกษาภาคตัดกรวยและค้นพบสมบัติหลายประการของภาคตัดกรวย ต่อมาการศึกษาภาคตัดกรวยถูกนำไปใช้ประโยชน์หลายแบบ ได้แก่ ในปี ค.ศ. 1590 กาลิเลโอ กาลิเล (Galileo Galile) พบว่าขีปนาวุธที่ยิงขึ้นไปในมุมที่กำหนดมีวิถีการเคลื่อนที่โค้งแบบพาราโบลา ในปี ค.ศ. 1609 โยฮันส์ เคปเลอร์ (Kapler) พบว่าวงโคจรของดาวเคราะห์รอบนอกเป็นรูปวงรี และในปี ค.ศ.1668 ไอแซค นิวตัน (Isaac Newton) เป็นบุคคลแรกที่ประดิษฐ์กล้องโทรทรรศน์ชนิดสะท้อนแสงโดยอาศัยหลักการที่มีพื้นฐานจากสมบัติขอพาราโบลาและไฮเพอร์โบลา

ในปัจจุบันมีการศึกษาเกี่ยวกับการนำสมบัติของภาคตัดกรวยไปใช้ประโยชน์ในด้านต่างๆ เรื่อยมา เช่น ใช้จานทรงพาราโบลา (รูปเรขาคณิตสามมิติที่เกิดจากการหมุนพาราโบลารอบแกนสมมาตรของพาราโบลา) เป็นอุปกรณ์เก็บรวบรวมสัญญาณ จานรับส่งสัญญาณในระบบโทรคมนาคม หรือใช้เป็นอุปกรณ์เก็บพลังงานจากดวงอาทิตย์ หรือใช้เป็นอุปกรณ์สำหรับสะท้อนแสง ได้แก่ โคมไฟ การหาตำแหน่งของเรือในทะเลโดยใช้จุดตัดของไฮเพอร์โบลา การทำงานของอุปกรณ์ที่ใช้สลายก้อนนิ่วในไตใช้สมบัติการสะท้อนของวงรี เป็นต้น สำหรับในบทที่ 3 นี้เราจะมาศึกษาภาคตัดกรวย ซึ่งภาคตัดกรวยนั้น เป็นการศึกษารูปที่เกิดจากการตัดกรวยกลมด้วยระนาบแล้วเกิดกราฟลักษณะต่าง ๆ กัน ได้แก่ วงกลม พาราโบลา วงรี และ ไฮเพอร์โบลา ดังรายละเอียดต่อไปนี้

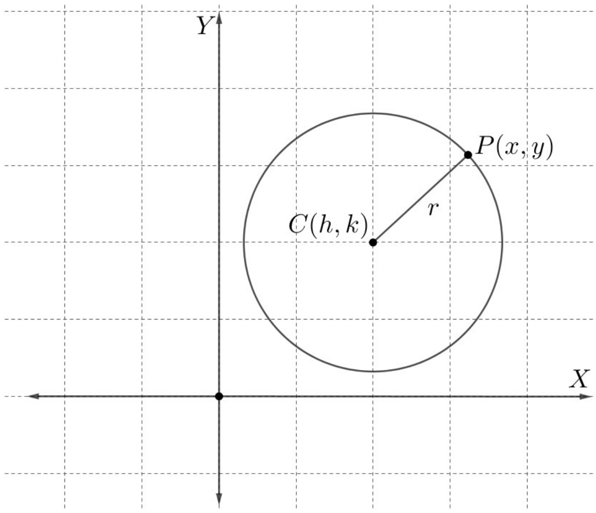
3.1 วงกลม (Circle)

บทนิยาม 3.1.1 วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน

โดย จุดคงที่ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (Centre)

ระยะทางที่เท่ากัน เรียกว่า **รัศมี** (Radius)

(Riddle, Douglas F., 1996 : 126)



รูปที่ 3.1 กราฟวงกลม

วัลลภ เฉลิมสุวิวัฒนาการ (2540 : 36) ได้กล่าวว่า การหาสมการวงกลมให้จุด $C(h, k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมและจุด $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม ดังรูปที่ 3.1 จะได้ $\left|CP\right| = r$ เป็นระยะทางคงที่ จากสูตรการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในทฤษฎีบท 1.2.1 จะได้สมการรูปมาตรฐานของวงกลม คือ

$$\left|CP\right| = r$$
$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$
$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของวงกลม คือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

ข้อสังเกต

1. ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด $(0,0)$ สมการรูปมาตรฐานของวงกลม คือ

$$x^2 + y^2 = r^2$$

และถ้าวงกลมนี้มีรัศมียาว 1 หน่วย จะเรียกวงกลมนี้ว่า วงกลมหนึ่งหน่วย

2. ถ้าวงกลมมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด (h,k) สมการรูปมาตรฐานของวงกลม คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

(วรรณี ธรรมโชติ, 2550 : 48-49)

สมการรูปทั่วไปของวงกลม (General Equation of Circle) ได้จากการกระจายสมการรูปมาตรฐานของวงกลมดังนี้

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$x^2-2xh+h^2+y^2-2ky+k^2=r^2$$
$$x^2+y^2-2xh-2ky+h^2+k^2-r^2=0$$

ดังนั้น สมการรูปทั่วไปของวงกลม คือ

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

เมื่อ $D=-2h$

$E=-2k$

$F=h^2+k^2-r^2$

จาก $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ จัดรูปให้เป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์ จะได้ว่า

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$
$$\left(x^2+Dx+\left(\frac{D}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+Ey+\left(\frac{E}{2}\right)^2\right)=-F+\left(\frac{D}{2}\right)^2+\left(\frac{E}{2}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{D}{2}\right)^2+\left(y+\frac{E}{2}\right)^2=\frac{D^2+E^2-4F}{4}$$
$$\left(x-\left(-\frac{D}{2}\right)\right)^2+\left(y-\left(-\frac{E}{2}\right)\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}\right)^2$$

จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ $(h,k)=\left(-\frac{D}{2},-\frac{E}{2}\right)$

และ รัศมีของวงกลม คือ $r=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2-4F}$ เมื่อ $D^2+E^2-4F>0$

หมายเหตุ สมการรูปทั่วไป $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ไม่จำเป็นต้องให้กราฟเป็นรูปวงกลมเสมอไป หากทำสมการให้เป็นรูปกำลังสองสมบูรณ์

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r$$

1. ถ้า $r>0$ จะได้สมการที่มีกราฟเป็นรูปวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) รัศมี $\sqrt{r}$
2. ถ้า $r=0$ จะได้สมการที่มีกราฟเป็นจุดเพียงจุดเดียวคือจุด (h,k)
3. ถ้า $r<0$ สมการไม่มีคำตอบ แสดงว่าไม่ทำให้ได้กราฟเป็นรูปวงกลม

(ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 77)

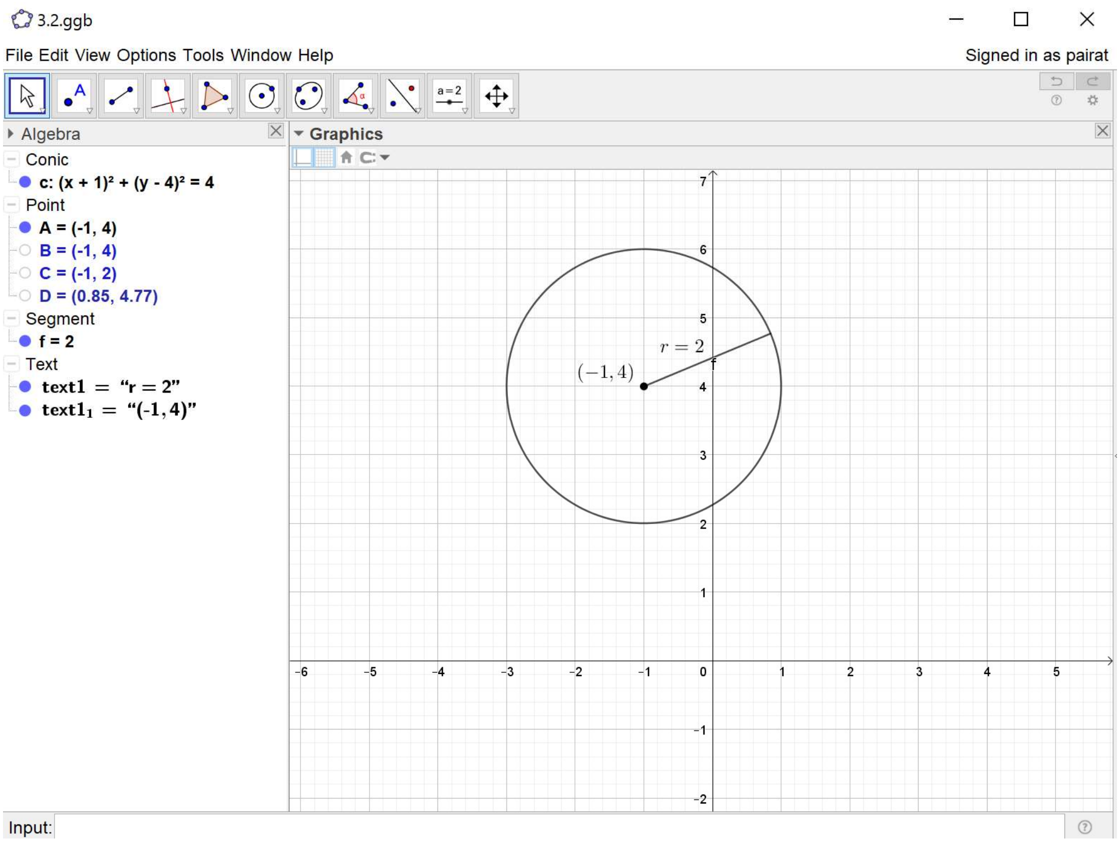
ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1,4)$ และรัศมี 2 หน่วย พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ จากสมการมาตรฐานของวงกลม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(x-h)^2+(y-k)^2 &= r^2\\
(x-1)^2+(y-4)^2 &= 2^2\\
(x-1)^2+(y-4)^2 &= 4\\
x^2-2x+1+y^2-8y+16 &= 4\\
x^2+y^2-2x-8y+16+1-4 &= 0\\
x^2+y^2-2x-8y+13 &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น สมการวงกลมคือ $x^2+y^2-2x-8y+13=0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.1.1 ดังรูปที่ 3.2



รูปที่ 3.2 กราฟวงกลม $x^2+y^2-2x-8y+13=0$

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$ พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

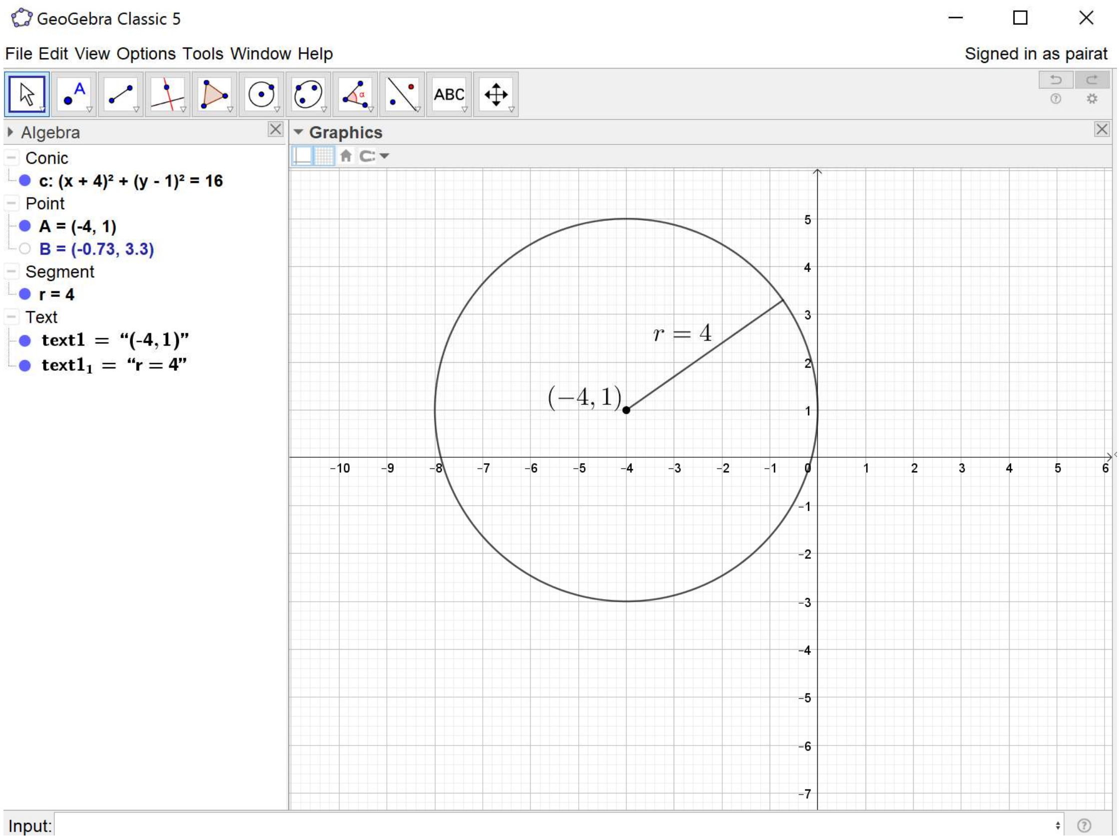
วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในสมการรูปมาตรฐานของวงกลม จะได้ว่า

$$x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$$
$$x^2 + 8x + y^2 - 2y = -1$$
$$x^2 + 8x + 4^2 + y^2 - 2y + 1^2 = -1 + 4^2 + 1^2$$
$$(x+4)^2 + (y-1)^2 = 16$$
$$(x-(-4))^2 + (y-1)^2 = 4^2$$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของวงกลมคือ $(x-(-4))^2 + (y-1)^2 = 4^2$

จะได้จุดศูนย์กลางของวงกลม $(h,k) = (-4,1)$ และรัศมีของวงกลม $r = 4$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.1.2 ดังรูปที่ 3.3



รูปที่ 3.3 กราฟวงกลม $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$

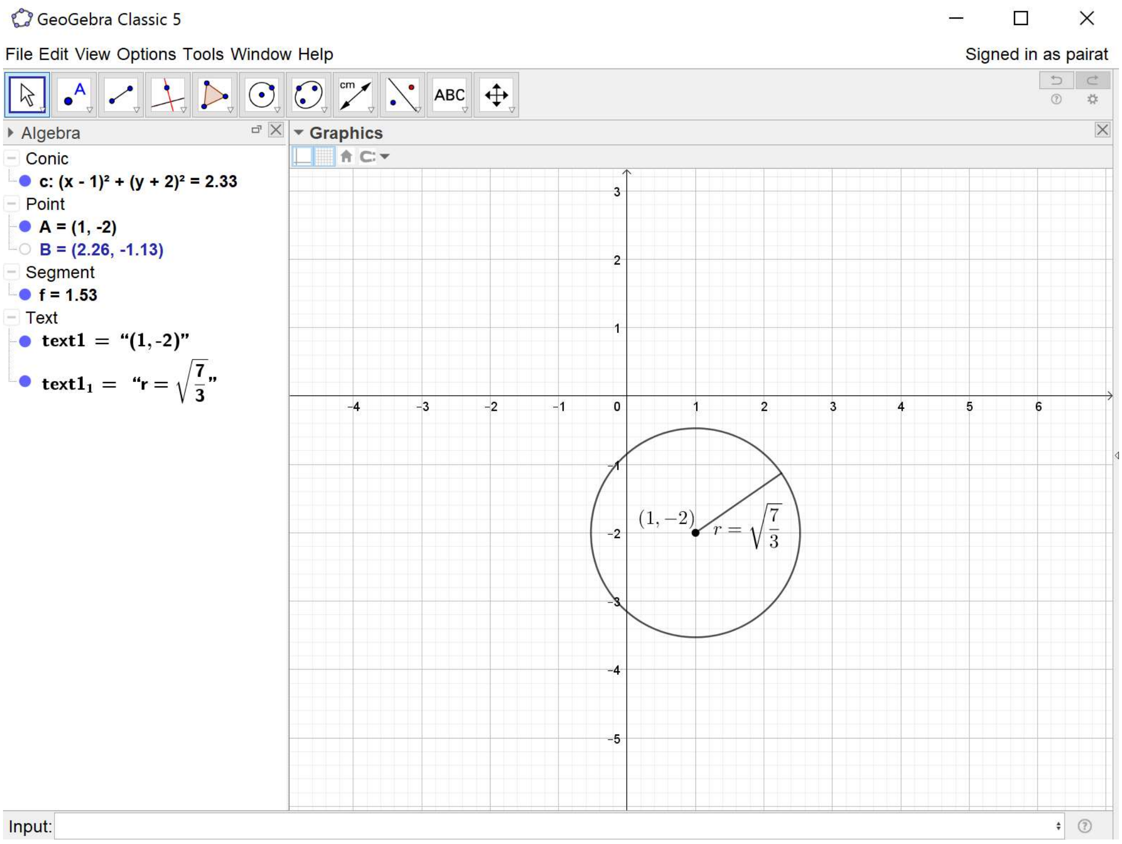
ตัวอย่าง 3.1.3 จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น $3x^2+3y^2-6x+12y=-8$ พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในสมการรูปมาตรฐานของวงกลม จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
3x^2+3y^2-6x+12y+8&=0\\
3(x^2-2x)+3(y^2+4y)&=-8\\
3(x^2-2x+1)+3(y^2+4y+4)&=-8+3+12\\
3(x-1)^2+3(y+2)^2&=7\\
(x-1)^2+(y+2)^2&=\sqrt{\frac{7}{3}}^{\,2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการของวงกลมคือ $(x-1)^2+(y+2)^2=\sqrt{\frac{7}{3}}^{\,2}$ จุดศูนย์กลางคือ $(1,-2)$ รัศมีคือ $\sqrt{\frac{7}{3}}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.1.3 ดังรูปที่ 3.4



รูปที่ 3.4 กราฟวงกลม $3x^2+3y^2-6x+12y+8=0$

ตัวอย่าง 3.1.4 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(-2,3)$ และผ่านจุด $(2,0)$ พร้อมทั้งวาดกราฟ

