

คำนำ

ตำราเรขาคณิตวิเคราะห์เล่มนี้ เรียบเรียงขึ้นโดยมีวัตถุประสงค์เพื่อใช้เป็นตำราประกอบการศึกษาค้นคว้าสำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่ศึกษาทางด้านคณิตศาสตร์ ซึ่งเนื้อหาในเล่มนี้ประกอบไปด้วย แนวความคิดเบื้องต้น สมการเส้นตรง ภาคตัดกรวย การปรับสมการให้เป็นรูปร่างง่าย พิกัดเชิงขั้ว สมการเชิงขั้ว เรขาคณิตวิเคราะห์ในปริภูมิ 3 มิติ และผิวกำลังสอง ทั้งนี้แนวทางในการเขียนตำราเล่มนี้ ประกอบด้วย บทนิยาม ทฤษฎีบท และขั้นตอนการหาผลเฉลยเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์ โดยเนื้อหาส่วนใหญ่เป็นการแสดงวิธีทำที่ประกอบด้วย รูปแบบทางพีชคณิต และการทบทวนความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริงและการแก้สมการ เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับปัญหาอื่น ๆ ได้สะดวกและง่ายขึ้น

ตำราเล่มนี้ได้นำโปรแกรม Geogebra เข้ามาช่วยในการเขียนกราฟและแสดงการหาผลเฉลยของแต่ละตัวอย่าง ซึ่งโปรแกรม Geogebra นี้ เป็นโปรแกรมที่นำเสนอความรู้และองค์ประกอบต่าง ๆ เชิงคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะเป็นด้านเรขาคณิต (Geometry) พีชคณิต (Algebra) ตรีโกณมิติ (Trigonometric) กราฟ (Graph) สถิติ (Statistics) แคลคูลัส (Calculus) รวมถึงการใช้สูตรคำนวณค่าต่าง ๆ นอกจากนี้ยังนำเสนอกระบวนการประยุกต์ใช้คณิตศาสตร์ในรูปแบบต่าง ๆ ได้อย่างละเอียด สามารถใช้เป็นสื่อการสอนสำหรับครูหรืออาจารย์ในการสอนให้นักเรียนเข้าใจในเนื้อหาต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพ และโปรแกรม Geogebra ยังมีฟีเจอร์ที่ใช้สำหรับการใส่สูตรต่าง ๆ เข้าไปประกอบกับรูปภาพ หรือโมเดลแบบ 3 มิติ (3D) ให้ผู้เรียนสามารถเรียนรู้และวิเคราะห์องค์ประกอบของรูปภาพ เพื่อสร้างความเข้าใจในหลักการคำนวณของสูตรต่าง ๆ ได้อย่างรวดเร็วและแม่นยำมากขึ้น ทั้งนี้โปรแกรม Geogebra สามารถใช้งานได้ฟรีและรองรับการใช้งานในหลากหลายระบบปฏิบัติการของทั้งในมือถือ แท็บเล็ต และคอมพิวเตอร์ ทำให้ครู อาจารย์ ผู้เรียน และผู้สนใจสามารถใช้โปรแกรมดังกล่าวได้ทุกที่ ทุกเวลา สะดวกต่อการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ข้าพเจ้าขอขอบพระคุณท่านผู้เขียนและเรียบเรียงโดยผู้ทรงคุณวุฒิหลายท่าน ดังที่ปรากฏอยู่ในบรรณานุกรมเป็นอย่างสูง ข้าพเจ้าหวังเป็นอย่างยิ่งว่าตำราเรขาคณิตวิเคราะห์เล่มนี้คงเป็นประโยชน์ต่อการเรียนของนักศึกษา และผู้สนใจทั่วไป

ไพรัชช์ จันทร์งาม

กุมภาพันธ์ 2560

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ.....	(1)
สารบัญ.....	(3)
สารบัญรูปภาพ.....	(7)
บทที่ 1 แนวความคิดเบื้องต้น.....	1
1.1 ระบบพิกัดฉาก.....	1
1.2 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด.....	3
1.3 จุดแบ่งของส่วนของเส้นตรง.....	14
1.4 ความชันของเส้นตรง.....	22
1.5 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น.....	35
สรุปท้ายบทที่ 1.....	41
แบบฝึกหัดบทที่ 1.....	42
บทที่ 2 สมการเส้นตรง.....	45
2.1 สมการของเส้นตรง.....	45
2.2 ระยะทางจากจุดไปยังเส้นตรง.....	63
2.3 ระยะทางระหว่างเส้นตรงคู่ขนาน.....	68
สรุปท้ายบทที่ 2.....	71
แบบฝึกหัดบทที่ 2.....	72
บทที่ 3 ภาคตัดกรวย.....	75
3.1 วงกลม.....	75
3.2 พาราโบลา.....	84
3.3 วงรี.....	99
3.4 ไฮเพอร์โบลา.....	114
สรุปท้ายบทที่ 3.....	125
แบบฝึกหัดบทที่ 3.....	127

(4)