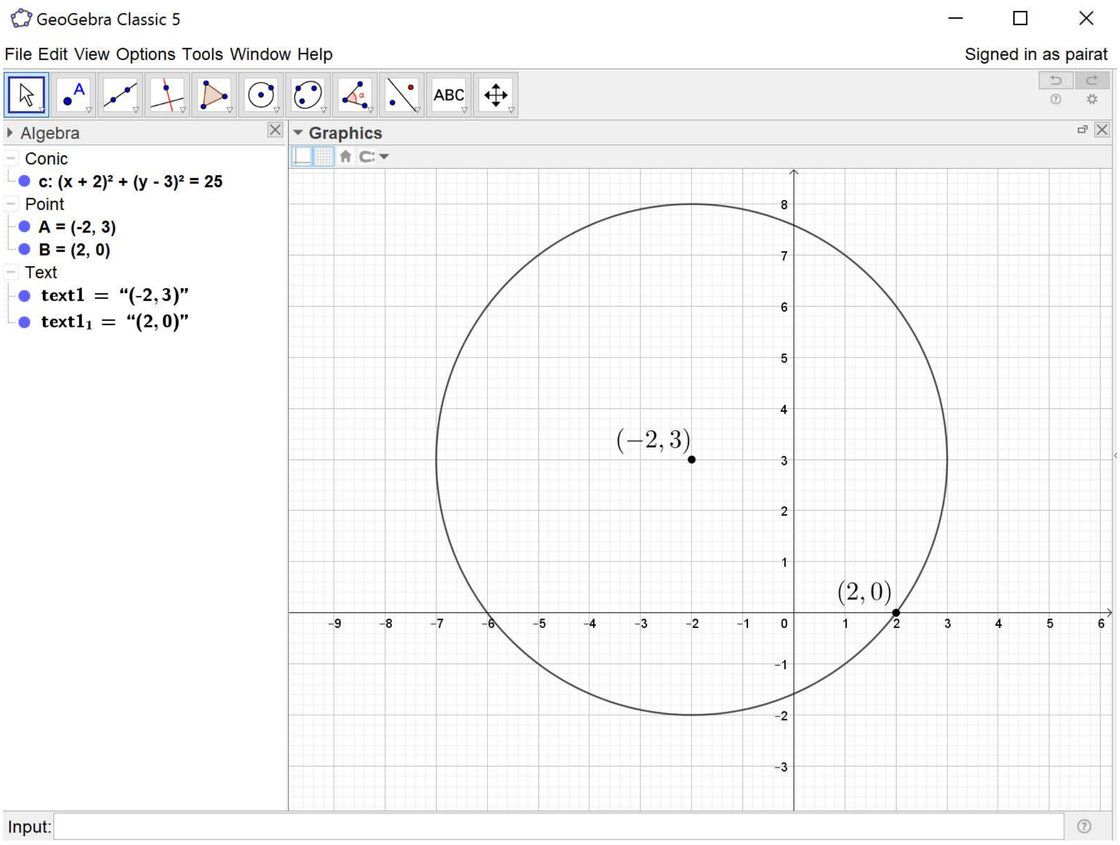
วิธีทำ หารัศมีจากระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลาง และ จุดที่วงกลมผ่านได้ดังนี้

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(2-(-2))^2+(0-3)^2} \\ &= \sqrt{(2+2)^2+(0-3)^2} \\ &= \sqrt{16+9} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(-2,3)$ และรัศมีเท่ากับ 5 คือ

$$(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.1.4 ดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.5 กราฟวงกลม $(x+2)^2+(y-3)^2=5^2$

ตัวอย่าง 3.1.5 จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่งอยู่ที่จุด $(4,-3)$ และจุด $(0,-5)$ พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ จากจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง แสดงว่าจุด (h,k) เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงนี้ จะได้

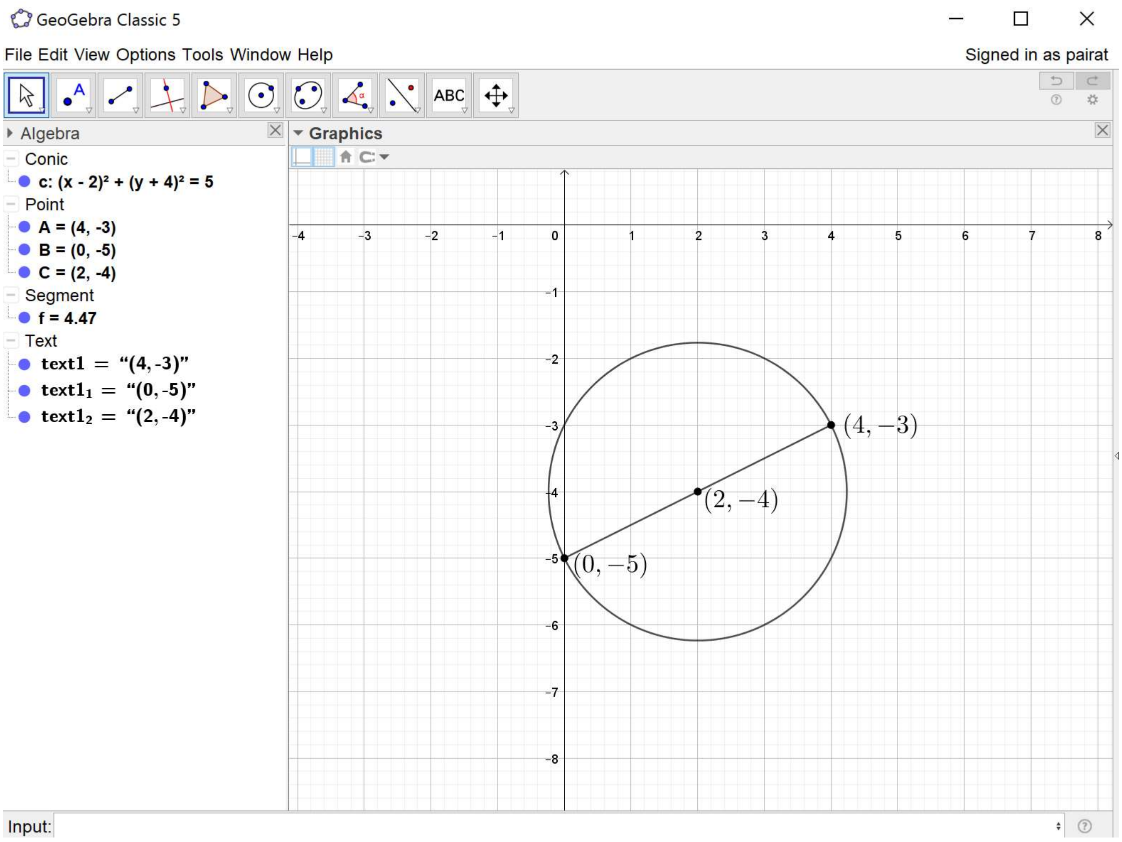
$$h = \frac{4+0}{2} = 2$$
$$k = \frac{-3+(-5)}{2} = -4$$

รัศมีของวงกลมคือระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดปลายของเส้นตรงนี้ จะได้

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \\ &= \sqrt{(4-2)^2+(-3-(-4))^2} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(2,-4)$ และรัศมีเท่ากับ $\sqrt{5}$ คือ $(x-2)^2+(y+4)^2=5$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.1.5 ดังรูปที่ 3.6



รูปที่ 3.6 กราฟวงกลม $(x-2)^2+(y+4)^2=5$

ตัวอย่าง 3.1.6 จงหาสมการของวงกลมซึ่งผ่านจุด $(3,1)$ และจุด $(5,-1)$ และมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $l: x-3y-6=0$ พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ ให้จุดศูนย์กลางของวงกลมคือจุด (h,k) และสมการวงกลมคือ $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

เมื่อแทนจุด $(3,1)$ และจุด $(5,-1)$ ที่วงกลมผ่านลงในสมการวงกลม จะทำให้สมการวงกลมเป็นจริง ดังนี้

$$(3-h)^2+(1-k)^2=r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$(5-h)^2+(-1-k)^2=r^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

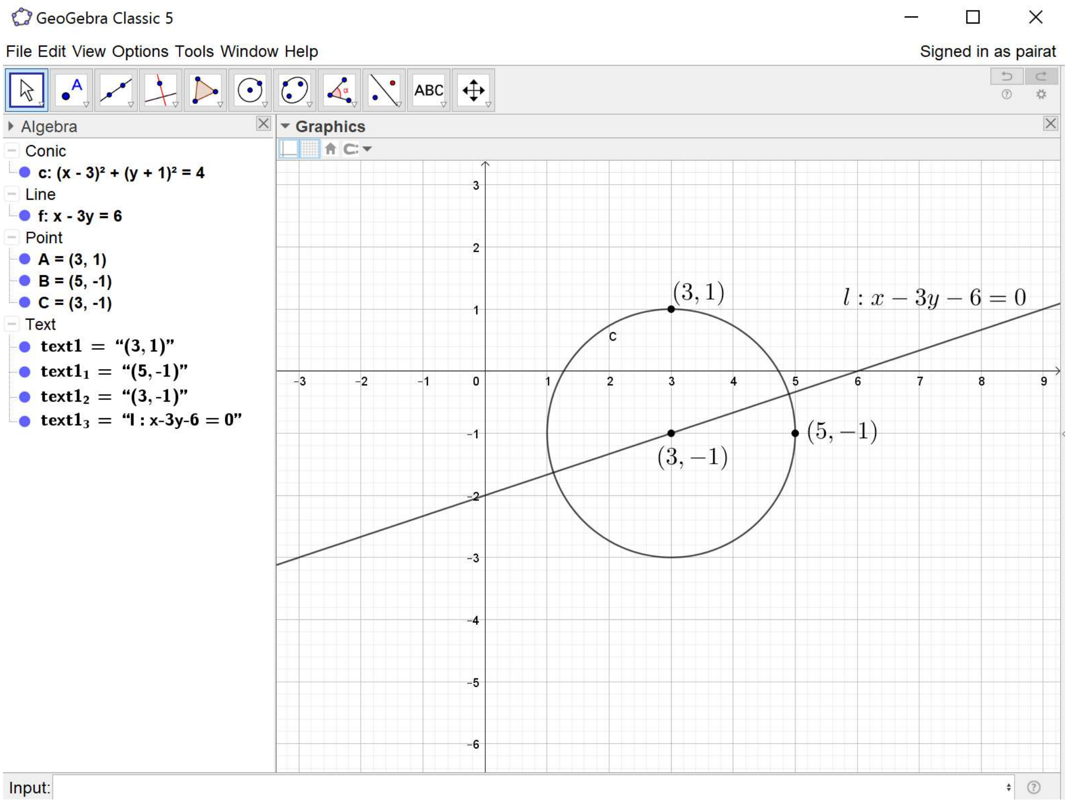
จากจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนเส้นตรง $l: x-3y-6=0$ จะได้ว่า

$$h-3k-6=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

จากสมการ $(1),(2)$ และ (3) จะได้ $h=3, k=-1$ และ $r=2$

ดังนั้น สมการของวงกลมนี้ คือ $(x-3)^2+(y+1)^2=2^2$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.1.6 ดังรูปที่ 3.7



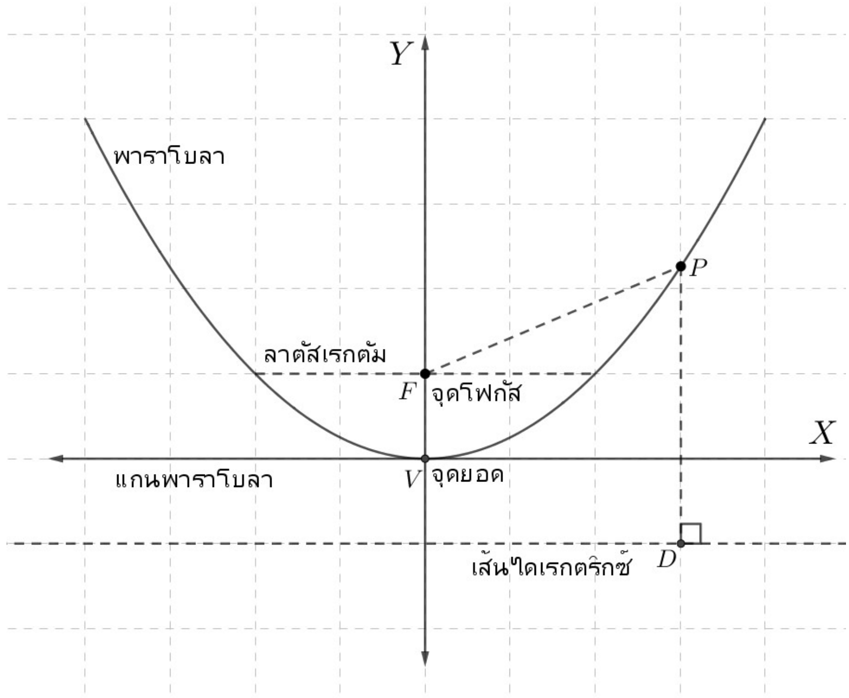
รูปที่ 3.7 กราฟวงกลม $(x-3)^2+(y+1)^2=4$

3.2 พาราโบลา (Parabola)

บทนิยาม 3.2.1 พาราโบลา คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งและเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน

- จุดคงที่ เรียกว่า **จุดโฟกัส (Focus)** เขียนแทนด้วย F
- เส้นตรงคงที่ เรียกว่า **ไดเรกตริกซ์ (Directrix)**
- เส้นตรงที่ลากผ่านจุดโฟกัส และตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ เรียกว่า **แกนของพาราโบลา**
- จุดที่กราฟตัดกับแกนของพาราโบลา เรียกว่า **จุดยอด (Vertex)** เขียนแทนด้วย V
- เส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาตรงจุดโฟกัส F และ ปลายเส้นตรงอยู่บนพาราโบลา เรียกว่า **เลตัสเรกตัม (Latus Rectum)**
- ถ้า P เป็นจุดใด ๆ ที่อยู่บนพาราโบลาและ PD ตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ D และ F เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลาแล้ว $|PD| = |PF|$

(Varberg, Dale ; Purcell, Edwin J & Rigdon, Steven E. 2000 : 518)

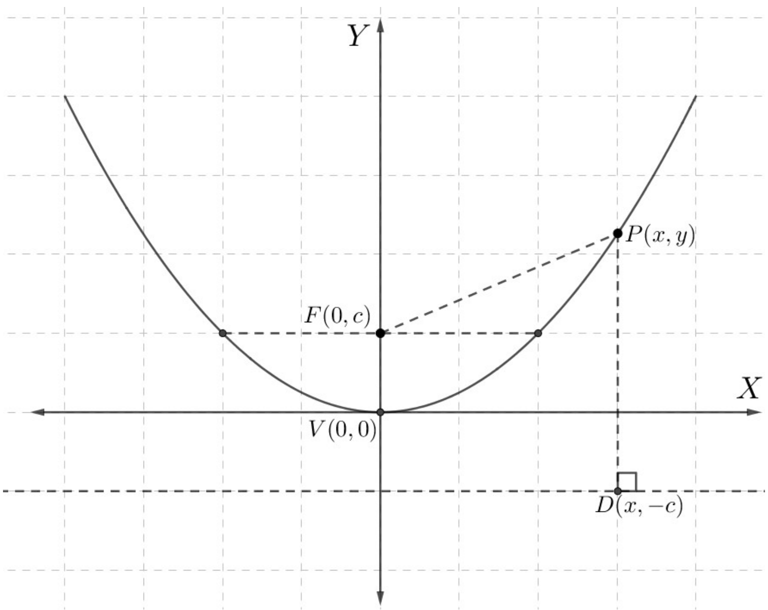


รูปที่ 3.8 กราฟแสดงส่วนประกอบพาราโบลา

3.2.1 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$

เลิศ สิทธิโกศล (2542 :13-16) และ Murdoch, D. C. (1967 : 127-128) ได้กล่าวว่า การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,\, c)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จะได้จุด $D(x, -c)$ ดังรูปที่ 3.9 จากบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|PF\right| &= \left|PD\right| \\
\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y-(-c))^2} \\
\sqrt{x^2+(y-c)^2} &= \sqrt{0^2+(y+c)^2} \\
\sqrt{x^2+y^2-2cy+c^2} &= \sqrt{y^2+2cy+c^2} \\
x^2+y^2-2cy+c^2 &= y^2+2cy+c^2 \\
x^2-2cy &= 2cy \\
x^2 &= 4cy
\end{aligned}
$$

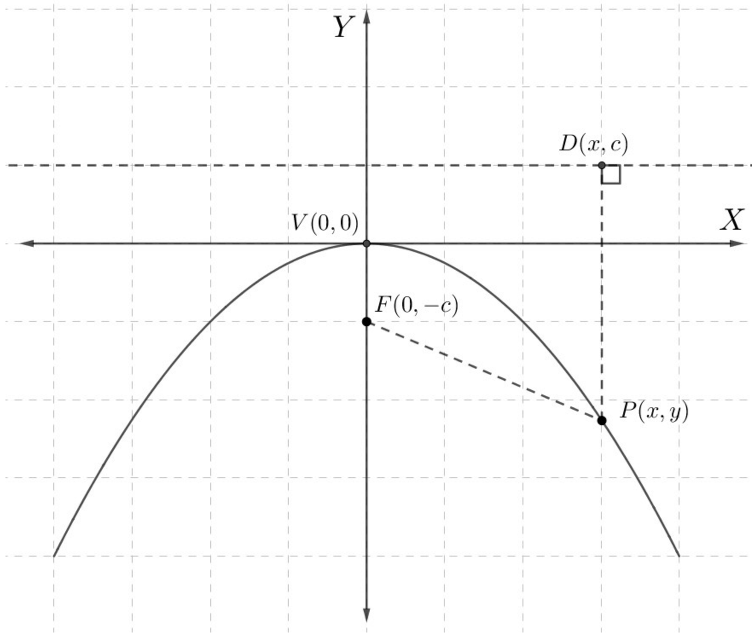


รูปที่ 3.9 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,\, c)$

จากรูปที่ 3.9 จะได้ว่า พาราโบลามีสมการรูปมาตรฐานคือ $x^2 = 4cy$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาหงายจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,\, -c)$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\left|4c\right|$ หน่วย สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = -c$ และมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,-c)$ ให้ $P(x,\,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จะได้จุด $D(x,c)$ ดังรูปที่ 3.10 จากบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|PF\right| &= \left|PD\right| \\
\sqrt{(x-0)^2+(y-(-c))^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y-c)^2} \\
\sqrt{x^2+(y+c)^2} &= \sqrt{0^2+(y-c)^2} \\
\sqrt{x^2+y^2+2cy+c^2} &= \sqrt{y^2-2cy+c^2} \\
x^2+y^2+2cy+c^2 &= y^2-2cy+c^2 \\
x^2+2cy &= -2cy \\
x^2 &= -4cy
\end{aligned}$$

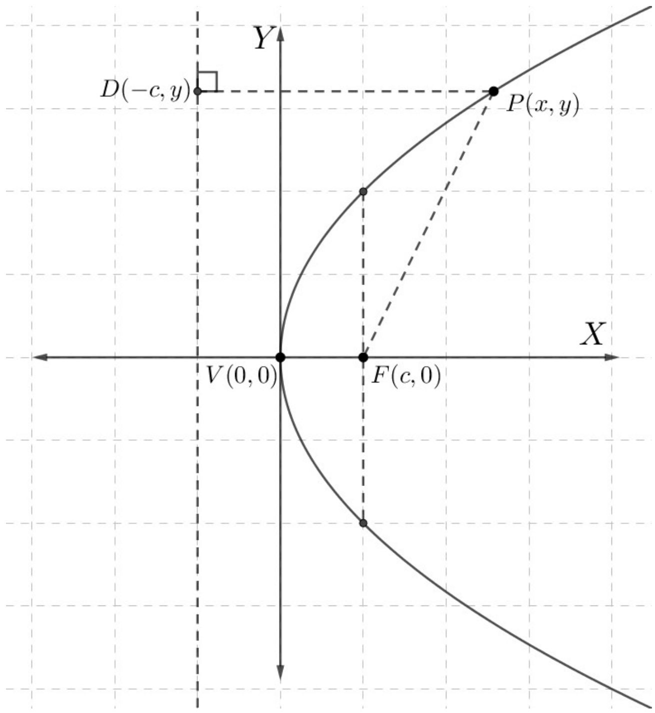


รูปที่ 3.10 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,-c)$

จากรูปที่ 3.10 จะได้ว่า พาราโบลามีสมการรูปมาตรฐานคือ $x^2=-4cy$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0,\,-c)$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\left|4c\right|$ หน่วย สมการไดเรกตริกซ์คือ $y=c$ และมีแกน Y เป็นแกนสมมาตร

การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(c,0)$ ให้ $P(x,\,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จะได้จุด $D(-c,y)$ ดังรูปที่ 3.11 จากบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|PF\right| &= \left|PD\right| \\
\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} &= \sqrt{(x-(-c))^2+(y-y)^2} \\
\sqrt{(x-c)^2+y^2} &= \sqrt{(x+c)^2+0^2} \\
\sqrt{x^2-2cx+c^2+y^2} &= \sqrt{x^2+2cx+c^2} \\
x^2-2cx+c^2+y^2 &= x^2+2cx+c^2 \\
y^2-2cx &= 2cx \\
y^2 &= 4cx
\end{aligned}$$

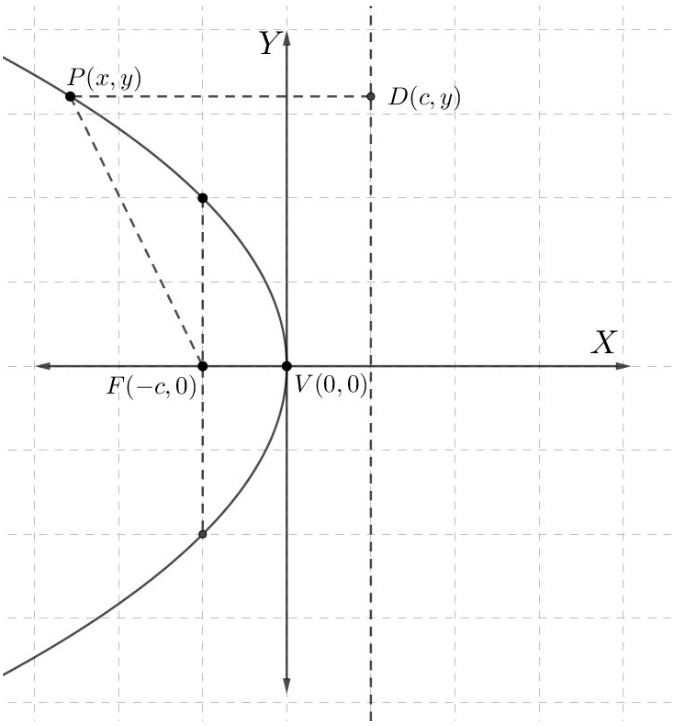


รูปที่ 3.11 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(c,0)$

จากรูปที่ 3.11 จะได้ว่า พาราโบลามีสมการรูปมาตรฐานคือ $y^2=4cx$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาตะแคงขวา จุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(c,0)$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\left|4c\right|$ หน่วย สมการไดเรกตริกซ์คือ $x=-c$ และมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(-c,0)$ ให้ $P(x,\,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จะได้จุด $D(c,y)$ ดังรูปที่ 3.12 จากบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|PF\right| &= \left|PD\right| \\
\sqrt{(x-(-c))^2+(y-0)^2} &= \sqrt{(x-c)^2+(y-y)^2} \\
\sqrt{(x+c)^2+y^2} &= \sqrt{(x-c)^2+0^2} \\
\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2} &= \sqrt{x^2-2cx+c^2} \\
x^2+2cx+c^2+y^2 &= x^2-2cx+c^2 \\
y^2+2cx &= -2cx \\
y^2 &= -4cx
\end{aligned}$$



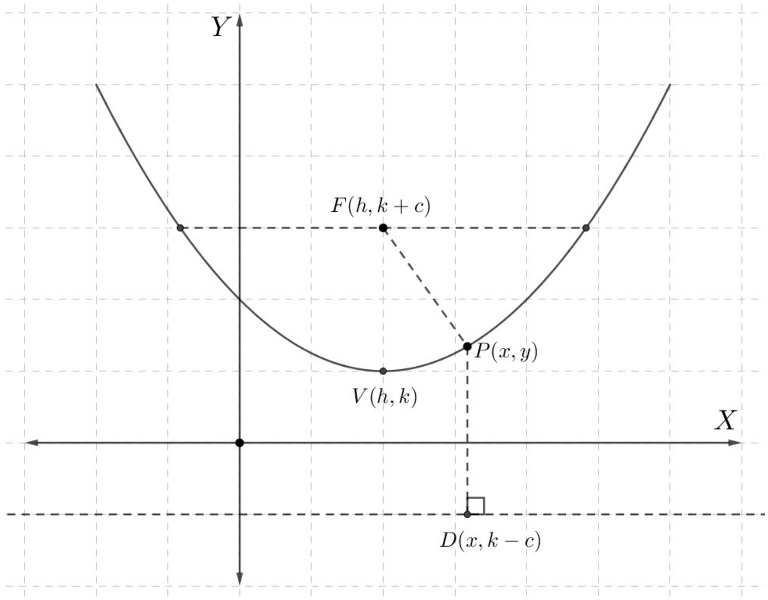
รูปที่ 3.12 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(-c,0)$

จากรูปที่ 3.12 จะได้ว่า พาราโบลามีสมการรูปมาตรฐานคือ $y^2=-4cx$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาตะแคงซ้าย จุดยอดอยู่ที่จุด $V(0,\,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(-c,0)$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\left|4c\right|$ หน่วย สมการไดเรกตริกซ์คือ $x=c$ และมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

3.2.2 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h,k)

เลิศ สิทธิโกศล (2542 :19-22) และ Fuller, Gordon & Tarwater, Dolton (1992 : 109-111) ได้กล่าวว่า การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h,\, k+c)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จะได้จุด $D(x, k-c)$ ดังรูปที่ 3.13 จากบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|PF\right| &= \left|PD\right| \\
\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2} &= \sqrt{(x-x)^2+(y-(k-c))^2} \\
\sqrt{(x-h)^2+y^2-2(k+c)y+(k+c)^2} &= \sqrt{0^2+y^2-2(k-c)y+(k-c)^2} \\
(x-h)^2+y^2-2ky-2cy+k^2+2kc+c^2 &= y^2-2ky+2cy+k^2-2kc+c^2 \\
(x-h)^2-2cy+2kc &= 2cy-2kc \\
(x-h)^2 &= 4cy-4kc \\
(x-h)^2 &= 4c(y-k)
\end{aligned}$$

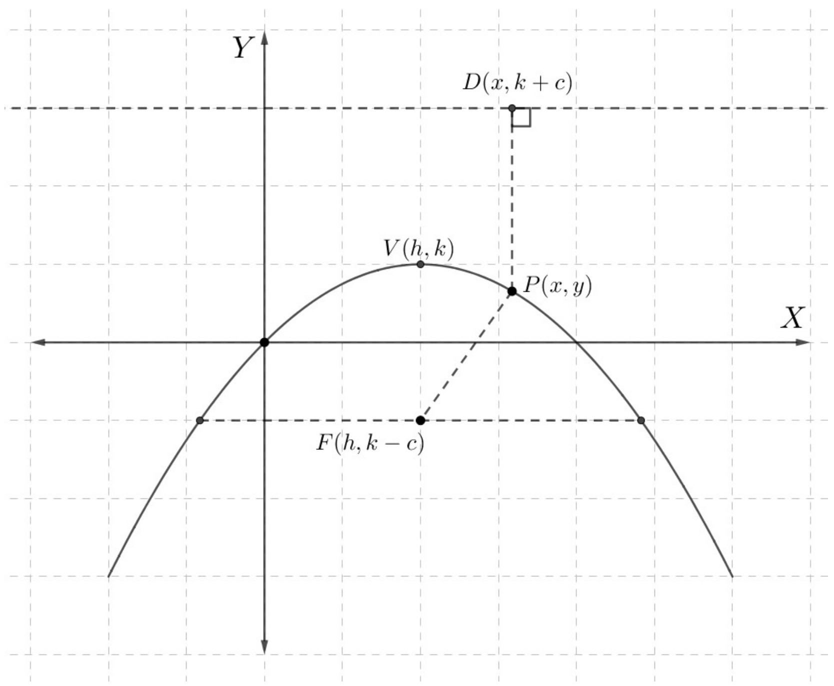


รูปที่ 3.13 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h,\, k+c)$

จากรูปที่ 3.13 จะได้ว่า พาราโบลามีสมการรูปมาตรฐานคือ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาหงายจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h,\, k+c)$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\left|4c\right|$ หน่วย สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = k - c$ และมีแกนสมมาตรขนานแกน Y

การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h,\, k-c)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จะได้จุด $D(x, k+c)$ ดังรูปที่ 3.14 จากบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|PF\right| &= \left|PD\right| \\
\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} &= \sqrt{(x-x)^2 + (y-(k+c))^2} \\
\sqrt{(x-h)^2 + y^2 - 2(k-c)y + (k-c)^2} &= \sqrt{0^2 + y^2 - 2(k+c)y + (k+c)^2} \\
(x-h)^2 + y^2 - 2ky + 2cy + k^2 - 2kc + c^2 &= y^2 - 2ky - 2cy + k^2 + 2kc + c^2 \\
(x-h)^2 + 2cy - 2kc &= -2cy + 2kc \\
(x-h)^2 &= -4cy + 4kc \\
(x-h)^2 &= -4c(y-k)
\end{aligned}
$$

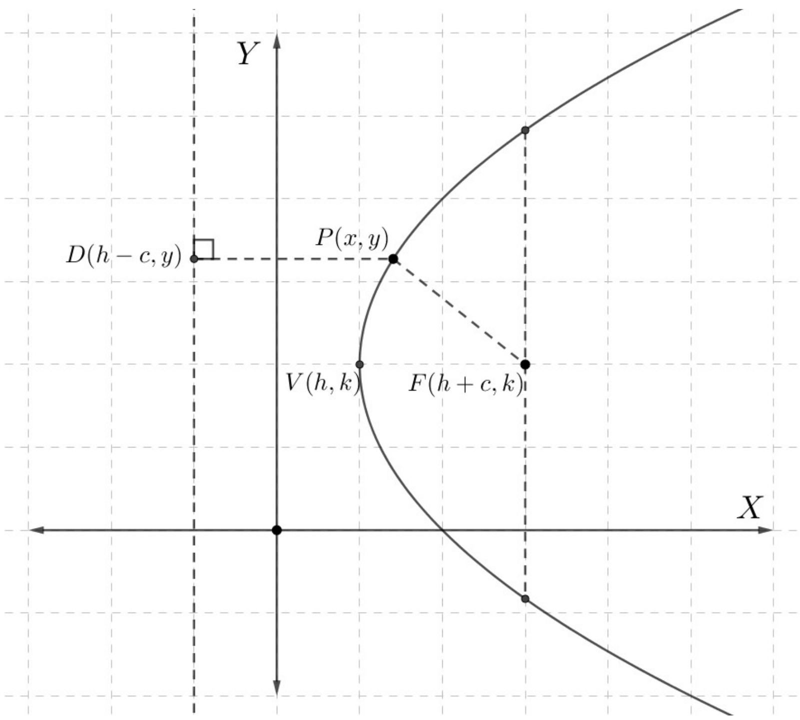


รูปที่ 3.14 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h,\, k-c)$

จากรูปที่ 3.14 จะได้ว่า พาราโบลามีสมการรูปมาตรฐานคือ $(x-h)^2 = -4c(y-k)$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h,\, k-c)$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\left|4c\right|$ หน่วย สมการไดเรกตริกซ์คือ $y = k + c$ และมีแกนสมมาตรขนานแกน Y

การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h+c,\, k)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จะได้จุด $D(h-c, y)$ ดังรูปที่ 3.15 จากบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|PF\right| &= \left|PD\right| \\
\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} &= \sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-y)^2} \\
\sqrt{x^2 - 2(h+c)x + (h+c)^2 + (y-k)^2} &= \sqrt{x^2 - 2(h-c)x + (h-c)^2 + 0^2} \\
x^2 - 2hx - 2cx + h^2 + 2hc + c^2 + (y-k)^2 &= x^2 - 2hx + 2cx + h^2 - 2hc + c^2 \\
-2cx + 2hc + (y-k)^2 &= 2cx - 2hc \\
(y-k)^2 &= 4cx - 4hc \\
(y-k)^2 &= 4c(x-h)
\end{aligned}
$$

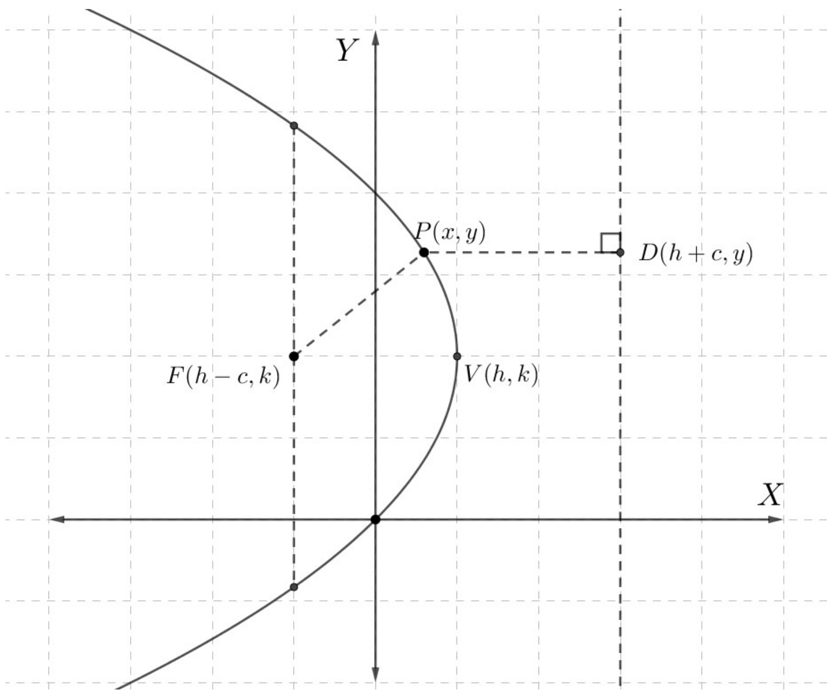


รูปที่ 3.15 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h+c,\, k)$

จากรูปที่ 3.15 จะได้ว่า พาราโบลามีสมการรูปมาตรฐานคือ $(y-k)^2 = 4c(x-h)$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาตะแคงขวา จุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h+c,\, k)$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\left|4c\right|$ หน่วย สมการไดเรกตริกซ์คือ $x = h-c$ และมีแกนสมมาตรขนานแกน X

การหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h-c,\, k)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา จะได้จุด $D(h+c, y)$ ดังรูปที่ 3.16 จากบทนิยาม 3.2.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|PF\right| &= \left|PD\right| \\
\sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} &= \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-y)^2} \\
\sqrt{x^2 - 2(h-c)x + (h-c)^2 + (y-k)^2} &= \sqrt{x^2 - 2(h+c)x + (h+c)^2 + 0^2} \\
x^2 - 2hx + 2cx + h^2 - 2hc + c^2 + (y-k)^2 &= x^2 - 2hx - 2cx + h^2 + 2hc + c^2 \\
2cx - 2hc + (y-k)^2 &= -2cx + 2hc \\
(y-k)^2 &= -4cx + 4hc \\
(y-k)^2 &= -4c(x-h)
\end{aligned}$$



รูปที่ 3.16 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h-c,\, k)$

จากรูปที่ 3.16 จะได้ว่า พาราโบลามีสมการรูปมาตรฐานคือ $(y-k)^2 = -4c(x-h)$ มีลักษณะเป็นพาราโบลาตะแคงซ้าย จุดยอดอยู่ที่จุด $V(h,\,k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h-c,\,k)$ ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\left|4c\right|$ หน่วย สมการไดเรกตริกซ์คือ $x = h + c$ และมีแกนสมมาตรขนานแกน X

ตัวอย่าง 3.2.1 จงหาสมการพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่ที่จุดกำเนิด และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0,2)$ พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ จากโจทย์จะได้ว่า กราฟพาราโบลามีแกน Y เป็นแกนสมมาตร โดยค่า c คือระยะห่างระหว่างจุดยอดและจุดโฟกัส นั่นคือ

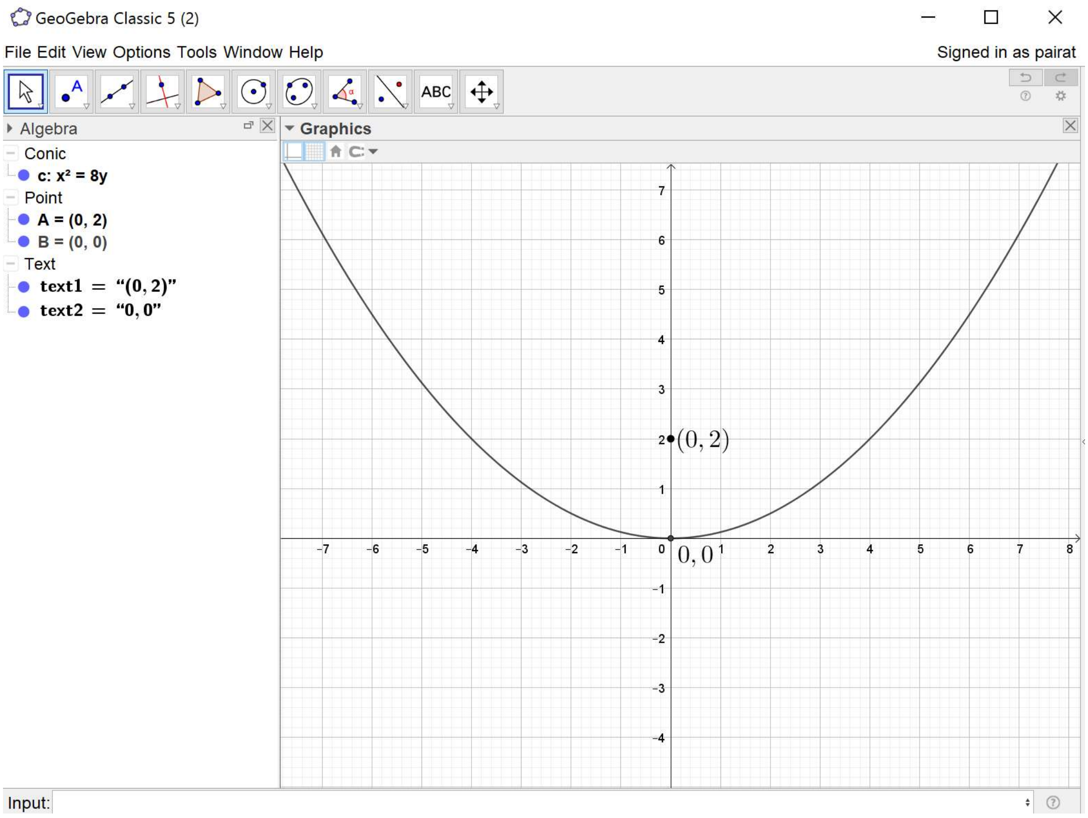
$$\begin{aligned} c &= \left|0-2\right| \\ &= 2 \end{aligned}$$

จากสมการมาตรฐานของพาราโบลา

$$\begin{aligned} x^2 &= 4cy \\ &= 4(2)y \\ &= 8y \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการพาราโบลา ที่มีจุดยอดที่จุดกำเนิด และมีจุดโฟกัสที่จุด $(0,2)$ คือ $x^2 = 8y$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.2.1 ดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 กราฟพาราโบลา $x^2 = 8y$

ตัวอย่าง 3.2.2 กำหนดสมการพาราโบลา $y^2 - 8x - 2y + 17 = 0$ จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการเส้นไดเรกตริกซ์ ความยาวลาตัสเรกตัม และจุดปลายของเส้นลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ จัดสมการ $y^2 - 8x - 2y + 17 = 0$ ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน

$$y^2 - 8x - 2y + 17 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = 8x - 17 + 1$$

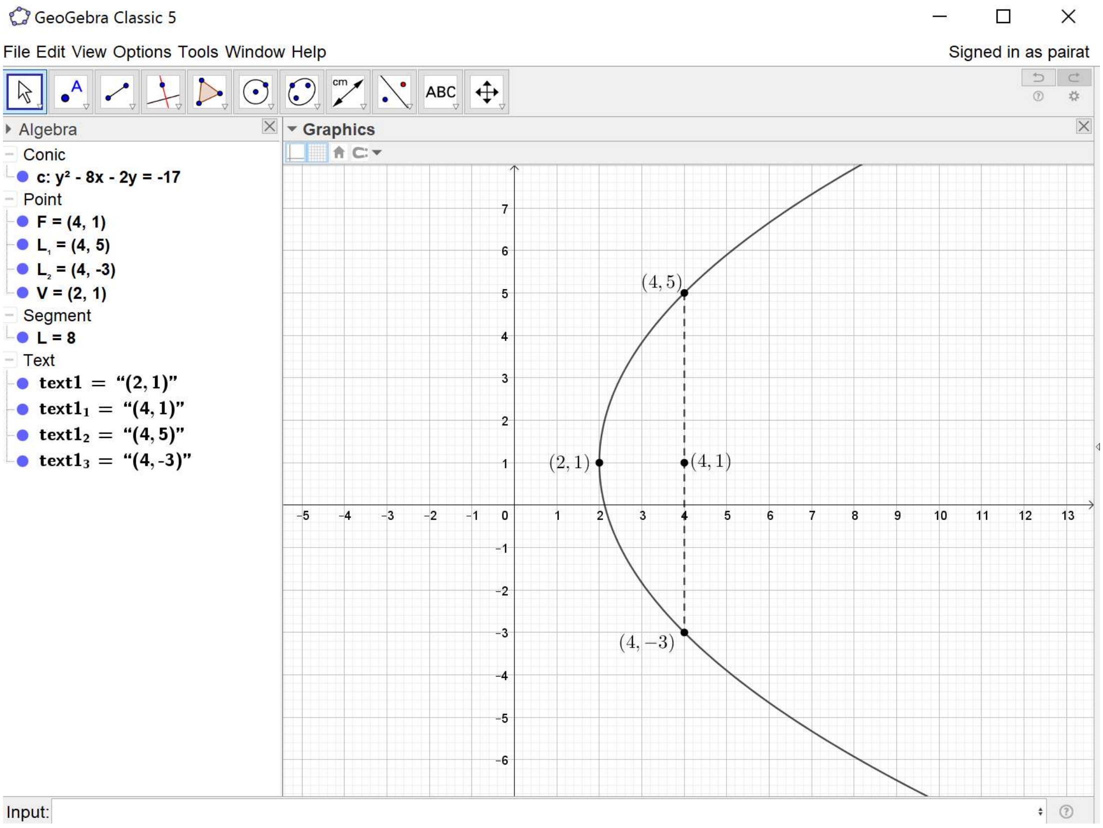
$$(y-1)^2 = 8(x-2)$$

$$(y-1)^2 = 4(2)(x-2)$$

ดังนั้น จะได้สมการรูปมาตรฐานของพาราลา คือ $(y-1)^2 = 4(2)(x-2)$

จุดยอด $(h,k) = (2,1)$ จุดโฟกัส $(h+c,k) = (4,1)$ สมการเส้นไดเรกตริกซ์ $x = 0$ ความยาวเลตัสเรกตัม $|4c| = 8$ และจุดปลายของเส้นลาตัสเรกตัม จากจุดโฟกัสลากขึ้นไป 4 หน่วยและลากลง 4 หน่วยดังนั้นจุดปลายของเลตัสเลกตัม คือ $(4,5),(4,-3)$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.2.2 ดังรูปที่ 3.18



รูปที่ 3.18 กราฟพาราโบลา $(y-1)^2 = 8(x-2)$

ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาสมการรูปทั่วไปของพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-2,3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(5,3)$ พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้ว่า แกนสมมาตรขนานกับแกน X โดย

$$\begin{aligned} c &= \left|5-(-2)\right| \\ &= 7 \end{aligned}$$

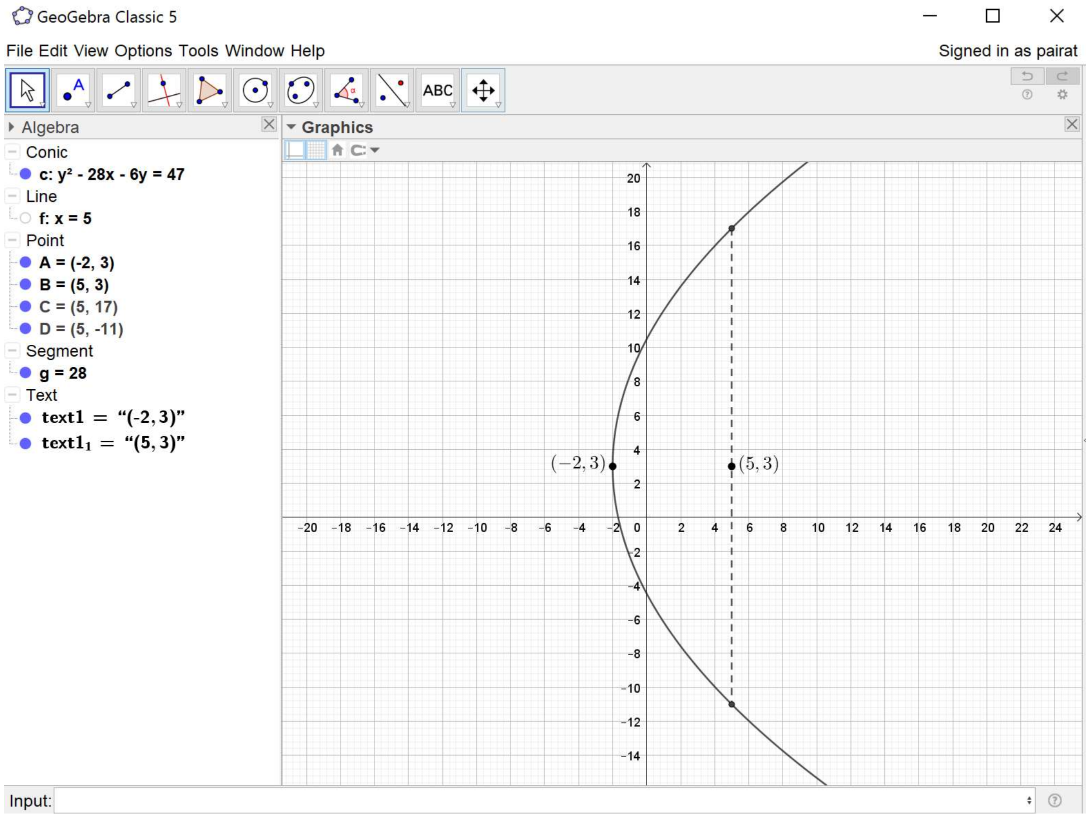
และสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-2,3)$, $c=7$ คือ

$$\begin{aligned} (y-3)^2 &= 4(7)(x-(-2)) \\ (y-3)^2 &= 28(x+2) \\ y^2 - 28x - 6y - 47 &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการรูปทั่วไปของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(-2,3)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(5,3)$ คือ

$$y^2 - 28x - 6y - 47 = 0$$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.2.3 ดังรูปที่ 3.19



รูปที่ 3.19 กราฟพาราโบลา $y^2 - 28x - 6y - 47 = 0$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาระยะทางจากจุด $(3,-6)$ ซึ่งอยู่บนพาราโบลา $2x^2 + 3y = 0$ ไปถึงจุดโฟกัส พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ หาจุดโฟกัสของพาราโบลา โดยจัดรูปสมการพาราโบลาให้อยู่ในรูปมาตรฐาน ดังนี้

$$2x^2 + 3y = 0$$

$$x^2 = -\frac{3}{2}y$$

$$x^2 = -4\left(\frac{3}{8}\right)y$$

จากสมการพาราโบลา มีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำ จุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$

จุดโฟกัสอยู่ด้านล่างจุดยอดเป็นระยะทาง $\frac{3}{8}$ หน่วย ดังนั้นจะได้

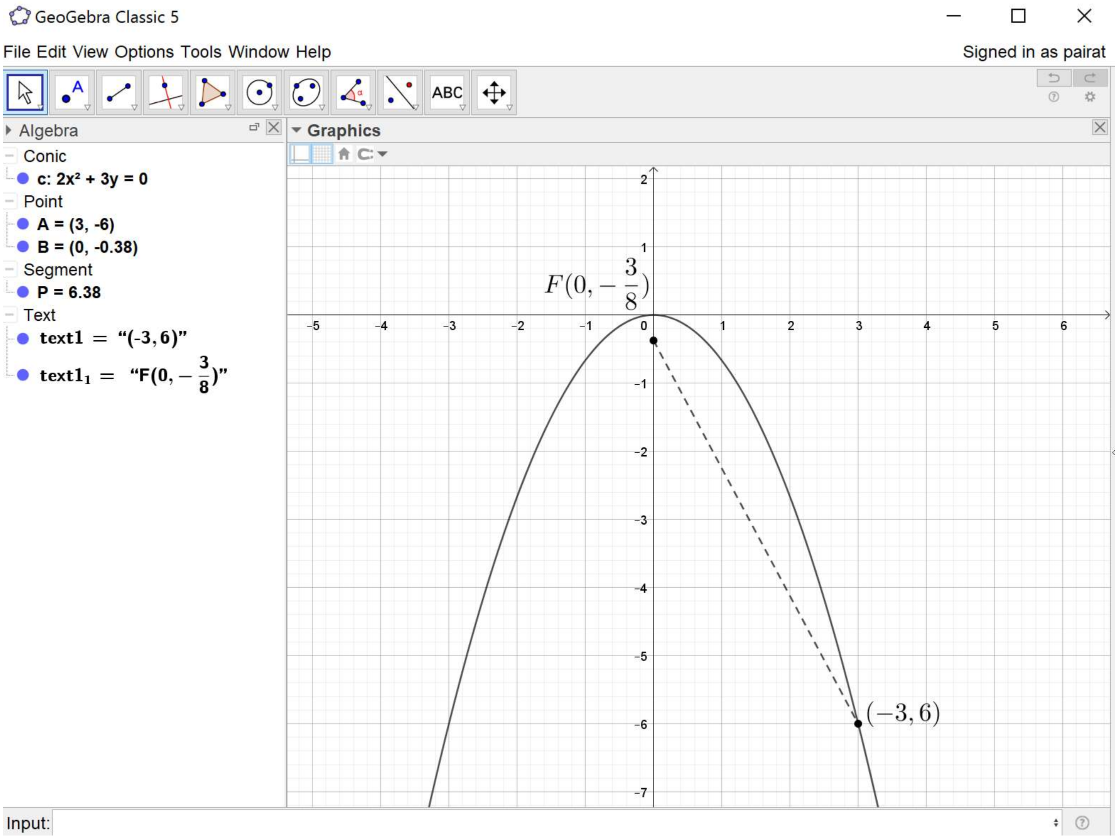
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $\left(0,-\frac{3}{8}\right)$

ให้ P เป็นระยะทางจากจุด $(3,-6)$ กับจุดโฟกัส จะได้

$$
\begin{aligned}
P &= \sqrt{(0-3)^2+\left(-\frac{3}{8}-(-6)\right)^2} \\
&= \sqrt{(-3)^2+\left(\frac{-3+48}{8}\right)^2} \\
&= \sqrt{9+\left(\frac{45}{8}\right)^2} \\
&= \sqrt{9+\frac{2025}{64}} \\
&= \sqrt{\frac{576}{64}+\frac{2025}{64}} \\
&= \sqrt{\frac{576+2025}{64}} \\
&= \sqrt{\frac{2601}{64}} \\
&= \frac{51}{8}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ระยะทางจากจุด $(3,-6)$ กับจุดโฟกัส คือ $\frac{51}{8}$ หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.2.4 ดังรูปที่ 3.20



รูปที่ 3.20 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 3.2.4

ตัวอย่าง 3.2.5 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,6)$ และจุดโฟกัสของพาราโบลาที่มีสมการ $y^2-4x-4y=8$ พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ

วิธีทำ หาจุดโฟกัสของสมการพาราโบลา จาก

$$\begin{aligned} y^2-4x-4y &= 8 \\ y^2-4y &= 4x+8 \\ y^2-4y+4 &= 4x+8+4 \\ (y-2)^2 &= 4(x+3) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $h=-3,\ k=2$ และ $c=1$

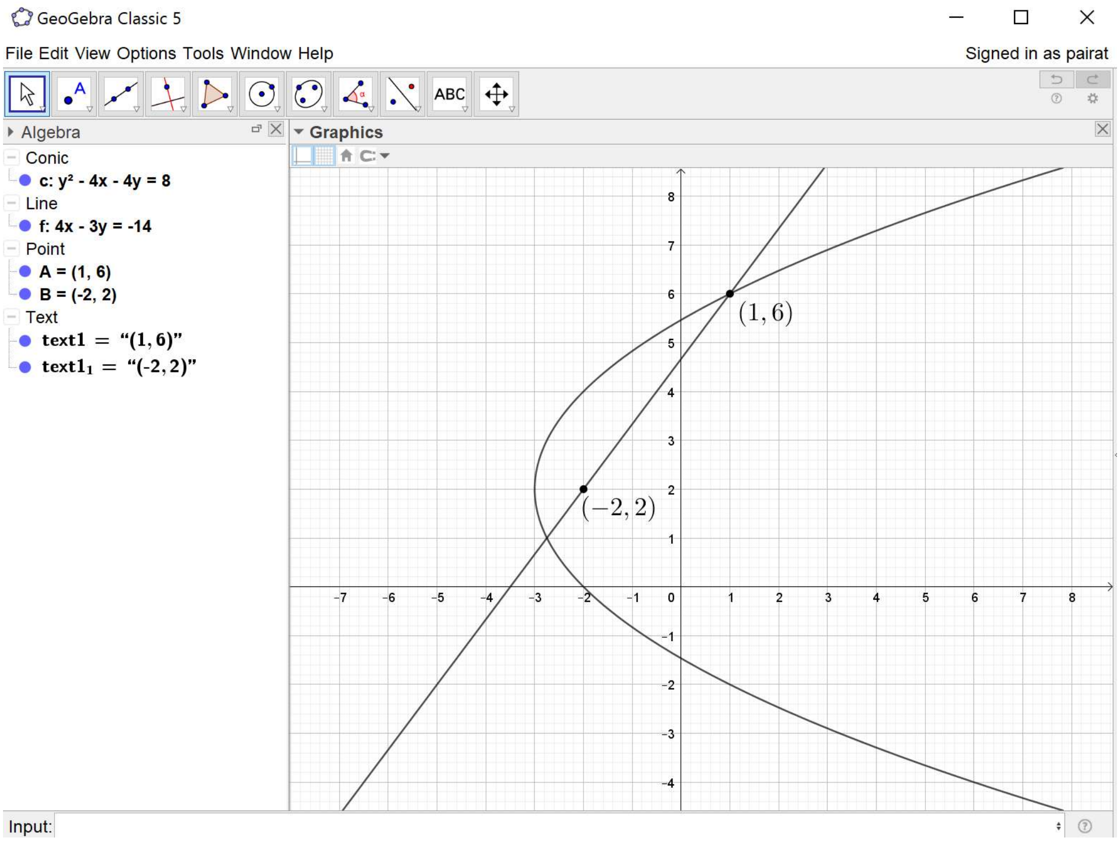
จะได้จุดโฟกัสคือจุด $(-2,2)$

สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,6)$ และจุด $(-2,2)$ คือ

$$
\begin{aligned}
(y-6) &= \frac{2-6}{-2-1}(x-1) \\
(y-6) &= \frac{-4}{-3}(x-1) \\
-3(y-6) &= -4(x-1) \\
-3y+18 &= -4x+4 \\
4x-3y+14 &= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1,6)$ และจุดโฟกัสของพาราโบลานี้ คือ $4x-3y+14=0$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.2.5 ดังรูปที่ 3.21



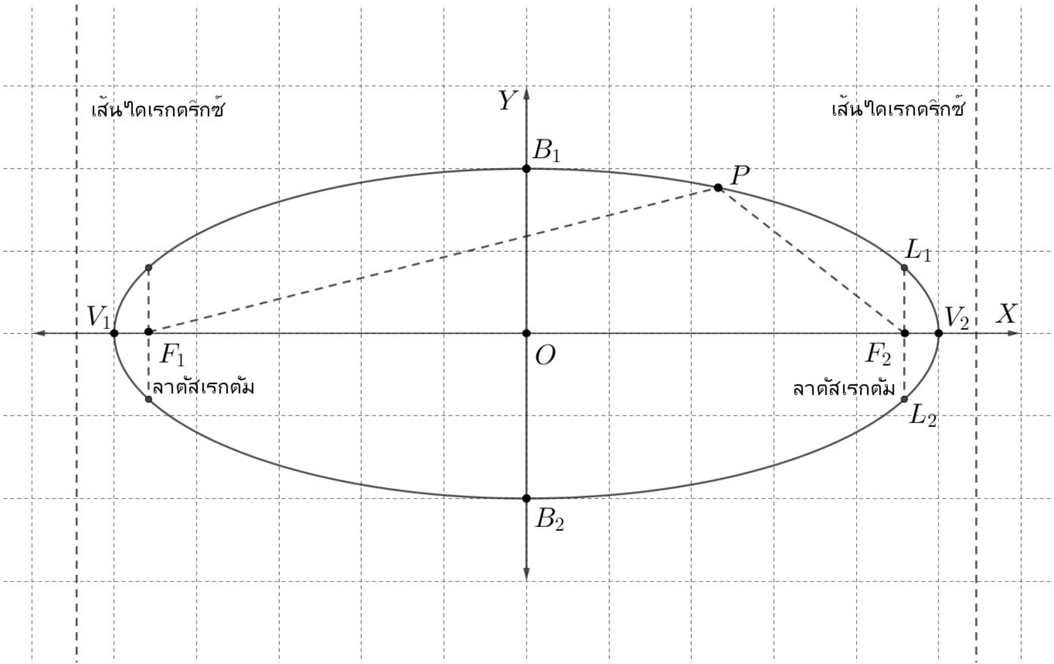
รูปที่ 3.21 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 3.2.5

3.3 วงรี (Ellipse)

บทนิยาม 3.3.1 วงรี หมายถึง เซตของจุดทุกจุดบนระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงตัวเสมอ

- ระยะ $OV_1 = OV_2 = a$ คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดยอด
- ระยะ $OF_1 = OF_2 = c$ คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงโฟกัส
- ระยะ $V_1V_2 = 2a$ คือ ความยาวของแกนเอก
- ระยะ $B_1B_2 = 2b$ คือ ความยาวของแกนโท
- ระยะ $OB_1 = OB_2 = b$ คือ ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุด B_1 และจุด B_2
- a คือ ระยะครึ่งแกนเอก จะได้ว่า $\left|PF_1\right| + \left|PF_2\right| = 2a$ ทุก ๆ จุด P บนวงรี
- ความยาวเลตัสเรกตัม เท่ากับ $\left|L_1L_2\right|$
- ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ $\dfrac{c}{a}$

(Protter, Murray H. & Morrer, Charles B. Jr., 1975 : 120)



รูปที่ 3.22 กราฟแสดงส่วนประกอบของวงรี

3.3.1 สมการวงรีที่จุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$

Murdoch, D. C. (1967 : 119-122) ได้กล่าวว่า การหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(-c,0)$ และจุด $F_2(c,0)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(-a,0)$ และจุด $V_2(a,0)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี ดังรูปที่ 3.23 จากบทนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|PF_1\right| + \left|PF_2\right| &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
(x+c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 \\
x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
x^2 + 2cx + c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 \\
4cx - 4a^2 &= -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
a - \frac{cx}{a} &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\left(a - \frac{cx}{a}\right)^2 &= (x-c)^2 + y^2 \\
a^2 - 2cx + \frac{c^2x^2}{a^2} &= x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\
a^2 - c^2 &= x^2 - \frac{c^2x^2}{a^2} + y^2 \\
a^2 - c^2 &= \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 \\
1 &= \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} &= 1
\end{aligned}$$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{...(1)}$$

โดยที่ $a > b$

- ถ้าให้ $y = 0$ แทนลงในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1$$
$$x^2 = a^2$$
$$x = \pm a$$

แสดงว่าวงรีตัดแกน X ที่จุด $(a,0)$ และ $(-a,0)$ ซึ่งเป็นจุดยอดของวงรี และจะได้ความยาวของแกนเอกเท่ากับ $2a$

- ถ้าให้ $x = 0$ แทนลงในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$y^2 = b^2$$
$$y = \pm b$$

แสดงว่าวงรีตัดแกน Y ที่จุด $(0,b)$ และ $(0,-b)$ จะได้ความยาวของแกนโทเท่ากับ $2b$

- จากรูปที่ 3.23 ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\left|L_1L_2\right|$

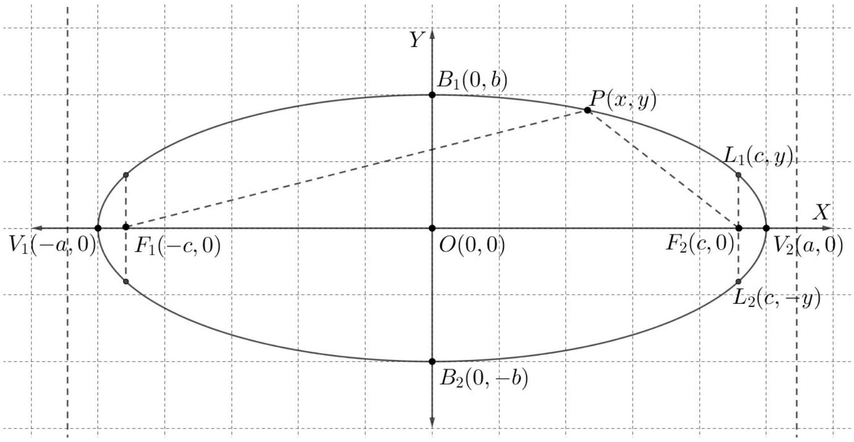
จาก $L_1(c,y)$ อยู่บนวงรี แทน x ด้วย c ลงในสมการที่ (1) จะได้

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$
$$y^2 = \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)b^2$$
$$y^2 = \frac{b^4}{a^2}$$
$$y = \pm\frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ จะได้พิกัดจุด $L_1\left(c,\frac{b^2}{a}\right)$ และ $L_2\left(c,-\frac{b^2}{a}\right)$ นั่นคือ

$$\left|L_1L_2\right| = \sqrt{(c-c)^2 + \left(\frac{b^2}{a} - \left(-\frac{b^2}{a}\right)\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2} = \frac{2b^2}{a}$$

ดังนั้น ความยาวเลตัสเรกตัม $\left|L_1L_2\right| = \frac{2b^2}{a}$



รูปที่ 3.23 กราฟวงรี $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ โดยที่ $a>b$

การหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(0,c)$ และจุด $F_2(0,-c)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(0,b)$ และจุด $V_2(0,-b)$ ให้ $P(x,\,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี ดังรูปที่ 3.24 จากบทนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|PF_1\right|+\left|PF_2\right| &= 2a\\
\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}+\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2} &= 2a\\
\sqrt{x^2+(y-c)^2} &= 2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2}\\
x^2+(y-c)^2 &= \left(2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)^2\\
x^2+y^2-2cy+c^2 &= 4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+(y+c)^2\\
y^2-2cy+c^2 &= 4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+y^2+2cy+c^2\\
-4cy-4a^2 &= -4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\\
a+\frac{cy}{a} &= \sqrt{x^2+(y+c)^2}\\
\left(a+\frac{cy}{a}\right)^2 &= x^2+(y+c)^2\\
a^2+2cy+\frac{c^2y^2}{a^2} &= x^2+y^2+2cy+c^2\\
a^2-c^2 &= x^2+y^2-\frac{c^2y^2}{a^2}
\end{aligned}$$

$$a^2 - c^2 = x^2 + \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)y^2$$
$$1 = \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{a^2}$$
$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

โดยที่ $a > b$

- ถ้าให้ $y = 0$ แทนลงในสมการที่ (2) จะได้

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{0^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{b^2} = 1$$
$$x^2 = b^2$$
$$x = \pm b$$

แสดงว่าวงรีตัดแกน X ที่จุด $(b,0)$ และ $(-b,0)$ จะได้ความยาวของแกนโทเท่ากับ $2b$

- ถ้าให้ $x = 0$ แทนลงในสมการที่ (2) จะได้

$$\frac{0^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{y^2}{a^2} = 1$$
$$y^2 = a^2$$
$$y = \pm a$$

แสดงว่าวงรีตัดแกน Y ที่จุด $(0,a)$ และ $(0,-a)$ ซึ่งเป็นจุดยอดของวงรี จะได้ความยาวของแกนเอกเท่ากับ $2a$

- จากรูปที่ 3.24 ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\left|L_1L_2\right|$

จาก $L_1(-x,c)$ อยู่บนวงรี แทน y ด้วย c ลงในสมการที่ (2) จะได้

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{x^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$x^2 = \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)b^2$$

$$x^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

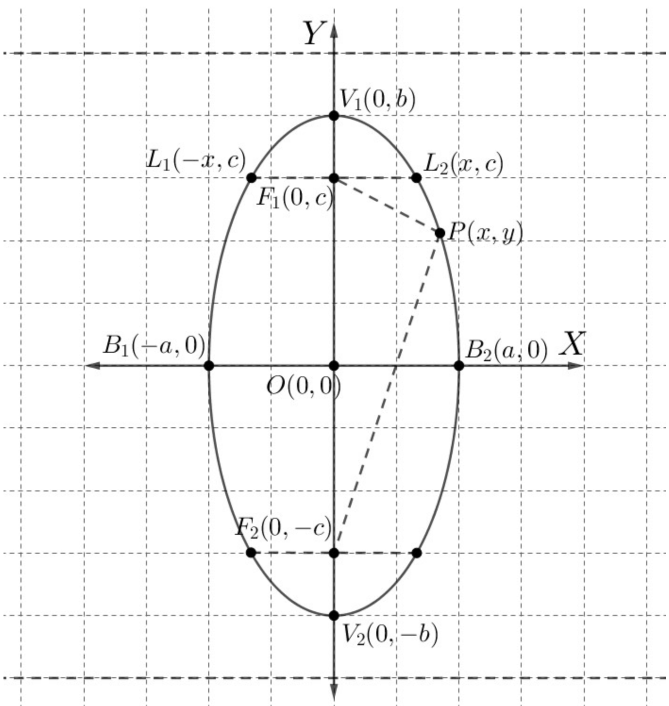
$$x = \pm\frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ จะได้พิกัดจุด $L_1\left(-\frac{b^2}{a}, c\right)$ และ $L_2\left(\frac{b^2}{a}, c\right)$ นั่นคือ

$$\left|L_1L_2\right| = \sqrt{\left(\frac{b^2}{a} - \left(-\frac{b^2}{a}\right)\right)^2 + (c-c)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2} = \frac{2b^2}{a}$$

ดังนั้น ความยาวเลตัสเรกตัม $\left|L_1L_2\right| = \frac{2b^2}{a}$



รูปที่ 3.24 กราฟวงรี $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ โดยที่ $a > b$

3.3.2 สมการวงรีที่จุดศูนย์กลางที่จุด (h,k)

เลิศ สิทธิโกศล (2542 : 36-38) ได้กล่าวว่า การหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(h-c,k)$ และจุด $F_2(h+c,k)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(h-a,k)$ และจุด $V_2(h+a,k)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี ดังรูปที่ 3.25 จากบทนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|PF_1\right| + \left|PF_2\right| &= 2a \\
\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} + \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} &= 2a - \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \\
(x-(h-c))^2+(y-k)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right)^2 \\
x^2-2(h-c)x+(h-c)^2+(y-k)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \\
&\quad + (x-(h+c))^2+(y-k)^2 \\
&= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \\
&\quad + x^2-2(h+c)x+(h+c)^2+(y-k)^2 \\
-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \\
&\quad - 2hx-2cx+h^2+2hc+c^2 \\
2cx-2hc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} - 2cx + 2hc \\
4cx-4hc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \\
-4a^2+4c(x-h) &= -4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \\
a - \frac{c(x-h)}{a} &= \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} \\
\left(a - \frac{c(x-h)}{a}\right)^2 &= (x-(h+c))^2+(y-k)^2 \\
a^2-2c(x-h)+\frac{c^2}{a^2}(x-h)^2 &= x^2-2(h+c)x+(h+c)^2+(y-k)^2 \\
a^2-2cx+2ch+\frac{c^2}{a^2}(x-h)^2 &= x^2-2hx-2cx+h^2+2ch+c^2+(y-k)^2 \\
a^2+\frac{c^2}{a^2}(x-h)^2 &= x^2-2hx+h^2+c^2+(y-k)^2 \\
a^2-c^2 &= (x-h)^2 - \frac{c^2}{a^2}(x-h)^2 + (y-k)^2 \\
a^2-c^2 &= \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)(x-h)^2 + (y-k)^2
\end{aligned}
$$

$$a^2-c^2=\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)(x-h)^2+(y-k)^2$$
$$\frac{a^2-c^2}{a^2-c^2}=\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)\frac{(x-h)^2}{a^2-c^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2-c^2}$$
$$1=\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2-c^2}$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2-c^2}=1$$

จาก $b^2=a^2-c^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \quad \text{..(3)}$$

โดยที่ $a>b$

- ถ้าให้ $y=k$ แทนลงในสมการที่ (3) จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(k-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{0^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$$
$$(x-h)^2=a^2$$
$$x-h=\pm a$$
$$x=h\pm a$$

แสดงว่าวงรีผ่านจุด $(h+a,k)$ และ $(h-a,k)$ ซึ่งเป็นจุดยอดของวงรี และจะได้ความยาวของแกนเอกเท่ากับ $2a$

- ถ้าให้ $x=h$ แทนลงในสมการที่ (3) จะได้

$$\frac{(h-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{0^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$
$$(y-k)^2=b^2$$
$$y-k=\pm b$$
$$y=k\pm b$$

แสดงว่าวงรีผ่านจุด $(h,k+b)$ และ $(h,k-b)$ จะได้ความยาวของแกนโทเท่ากับ $2b$

- จากรูปที่ 3.25 ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\left|L_1L_2\right|$

จาก $L_1(h+c,y)$ อยู่บนวงรี แทน x ด้วย $h+c$ ลงในสมการที่ (3) จะได้

$$\frac{c^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{(y-k)^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}$$

$$(y-k)^2=\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)b^2$$

$$(y-k)^2=\frac{b^4}{a^2}$$

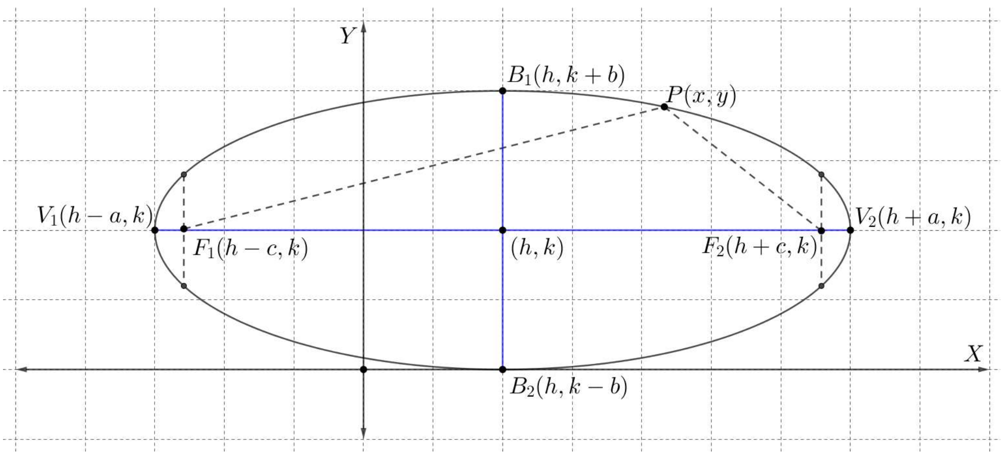
$$y=k\pm\frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ จะได้พิกัดจุด $L_1\left(h+c,k+\dfrac{b^2}{a}\right)$ และ $L_2\left(h+c,k-\dfrac{b^2}{a}\right)$ นั่นคือ

$$\left|L_1L_2\right|=\sqrt{((h+c)-(h+c))^2+\left(\left(k+\frac{b^2}{a}\right)-\left(k-\frac{b^2}{a}\right)\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2}=\frac{2b^2}{a}$$

ดังนั้น ความยาวเลตัสเรกตัม $\left|L_1L_2\right|=\dfrac{2b^2}{a}$



รูปที่ 3.25 กราฟวงรี $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$ โดยที่ $a>b$

การหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(h,k+c)$ และจุด $F_2(h,k-c)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(h,k+a)$ และจุด $V_2(h,k-a)$ ให้ $P(x,\ y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรี ดังรูปที่ 3.26 จากบทนิยาม 3.3.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|PF_1\right| + \left|PF_2\right| &= 2a \\
\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} + \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} &= 2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
(x-h)^2 + (y-(k-c))^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}\right)^2 \\
(x-h)^2 + y^2 - 2(k-c)y + (k-c)^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
&\quad + (x-h)^2 + (y-(k+c))^2 \\
&= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
&\quad + (x-h)^2 + y^2 - 2(k+c)y + (k+c)^2 \\
2cy - 2kc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} - 2cy + 2kc \\
4cy - 4kc &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
-4a^2 + 4cy - 4kc &= -4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
a - \frac{c(y-k)}{a} &= \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
\left(a - \frac{c(y-k)}{a}\right)^2 &= (x-h)^2 + (y-(k+c))^2 \\
&\quad - 2ky + 2cy + k^2 - 2kc + c^2 \\
&= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
&\quad - 2ky - 2cy + k^2 + 2kc + c^2 \\
a^2 - 2c(y-k) + \frac{c^2}{a^2}(y-k)^2 &= (x-h)^2 + y^2 - 2(k+c)y + (k+c)^2 \\
a^2 - 2cy + 2ck + \frac{c^2}{a^2}(y-k)^2 &= (x-h)^2 + y^2 - 2ky - 2cy + k^2 + 2ck + c^2 \\
a^2 + \frac{c^2}{a^2}(y-k)^2 &= (x-h)^2 + y^2 - 2ky + k^2 + c^2 \\
a^2 - c^2 &= (x-h)^2 + (y-k)^2 - \frac{c^2}{a^2}(y-k)^2 \\
a^2 - c^2 &= (x-h)^2 + \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right)(y-k)^2
\end{aligned}
$$

$$a^2 - c^2 = (x-h)^2 + \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)(y-k)^2$$
$$a^2 - c^2 = (x-h)^2 + \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)(y-k)^2$$

จาก $b^2 = a^2 - c^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \text{...(4)}$$

โดยที่ $a > b$

- ถ้าให้ $y = k$ แทนลงในสมการที่ (4) จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{0^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$
$$(x-h)^2 = b^2$$
$$x - h = \pm b$$
$$x = h \pm b$$

แสดงว่าวงรีผ่านจุด $(h+b, k)$ และ $(h-b, k)$ และจะได้ความยาวของแกนโทเท่ากับ $2b$

- ถ้าให้ $x = h$ แทนลงในสมการที่ (4) จะได้

$$\frac{0^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$
$$(y-k)^2 = a^2$$
$$y - k = \pm a$$
$$y = k \pm a$$

แสดงว่าวงรีผ่านจุด $(h, k+a)$ และ $(h, k-a)$ ซึ่งเป็นจุดยอดของวงรี จะได้ความยาวของแกนเอกเท่ากับ $2a$

- จากรูปที่ 3.26 ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\left|L_1L_2\right|$

จาก $L_1(x, k+c)$ อยู่บนวงรี แทน y ด้วย $k+c$ ลงในสมการที่ (4) จะได้

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 - \frac{c^2}{a^2}$$

$$(x-h)^2 = \left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)b^2$$

$$(x-h)^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

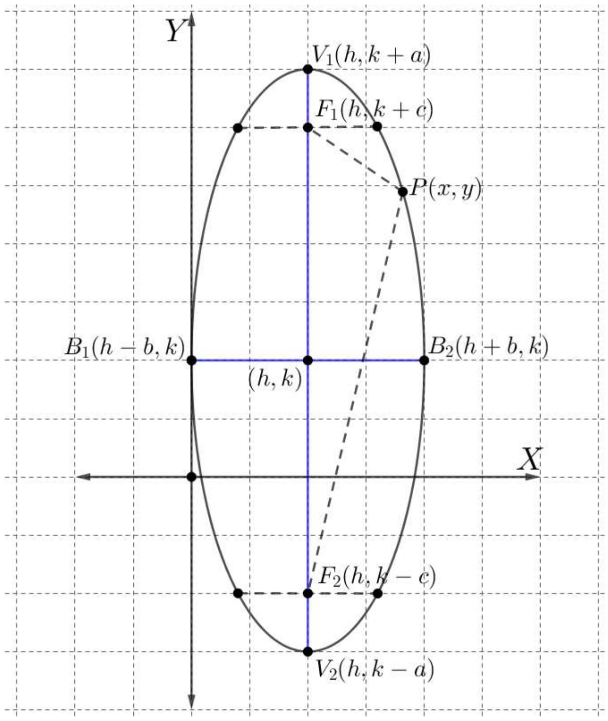
$$x = h \pm \frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ จะได้พิกัดจุด $L_1\left(h+\frac{b^2}{a}, k+c\right)$ และ $L_2\left(h-\frac{b^2}{a}, k+c\right)$ นั่นคือ

$$\left|L_1L_2\right| = \sqrt{\left(\left(h+\frac{b^2}{a}\right)-\left(h-\frac{b^2}{a}\right)\right)^2 + ((k+c)-(k+c))^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2} = \frac{2b^2}{a}$$

ดังนั้น ความยาวเลตัสเรกตัม $\left|L_1L_2\right| = \frac{2b^2}{a}$



รูปที่ 3.26 กราฟวงรี $\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$ โดยที่ $a>b$

หมายเหตุ

- $a > b$ และ $a > c$
- ตัวเลขใต้ตัวแปรใดมีค่ามาก แสดงว่า แกนนั้นเป็นแกนเอก
- $b^2 = a^2 - c^2$ หรือ $a^2 = b^2 + c^2$
- e คือ ความเยื้องศูนย์กลาง $e = \dfrac{c}{a} < 1$

3.3.3 สมการรูปทั่วไปของวงรี

จากสมการรูปมาตรฐานของวงรี จะได้ว่า

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$
$$\frac{a^2(x-h)^2}{a^2b^2} + \frac{b^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$
$$\frac{a^2(x-h)^2 + b^2(y-k)^2}{a^2b^2} = 1$$
$$a^2(x-h)^2 + b^2(y-k)^2 = a^2b^2$$
$$a^2(x^2 - 2hx + h^2) + b^2(y^2 - 2ky + k^2) = a^2b^2$$
$$a^2x^2 - 2a^2hx + a^2h^2 + b^2y^2 - 2b^2ky + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$
$$a^2x^2 + b^2y^2 - 2a^2hx - 2b^2ky + a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

โดยกำหนดให้

$A = a^2$

$B = b^2$

$C = -2a^2k$

$D = -2b^2h$

$E = a^2h^2 + b^2k^2 - a^2b^2$

ดังนั้น สมการรูปทั่วไป คือ $Ax^2 + Bx^2 + Cx + Dy + E = 0$

เมื่อ

- $A \neq B \neq 0$
- สัมประสิทธิ์หน้าตัวแปร x^2 และ y^2 ต้องไม่เท่ากัน
- $A > 0$ และ $B > 0$

(ศรีบุตร แววเจริญ และ ชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง, 2544 : 121)

ตัวอย่าง 3.3.1 จงหาสมการวงรีซึ่งมีจุดโฟกัสที่จุด $(0,\pm 4)$ และ จุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0,6)$

วิธีทำ จากจุดโฟกัสเราจะได้จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ และ $c=4$ แกน Y เป็นแกนเอก

จาก a คือ ระยะทางจากจุดยอดถึงจุดศูนย์กลาง เท่ากับ 6 จะได้

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 - c^2 \\ &= 6^2 - 4^2 = 20 \end{aligned}$$

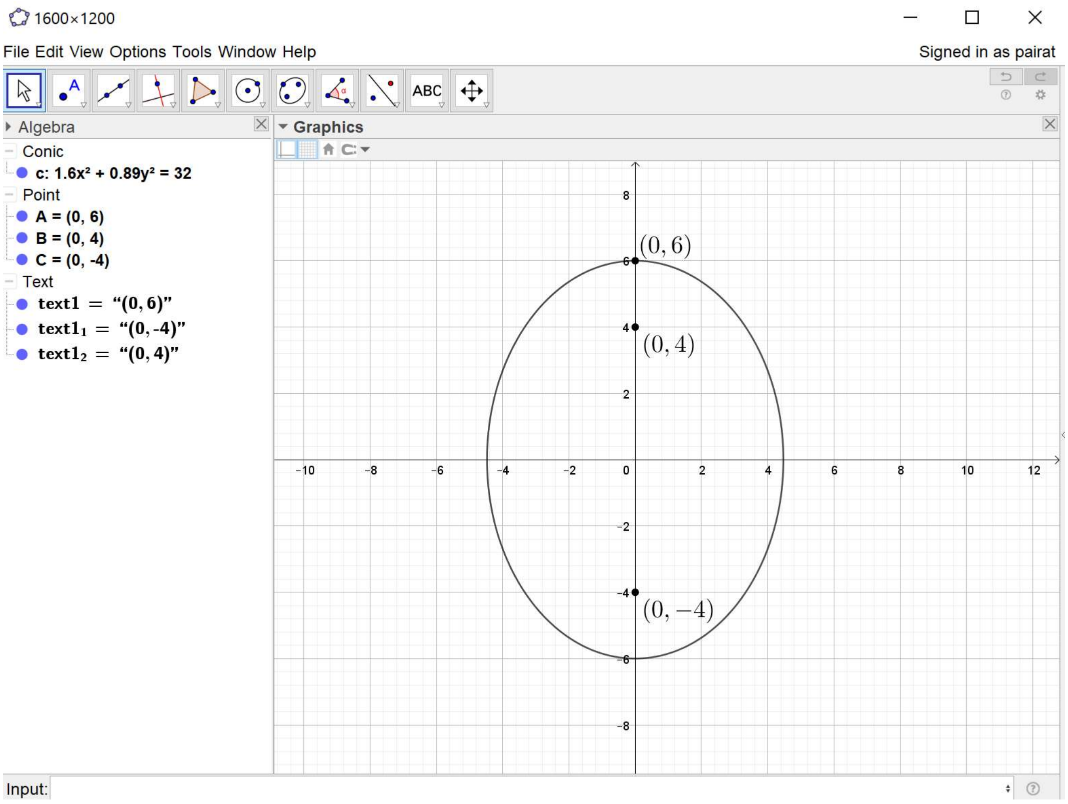
จากสมการรูปมาตรฐานของวงรี จะได้

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20} = 1$$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{x^2}{20} = 1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.3.1 ดังรูปที่ 3.27



รูปที่ 3.27 กราฟพาราโบลา $\dfrac{y^2}{36} + \dfrac{x^2}{20} = 1$

ตัวอย่าง 3.3.2 จากสมการวงรี $9x^2+4y^2-18x-16y-11=0$ จงหา

ก. จุดศูนย์กลาง ข. จุดยอด ค. จุดโฟกัส ง. ความยาวลาตัสเรกตัม

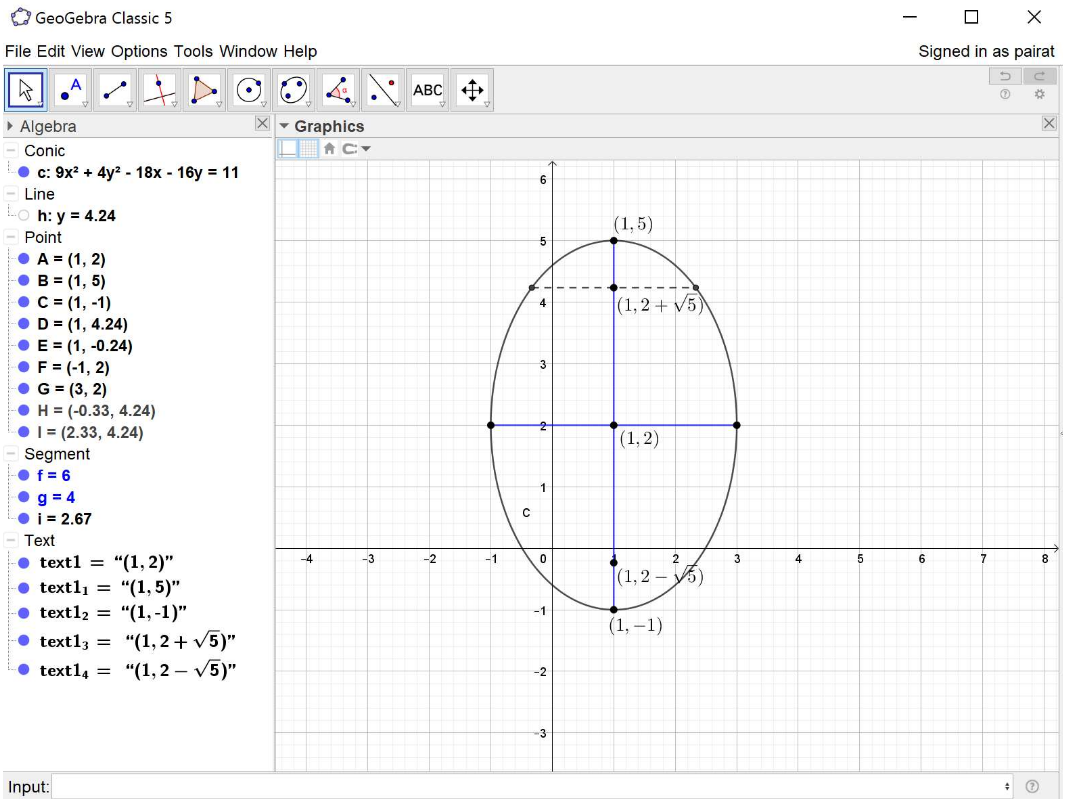
วิธีทำ จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$9x^2+4y^2-18x-16y-11=0$$
$$9(x^2-2x)+4(y^2-4y)=11$$
$$9(x^2-2x+1)+4(y^2-4y+4)=11+9+16$$
$$9(x-1)^2+4(y-2)^2=36$$
$$\frac{(x-1)^2}{2^2}+\frac{(y-2)^2}{3^2}=1$$

ดังนั้น ก. จุดศูนย์กลาง คือ $(1,2)$ ข. จุดยอด คือ $(1,5)$ และ $(1,-1)$

ค. จุดโฟกัส คือ $(1,2\pm\sqrt{5})$ ง. ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{8}{3}$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.3.2 ดังรูปที่ 3.28



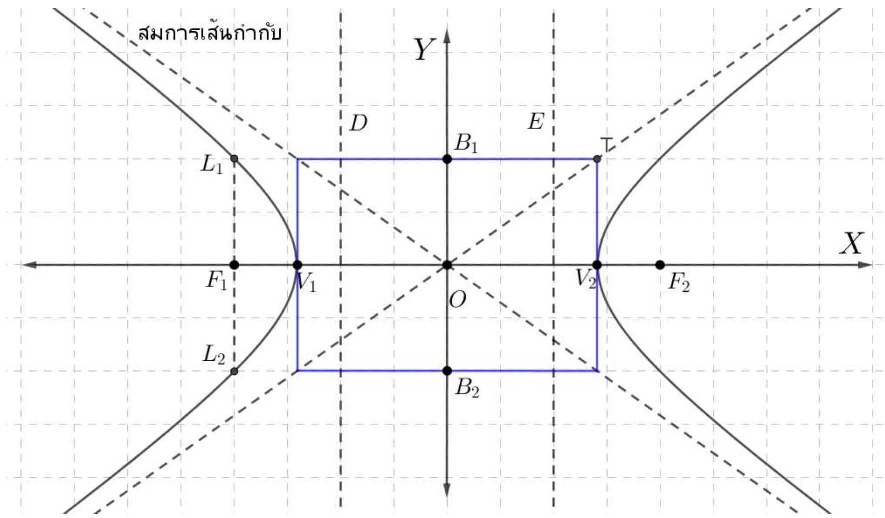
รูปที่ 3.28 กราฟวงรี $9x^2+4y^2-18x-16y-11=0$

3.4 ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)

บทนิยาม 3.4.1 ไฮเพอร์โบลา หมายถึงเซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลาไปยังจุดคงที่สองจุด จะมีค่าคงตัวเสมอ

- จุดคงที่สองจุดคือ จุดโฟกัส (F_1, F_2)
- ระยะ $OV_1 = OV_2 = a$ เท่ากับความยาวครึ่งแกนขวางคือระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึง จุดยอด
- ระยะ $OB_1 = OB_2 = b$ เท่ากับความยาวครึ่งแกนสังยุค
- ระยะ $OF_1 = OF_2 = c$ เท่ากับระยะโฟกัสคือระยะทางจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส
- ความยาวแกนขวางคือระยะทางระหว่างจุดยอดจุดหนึ่งถึงจุดยอดอีกจุดเท่ากับ $2a$
- ความยาวแกนสังยุคยาว $2b$
- เส้นกำกับคือเส้นสองเส้นที่บังคับความกว้างของไฮเพอร์โบลา
- เส้นตรง D และเส้นตรง E เรียกว่าเส้นไดเรกตริกซ์
- ค่าความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ $\frac{c}{a}$
- ส่วนของเส้นตรง L_1L_2 เรียกว่า เลตัสเรกตัม
- ถ้า $a = b$ เรียกไฮเพอร์โบลานี้ว่า "ไฮเพอร์โบลามุมฉาก"

(Larson, Ron & Edwards H. Bruce, 2011 : 703)



รูปที่ 3.29 ส่วนประกอบของกราฟไฮเพอร์โบลา

3.4.1 สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$

สุเทพ ลิ่มอรุณ (2542 : 31-34) ได้กล่าวว่า การหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(-c,0)$ และจุด $F_2(c,0)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(-a,0)$ และจุด $V_2(a,0)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา ดังรูปที่ 3.30 จากบทนิยาม 3.4.1 จะได้ว่า

$$\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$(x+c)^2+y^2 = \left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

$$x^2+2cx+c^2 = 4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2$$

$$4cx-4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\frac{cx}{a}-a = \sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

$$\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2 = (x-c)^2+y^2$$

$$\frac{c^2x^2}{a^2}-2cx+a^2 = x^2-2cx+c^2+y^2$$

$$a^2-c^2 = x^2-\frac{c^2x^2}{a^2}+y^2$$

$$a^2-c^2 = \left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)x^2+y^2$$

$$1 = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$$

จาก $c^2 = a^2+b^2$ หรือ $-b^2 = a^2-c^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{..}(5)$$

- ความยาวแกนขวางเท่ากับ $2a$ และความยาวแกนสังยุคเท่ากับ $2b$
- สมการเส้นกำกับผ่านจุด $(0,0),(-a,b)$ และจุด (a,b) จะได้ว่า

สมการเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{b}{a}x$

- ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\left|L_1L_2\right|$

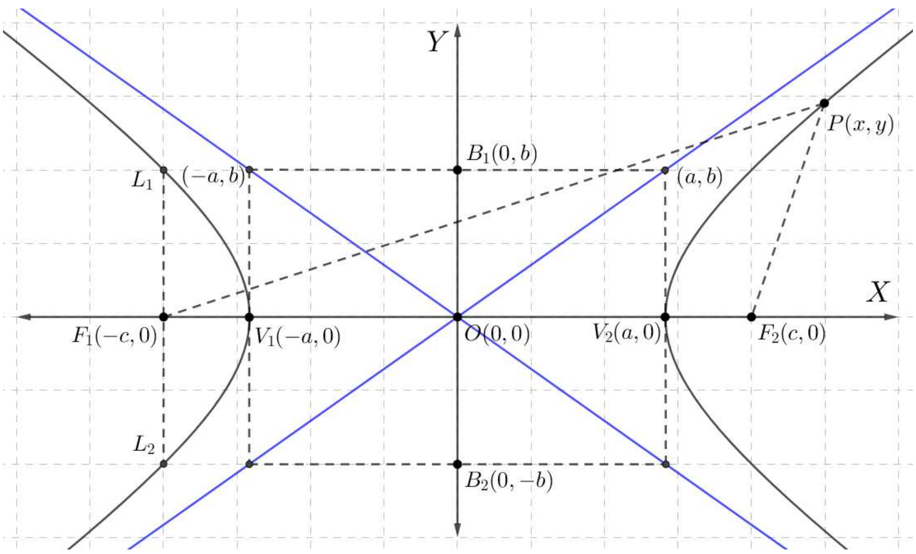
จาก $L_1(-c,y)$ อยู่บนไฮเพอร์โบลา แทน x ด้วย $-c$ ลงในสมการที่ (5) จะได้

$$\frac{(-c)^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$-\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}$$
$$-y^2=\frac{-b^4}{a^2}$$
$$y=\pm\frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ จะได้พิกัดจุด $L_1\left(-c,\frac{b^2}{a}\right)$ และ $L_2\left(-c,-\frac{b^2}{a}\right)$ นั่นคือ

$$\left|L_1L_2\right|=\sqrt{(-c-(-c))^2+\left(-\frac{b^2}{a}-\frac{b^2}{a}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2}=\frac{2b^2}{a}$$

ดังนั้น ความยาวเลตัสเรกตัม $\left|L_1L_2\right|=\frac{2b^2}{a}$



รูปที่ 3.30 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

การหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0,0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(0,c)$ และจุด $F_2(0,-c)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(0,a)$ และจุด $V_2(0,-a)$ ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา ดังรูปที่ 3.31 จากบทนิยาม 3.4.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| &= 2a \\
\sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2} - \sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2} &= 2a \\
\sqrt{x^2+(y-c)^2} &= 2a + \sqrt{x^2+(y+c)^2} \\
x^2+(y-c)^2 &= \left(2a+\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)^2 \\
x^2+y^2-2cy+c^2 &= 4a^2+4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+(y+c)^2 \\
y^2-2cy+c^2 &= 4a^2+4a\sqrt{x^2+(y-c)^2}+y^2+2cy+c^2 \\
-4cy-4a^2 &= 4a\sqrt{x^2+(y-c)^2} \\
-\frac{cy}{a}-a &= \sqrt{x^2+(y-c)^2} \\
\left(-\frac{cy}{a}-a\right)^2 &= x^2+(y-c)^2 \\
\frac{c^2y^2}{a^2}+2cy+a^2 &= x^2+y^2-2cy+c^2 \\
a^2-c^2 &= x^2+y^2+\frac{c^2x^2}{a^2} \\
a^2-c^2 &= x^2+\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)y^2 \\
1 &= \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2} \\
\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{a^2} &= 1
\end{aligned}$$

จาก $c^2 = a^2+b^2$ หรือ $-b^2 = a^2-c^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2} = 1 \quad \text{..(6)}$$

- ความยาวแกนขวางเท่ากับ $2a$ และความยาวแกนสังยุคเท่ากับ $2b$
- สมการเส้นกำกับผ่านจุด $(0,0),(-b,a)$ และจุด (b,a) จะได้ว่า

สมการเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{a}{b}x$

- ความยาวเลตัสเรกตัม คือ $\left|L_1L_2\right|$

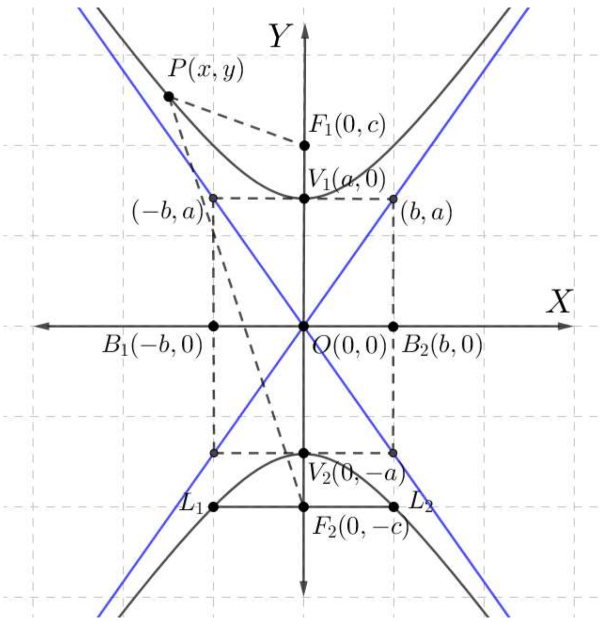
จาก $L_2(x,-c)$ อยู่บนไฮเพอร์โบลา แทน y ด้วย $-c$ ลงในสมการที่ (6) จะได้

$$\frac{(-c)^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$$
$$-\frac{x^2}{b^2}=1-\frac{c^2}{a^2}$$
$$-x^2=\frac{-b^4}{a^2}$$
$$x=\pm\frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ จะได้พิกัดจุด $L_1\left(-\frac{b^2}{a},-c\right)$ และ $L_2\left(\frac{b^2}{a},-c\right)$ นั่นคือ

$$\left|L_1L_2\right|=\sqrt{\left(\frac{b^2}{a}-\left(-\frac{b^2}{a}\right)\right)^2+(-c-(-c))^2}$$
$$=\sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2}=\frac{2b^2}{a}$$

ดังนั้น ความยาวเลตัสเรกตัม $\left|L_1L_2\right|=\frac{2b^2}{a}$



รูปที่ 3.31 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

3.4.2 สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h,k)

วรรณี ธรรมโชติ (2550 : 74-79) ได้กล่าวว่า การหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(h-c,k)$ และจุด $F_2(h+c,k)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(h-a,k)$ และจุด $V_2(h+a,k)$ ให้ $P(x,\, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา ดังรูปที่ 3.32 จากบทนิยาม 3.4.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| &= 2a \\
\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} - \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} &= 2a + \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \\
(x-(h+c))^2+(y-k)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \\
&\quad + (x-(h-c))^2+(y-k)^2 \\
x^2-2(h+c)x+(h+c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \\
&\quad + x^2-2(h-c)x+(h-c)^2 \\
-2hx-2cx+h^2+2hc+c^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \\
&\quad -2hx+2cx+h^2-2hc+c^2 \\
-2cx+2hc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \\
&\quad +2cx-2hc \\
-4a^2-4cx+4hc &= 4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \\
-4a^2-4c(x-h) &= 4a\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \\
-a-\frac{c(x-h)}{a} &= \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} \\
\left(-a-\frac{c(x-h)}{a}\right)^2 &= (x-(h-c))^2+(y-k)^2 \\
a^2+2c(x-h)+\frac{c^2}{a^2}(x-h)^2 &= x^2-2(h-c)x+(h-c)^2+(y-k)^2 \\
a^2+2cx-2ch+\frac{c^2}{a^2}(x-h)^2 &= x^2-2hx+2cx+h^2-2hc+c^2+(y-k)^2 \\
a^2-c^2 &= (x-h)^2-\frac{c^2}{a^2}(x-h)^2+(y-k)^2 \\
a^2-c^2 &= \left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)(x-h)^2+(y-k)^2 \\
a^2-c^2 &= \left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)(x-h)^2+(y-k)^2
\end{aligned}
$$

$$1 = \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2-c^2}$$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2-c^2} = 1$$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ หรือ $-b^2 = a^2 - c^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{...}(7)$$

- ความยาวแกนขวางเท่ากับ $2a$ และความยาวแกนสังยุคเท่ากับ $2b$
- สมการเส้นกำกับผ่านจุด $(h,k),(h-a,k+b)$ และจุด $(h+a,k+b)$ จะได้ว่า

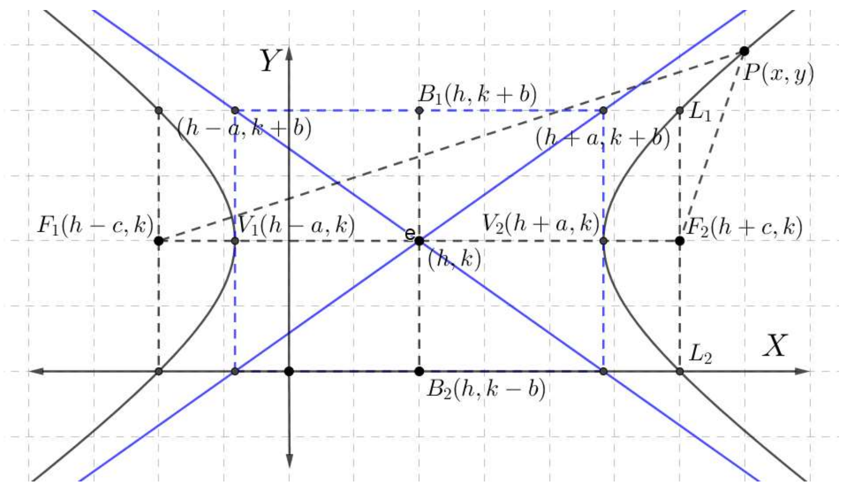
สมการเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{b}{a}(x-h)+k$

- พิกัดจุด $L_1\left(h+c, k+\frac{b^2}{a}\right)$ และ $L_2\left(h+c, k-\frac{b^2}{a}\right)$ จะได้ว่า

$$\left|L_1L_2\right| = \sqrt{((h+c)-(h+c))^2 + \left(\left(k-\frac{b^2}{a}\right)-\left(k+\frac{b^2}{a}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2} = \frac{2b^2}{a}$$

ดังนั้น ความยาวเลตัสเรกตัม $\left|L_1L_2\right| = \frac{2b^2}{a}$



รูปที่ 3.32 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

การหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h,k) จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F_1(h,k+c)$ และจุด $F_2(h,k-c)$ จุดยอดอยู่ที่จุด $V_1(h,k+a)$ และจุด $V_2(h,k-a)$ ให้ $P(x,\,y)$ เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา ดังรูปที่ 3.33 จากบทนิยาม 3.4.1 จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\left|PF_1\right| - \left|PF_2\right| &= 2a \\
\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2} - \sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2} &= 2a + \sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \\
(x-h)^2+(y-(k+c))^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \\
&\quad + (x-h)^2+(y-(k-c))^2 \\
y^2-2(k+c)y+(k+c)^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \\
&\quad + y^2-2(k-c)y+(k-c)^2 \\
-2ky-2cy+k^2+2kc+c^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \\
&\quad - 2ky+2cy+k^2-2kc+c^2 \\
-2cy+2kc &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \\
&\quad + 2cy-2kc \\
-4a^2-4cy+4kc &= 4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \\
-a-\frac{c(y-k)}{a} &= \sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2} \\
\left(-a-\frac{c(y-k)}{a}\right)^2 &= (x-h)^2+(y-(k-c))^2 \\
a^2+2c(y-k)+\frac{c^2}{a^2}(y-k)^2 &= (x-h)^2+y^2-2(k-c)y+(k-c)^2 \\
a^2+2cy-2ck+\frac{c^2}{a^2}(y-k)^2 &= (x-h)^2+y^2-2ky+2cy+k^2-2ck+c^2 \\
a^2-c^2 &= (x-h)^2+(y-k)^2-\frac{c^2}{a^2}(y-k)^2 \\
a^2-c^2 &= (x-h)^2+\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)(y-k)^2 \\
a^2-c^2 &= (x-h)^2+\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)(y-k)^2 \\
1 &= \frac{(x-h)^2}{a^2-c^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} \\
\frac{(x-h)^2}{a^2-c^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2} &= 1
\end{aligned}
$$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ หรือ $-b^2 = a^2 - c^2$ จึงได้ว่า

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad \text{..(8)}$$

- ความยาวแกนขวางเท่ากับ $2a$ และความยาวแกนสังยุคเท่ากับ $2b$
- สมการเส้นกำกับผ่านจุด $(h,k),(h-b,k+a)$ และจุด $(h+b,k+a)$ จะได้ว่า

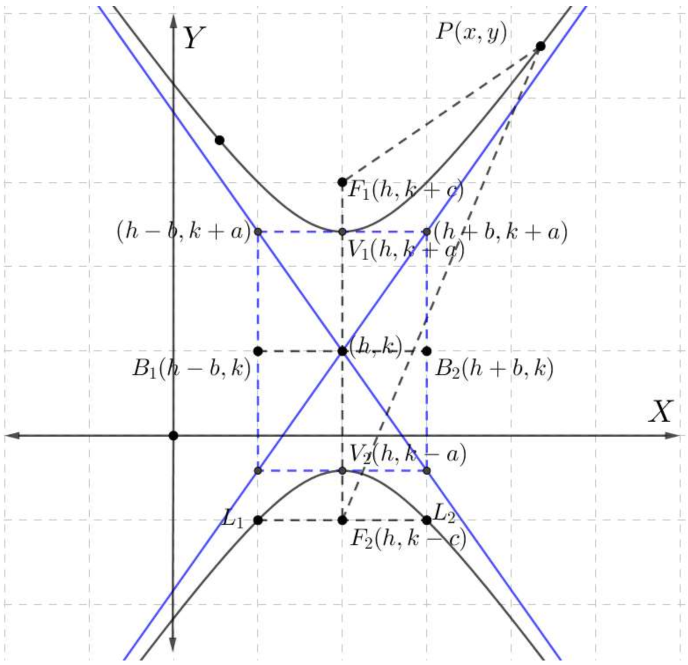
สมการเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{a}{b}(x-h)+k$

- พิกัดจุด $L_1\left(h-\frac{b^2}{a},k-c\right)$ และ $L_2\left(h+\frac{b^2}{a},k-c\right)$ จะได้ว่า

$$\left|L_1L_2\right| = \sqrt{\left(\left(h-\frac{b^2}{a}\right)-\left(h+\frac{b^2}{a}\right)\right)^2 + ((k-c)-(k-c))^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2b^2}{a}\right)^2} = \frac{2b^2}{a}$$

ดังนั้น ความยาวเลตัสเรกตัม $\left|L_1L_2\right| = \frac{2b^2}{a}$



รูปที่ 3.33 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

ตัวอย่าง 3.4.1 จากสมการไฮเพอร์โบลา $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$ จงหา

ก. จุดศูนย์กลาง ข. จุดยอด ค. จุดโฟกัส ง. สมการเส้นกำกับ จ. ความยาวลาตัสเรกตัม

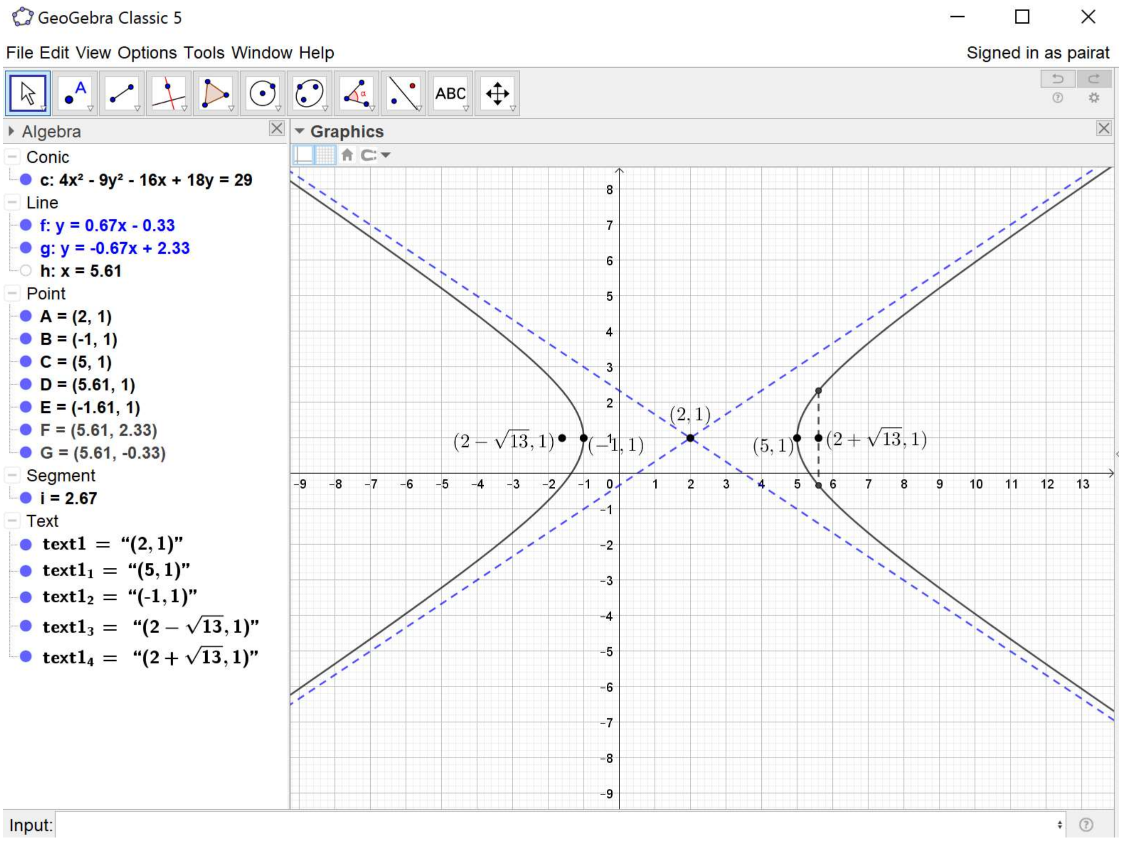
วิธีทำ จัดรูปสมการให้อยู่ในรูปมาตรฐาน จะได้

$$
\begin{aligned}
4x^2-9y^2-16x+18y-29&=0\\
4(x^2-4x)-9(y^2-2y)&=29\\
4(x^2-4x+4)-9(y^2-2y+1)&=29+16-9\\
\frac{(x-2)^2}{3^2}-\frac{(y-1)^2}{2^2}&=1
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ก. จุดศูนย์กลาง คือ $(2,1)$ ข. จุดยอด คือ $(2\pm 3,1)$ ค. จุดโฟกัส คือ $(2\pm\sqrt{13},1)$

ง. สมการเส้นกำกับ คือ $y=\pm\frac{2}{3}(x-2)+1$ จ. ความยาวเลตัสเรกตัมเท่ากับ $\frac{8}{3}$ หน่วย

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.4.1 ดังรูปที่ 3.34



รูปที่ 3.34 กราฟไฮเพอร์โบลา $4x^2-9y^2-16x+18y-29=0$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาซึ่งผ่านจุด $(5,-2)$ และมีเส้นกำกับเป็น $3x-4y-11=0$ กับ $3x+4y+5=0$

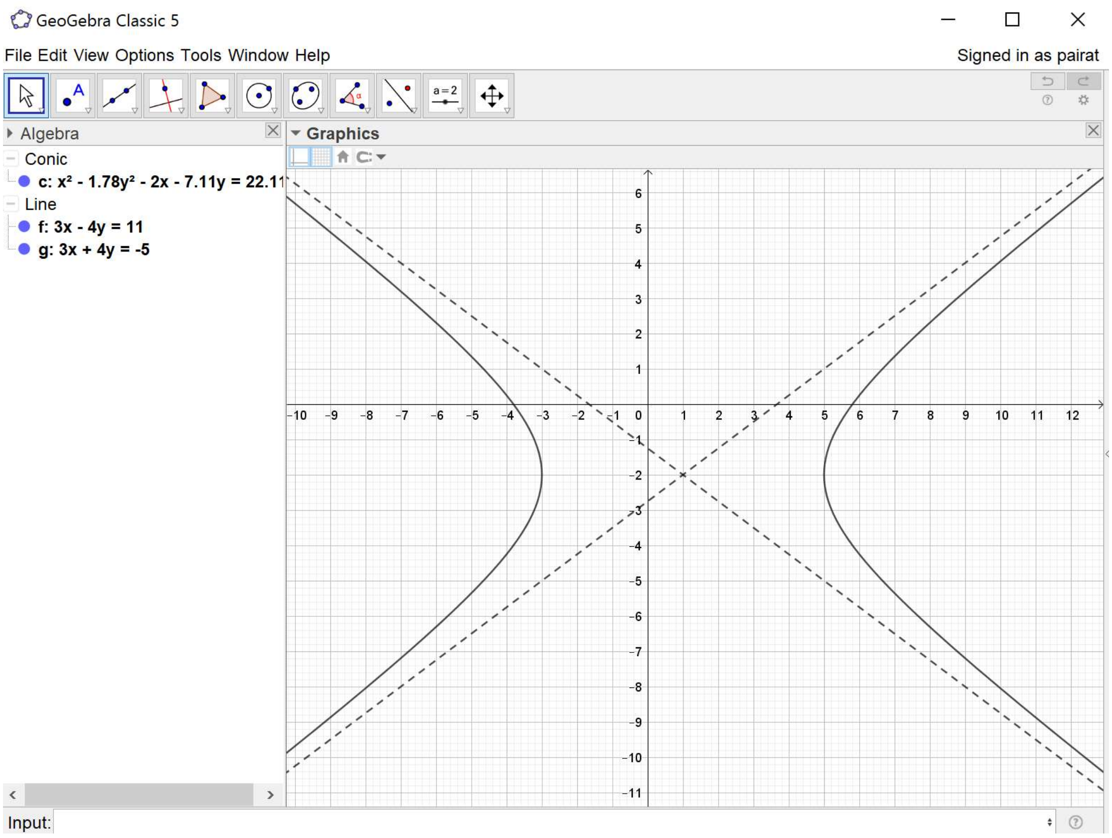
วิธีทำ จากสมการเส้นกำกับ จะได้ว่า

$$(3x-4y-11)(3x+4y+5)=0$$
$$9x^2-16y^2-18x-64y-55=0$$
$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=0$$

ให้สมการไฮเพอร์โบลารูปมาตรฐาน เป็น $\frac{(x-1)^2}{a^2}-\frac{(y+2)^2}{b^2}=1$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$

ใช้โปรแกรม Geogebra หาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 3.4.2 ดังรูปที่ 3.35

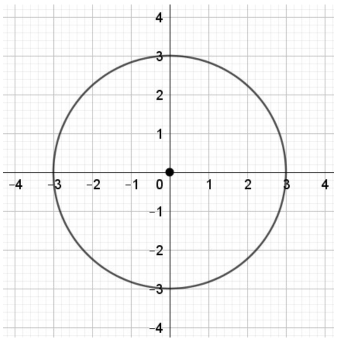


รูปที่ 3.35 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$

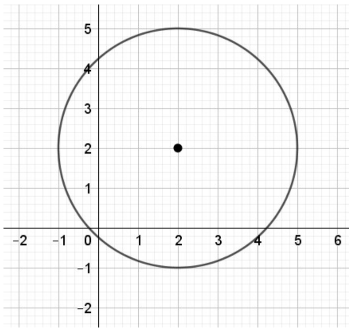
สรุปท้ายบทที่ 3

สำหรับในบทที่ 3 นั้นเราได้ศึกษาเรื่องของภาคตัดกรวย ซึ่งแบ่งออกเป็น 4 กราฟใหญ่ ๆ ได้แก่ วงกลม พาราโบลา วงรี และไฮเพอร์โบลาซึ่งมีสมการดังนี้

- **วงกลม (Circle)**

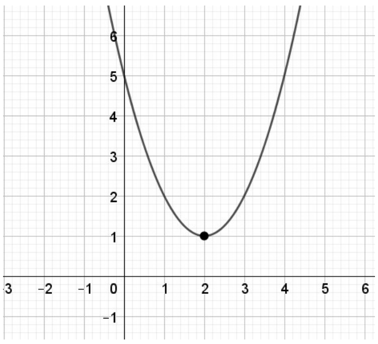


$x^2 + y^2 = r^2$

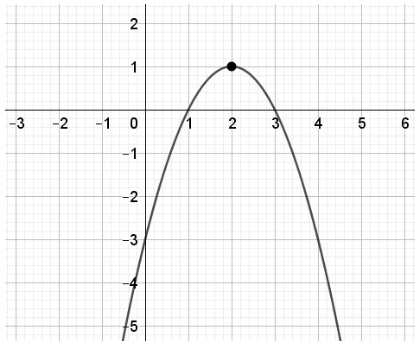


$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

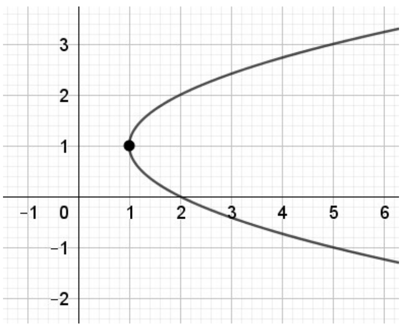
- **พาราโบลา (Parabola)**



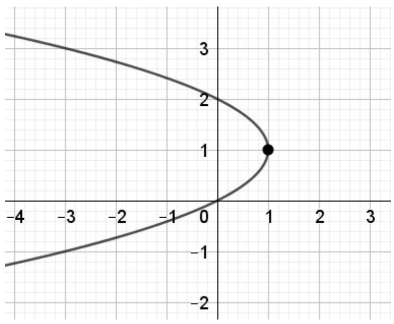
$(x-h)^2 = 4c(y-k)$



$(x-h)^2 = -4c(y-k)$

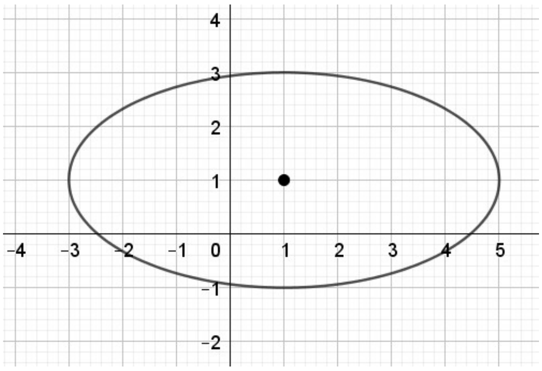


$(y-k)^2 = 4c(x-h)$

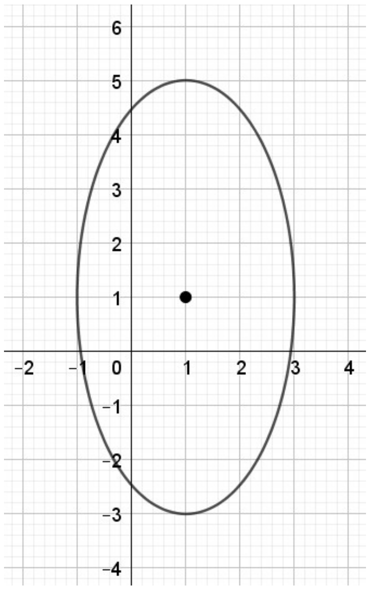


$(y-k)^2 = -4c(x-h)$

- **วงรี (Ellipse)**

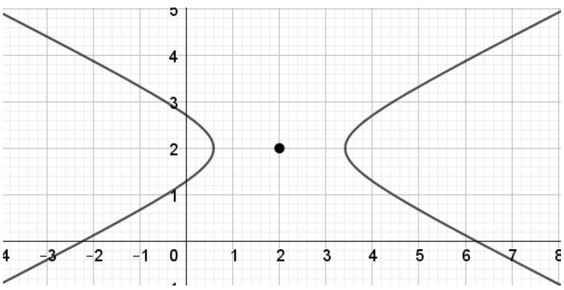


$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1\ ,\quad a>b$$

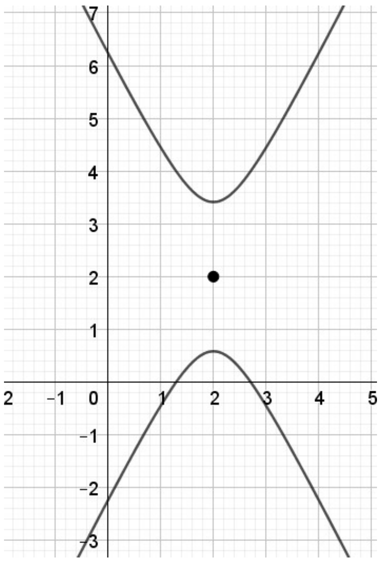


$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1\ ,\quad a>b$$

- **ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola)**



$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

แบบฝึกหัดบทที่ 3

จงหาสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 3.1-3.5)

3.1 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1,2)$ รัศมี 4 หน่วย

3.2 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1,-4)$ รัศมี 5 หน่วย

3.3 จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1,-3)$ และวงกลมผ่านจุด $(2,4)$

3.4 วงกลมสัมผัสแกน X และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1,2)$

3.5 เส้นผ่านจุดศูนย์กลางมีจุดปลายอยู่ที่จุด $(3,-2)$ และจุด $(0,-1)$

จงจัดรูปสมการวงกลมในข้อต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปมาตรฐาน พร้อมทั้งวาดกราฟประกอบ (ข้อ 3.6-3.10)

3.6 $x^2+y^2-10x-24y+25=0$

3.7 $x^2+y^2-3x-4y=0$

3.8 $3x^2+3y^2-6x+5y=0$

3.9 $5x^2+5y^2+10x-20y+15=0$

3.10 $-x^2-y^2+4x-2y+5=0$

จงหาสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 3.11-3.15)

3.11 วงกลมสัมผัสกับเส้นตรง $x+2y=3$ ที่จุด $(-1,2)$ และจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y

3.12 สมการวงกลมสัมผัสกับแกนพิกัดทั้งสอง และผ่านจุด $(6,3)$

3.13 สมการวงกลมผ่านจุด $(0,0),(0,5)$ และจุด $(3,3)$

3.14 จงหาค่า k ที่ทำให้ $x^2+y^2-6x+8y+k=0$ เป็นสมการวงกลม

3.15 วงกลมผ่านจุด $P(1,1)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $y=2x-3$ ที่จุด $Q(3,3)$

จงหาจุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม จุดปลายของลาตัสเรกตัมทั้งสองจุด และสมการไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา พร้อมทั้งเขียนกราฟประกอบ (ข้อ 3.16-3.20)

3.16 $x^2=-10y$

3.17 $x^2-8y=0$

3.18 $2y^2=-3x$

3.29 $x^2-10y+2x-20=0$

3.20 $2y^2+3x-12y=6$

จงหาสมการพาราโบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 3.21-3.24)

3.21 จุดยอดที่ $(1,2)$ จุดโฟกัสที่ $(-4,0)$

3.22 จุดยอดที่ $(-2,3)$ ไดเรกตริกซ์มีสมการเป็น $x+4=0$

3.23 จุดยอดที่ $(-3,1)$ เลตัสเรกตัมยาว 10 หน่วย เป็นพาราโบลาเปิดขวา

3.24) จุดโฟกัสอยู่บนแกน X และพาราโบลาผ่านจุด $(3,4)$

จากสมการพาราโบลา จงหาจุดยอด จุดโฟกัส จุดปลายของลาตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟประกอบ (ข้อ 3.25-3.30)

3.25 $y^2+8x+8=0$

3.26 $y^2-12x-48=0$

3.27 $x^2+4x+16y+4=0$

3.28 $y^2-4y+8x-28=0$

3.29 $x^2-8x-6y=8$

จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด ความยาวลาตัสเรกตัม สมการไดเรกตริกซ์ของสมการวงรีที่กำหนดให้ต่อไปนี้ (ข้อ 3.30-3.33)

3.30 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

3.31 $\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{4}=1$

3.32 $x^2+4y^2=4$

3.33 $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y+2)^2}{9}=1$

จากสมการที่กำหนดให้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด ความยาวลาตัสเรกตัม และสมการไดเรกตริกซ์ (ข้อ 3.34-3.35)

3.34 $x^2+4y^2+6x+16y=21$

3.35 $25(x+1)^2+169(y-2)^2=4225$

3.36 $169(x-1)^2+144(y-3)^2=24,336$

3.37 $-x^2-4y^2+2x-16y=3$

3.38 $-5x^2-7y^2-10x+14y=35$

จงหาสมการวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 3.38-3.41)

3.38 จุดยอดที่ $(6,3)$ จุดโฟกัสที่ $(-4,3),(4,3)$

3.39 จุดยอดที่ $(-1,3),(5,3)$ แกนโทยาว 4 หน่วย

3.40 จุดโฟกัสที่ $(\pm 4,2)$ แกนเอกยาว 10 หน่วย

3.41 จุดโฟกัสที่ $(0,\pm 8)$ แกนเอกยาว 34 หน่วย

จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวลาตัสเรกตัม สมการเส้นกำกับ พร้อมทั้งเขียนกราฟไฮเพอร์โบลา (ข้อ 3.42-3.43)

3.42 $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{4}=1$ 3.43 $\frac{(x-3)^2}{16}-\frac{(y-3)^2}{5}=1$

จากสมการที่กำหนดให้ จงหาจุดศูนย์กลาง จุดโฟกัส จุดยอด สมการเส้นกำกับ พร้อมเขียนกราฟประกอบ (ข้อ 3.44-3.46)

3.44 $9x^2-4y^2+90x+189=0$

3.45 $x^2-2y^2+6x+4y+5=0$

3.46 $4y^2-9x^2+8y-54x=81$

จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ (ข้อ 3.47-3.49)

3.47 จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2,2)$ จุดยอกจุดหนึ่งอยู่ที่ $(4,2)$ จุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(6,2)$

3.48 จุดยอดอยู่ที่จุด $(-2,2)$ ไดเรกตริกซ์มีสมการเป็น $x+4=0$

3.49 เส้นกำกับ คือ $x+2y=1$ และ $x-2y=7$ และผ่านจุด $(4,-3)$

1. กำหนดให้ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2-y^2-2x=0$ ถ้าสมการพาราโบลามีโฟกัสเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของเส้นตรง $y=2x$ กับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา และมีเส้นไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา แล้วจงหาสมการของพาราโบลา

2. กำหนดไฮเพอร์โบลา H มีสมการเป็น $y^2 - 2x^2 + 8x - 6 = 0$ ถ้าเส้นตรง $y = \sqrt{2}$ ตัดกับเส้นกำกับไฮเพอร์โบลา H ที่จุด A และจุด B โดยที่จุด B อยู่ทางด้านขวามือของจุด A และเส้นตรง $y = \sqrt{2}$ ตัดกับไฮเพอร์โบลา H ที่จุด C และจุด D โดยที่จุด D อยู่ทางด้านขวามือของจุด C แล้วจงหาสมการของวงรีที่มีจุดยอดอยู่บนจุด C และจุด D และมี A เป็นจุดโฟกัสจุดหนึ่ง

3. กำหนดให้ $16y^2 - 9x^2 + 36x + 32y + 124 = 0$ เป็นสมการไฮเพอร์โบลา ให้ L เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด $(0,0)$ และผ่านจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลารูปนี้ แล้วผลบวกของระยะทางจากโฟกัสทั้งสองของไฮเพอร์โบลาไปยังเส้นตรง L มีค่าเท่ากับเท่าไร

4. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งผ่านจุด $(8,0)$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4,-1)$ และมีโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(1,-1)$ ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุดปลายแกนโทของวงรีในควอดรันต์ ที่ 1 และมีเส้นไดเรกตริกซ์ทับกับแกนเอกของวงรีแล้วจงหาสมการของพาราโบลารูปนี้

5. ให้วงกลม C มีสมการเป็น $x^2 + y^2 + ax - 6y - 12 = 0$ เมื่อ $a > 0$ โดยระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลม C ไปยังเส้นตรง $4x + 3y = 71$ เท่ากับ 14 หน่วย ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม C และมี $y = 7$ เป็นเส้นไดเรกตริกซ์ แล้วจงหาสมการของพาราโบลา

6. ให้พาราโบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $y^2 - 4y + 40x - 236 = 0$ โดยมี V และ F เป็นจุดยอดและโฟกัสของพาราโบลาตามลำดับ ถ้าวงรีรูปหนึ่งผ่านจุด $(4,6)$ และมีโฟกัสอยู่ที่ V และ F แล้วจงหาสมการวงรีรูปนี้

7. ให้ C เป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A เส้นตรง $3x + 4y = 35$ สัมผัสวงกลมที่จุด $\left(5,5\right)$ ถ้าไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีแกนตามขวางขนานกับแกน Y จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A มีระยะระหว่างจุดศูนย์กลางกับโฟกัสหนึ่งเป็นสองเท่าของรัศมีวงกลม C และเส้นตรง $3x - 4y = 2$ เป็นเส้นกำกับเส้นหนึ่งแล้วจงหาสมการไฮเพอร์โบลารูปนี้

8. กำหนดให้ P เป็นพาราโบลารูปหนึ่งมีสมการ $x^2 + 4x + 3y - 5 = 0$ ซึ่ง P ตัดแกน X ที่จุด A และจุด B ถ้า E เป็นวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด A และ B โดยผลบวกของระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลา P ไปยังโฟกัสทั้งสองของวงรี E เท่ากับ $2\sqrt{13}$ หน่วย แล้วจงหาสมการวงรี E

9. ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีแกนสมมาตรทับแกน Y และผ่านจุดปลายของส่วนของเส้นตรง $2x+3y-6=0$ เมื่อ x สอดคล้องกับสมการ $\left|\sqrt{x^2}-x\right|+\left|3-x-\left|x-3\right|\right|=0$ แล้วจงหาความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา

10. ให้ P เป็นพาราโบลาที่มีสมการเป็น $x^2+8x+4y+12=0$ ถ้า H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางขนานกับแกน Y มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดยอดของ P ระยะทางระหว่างโฟกัสทั้งสองของ H เท่ากับ $4\sqrt{13}$ หน่วย และเส้นกำกับเส้นหนึ่งของ H ขนานกับเส้นตรง $2x-3y-2=0$ จงหาสมการของไฮเพอร์โบลารูปนี้