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
บทที่ 4 การปรับสมการให้เป็นรูปอย่างง่าย.....	131
4.1 การเลื่อนแกน.....	132
4.2 การหมุนแกน.....	141
4.3 การหมุนแกนและการเลื่อนแกน.....	153
4.4 การจำแนกประเภทของภาคตัดกรวย.....	159
สรุปท้ายบทที่ 4.....	167
แบบฝึกหัดบทที่ 4.....	168
บทที่ 5 ระบบพิกัดเชิงขั้ว.....	171
5.1 ระบบพิกัดเชิงขั้ว.....	172
5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากและพิกัดเชิงขั้ว.....	179
5.3 การพิจารณากราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว.....	195
สรุปท้ายบทที่ 5.....	208
แบบฝึกหัดบทที่ 5.....	210
บทที่ 6 สมการเชิงขั้วและสมการอิงตัวแปรเสริม.....	213
6.1 กราฟของสมการในพิกัดเชิงขั้ว.....	213
6.2 จุดตัดของกราฟในพิกัดเชิงขั้ว.....	230
6.3 สมการเชิงขั้วของภาคตัดกรวย.....	236
6.4 สมการอิงตัวแปรเสริม.....	244
สรุปท้ายบทที่ 6.....	257
แบบฝึกหัดบทที่ 6.....	259
บทที่ 7 เรขาคณิตวิเคราะห์ในปริภูมิ 3 มิติ.....	263
7.1 จุดในปริภูมิ 3 มิติ.....	264
7.2 เวกเตอร์ในปริภูมิ 3 มิติ.....	276
7.3 เส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ.....	285

สารบัญ(ต่อ)

เรื่อง	หน้า
7.4 ระนาบในปริภูมิ 3 มิติ.....	292
สรุปท้ายบทที่ 7.....	305
แบบฝึกหัดบทที่ 7.....	307
บทที่ 8 ผิวกำลังสอง.....	309
8.1 การพิจารณาลักษณะของพื้นผิว.....	309
8.2 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง.....	330
8.3 ทรงกระบอก.....	334
8.4 กรวย.....	337
8.5 ผิวกำลังสอง.....	340
สรุปท้ายบทที่ 8.....	358
แบบฝึกหัดบทที่ 8.....	361
บรรณานุกรม.....	365
ดัชนี.....	369

สารบัญรูปภาพ

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 1.1 จตุภาคบนระนาบ.....	2
รูปที่ 1.2 จุด $A(-2, 3)$ บนระนาบพิกัดฉาก.....	3
รูปที่ 1.3 ระยะทางที่วัดขนานกับแกน X	3
รูปที่ 1.4 ระยะทางที่วัดขนานกับแกน Y	4
รูปที่ 1.5 ระยะทางระหว่างจุด $A(2, 0)$ กับจุด $B(-4, 0)$	5
รูปที่ 1.6 ระยะทางระหว่างจุด $C(-3, 3)$ กับจุด $D(4, 3)$	6
รูปที่ 1.7 แสดงจุด P_1, P_2 และจุด R บนระนาบพิกัดฉาก.....	7
รูปที่ 1.8 ระยะทางระหว่างจุด $A(-4, 1)$ กับจุด $B(-1, 5)$	8
รูปที่ 1.9 ระยะทางระหว่างจุด $C(2, 3)$ กับจุด $D(4, -1)$	9
รูปที่ 1.10 รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ABC	10
รูปที่ 1.11 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจำนวน 2 รูป.....	11
รูปที่ 1.12 ผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.2.7.....	13
รูปที่ 1.13 กราฟแสดงจุด A, B, P, M และ N เป็นจุด บนระนาบ XY	14
รูปที่ 1.14 จุด $P(1, -1)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $1 : 2$	16
รูปที่ 1.15 จุด $P(1, 2)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด A กับจุด B	17
รูปที่ 1.16 จุด $P(0, 1)$ แบ่งส่วนของเส้นตรง AB ออกเป็นอัตราส่วน $2 : (-1)$	18
รูปที่ 1.17 แสดงการหาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.4.....	19
รูปที่ 1.18 แสดงการหาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.5.....	20
รูปที่ 1.19 แสดงการหาผลเฉลยสำหรับตัวอย่าง 1.3.6.....	21
รูปที่ 1.20 แสดงขนาดของมุมที่ต่างกัน ความชันของเส้นตรงก็จะต่างกันด้วย.....	22
รูปที่ 1.21 แสดงความสัมพันธ์ของความชัน $m = \tan \theta = \frac{y}{x}$	23
รูปที่ 1.22 แสดงการขนานกันของเส้นตรงสองเส้น.....	24
รูปที่ 1.23 แสดงการตั้งฉากของเส้นตรงสองเส้น.....	26
รูปที่ 1.24 แสดงเส้นตรง l ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และจุด $P_2(x_2, y_2)$ ทำมุม θ กับแกน X	27
รูปที่ 1.25 ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(0, 2)$ และจุด $B(2, 4)$	28

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 1.26 ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(4,1)$ และจุด $B(2,5)$	29
รูปที่ 1.27 ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(-4,-2)$ และจุด $B(3,-2)$	30
รูปที่ 1.28 ความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $A(1,-2)$ และจุด $B(1,3)$	31
รูปที่ 1.29 เส้นตรง l_1 ขนานกับเส้นตรง l_2	32
รูปที่ 1.30 เส้นตรง l_1 ตั้งฉากกับเส้นตรง l_2	33
รูปที่ 1.31 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC	34
รูปที่ 1.32 เส้นตรง l_1 และ เส้นตรง l_2 ตัดกันเกิดมุมที่จุดตัด 2 มุม คือ ϕ และ φ	35
รูปที่ 1.33 มุมระหว่างเส้นตรง l_1 และ l_2 คือ 45°	37
รูปที่ 1.34 มุมภายในของรูปสามเหลี่ยม ABC	39
รูปที่ 1.35 มุมที่เกิดจากการตัดกันของเส้นตรง l_1 กับเส้นตรง l_2	41
รูปที่ 2.1 จุด $P(x,y)$ และจุด $P_1(x_1,y_1)$ เป็นจุดใด ๆ บนเส้นตรง l	46
รูปที่ 2.2 สมการเส้นตรง $3x - 2y - 4 = 0$	46
รูปที่ 2.3 สมการเส้นตรง $x + 2y - 7 = 0$	47
รูปที่ 2.4 สมการเส้นตรง $y = mx + b$	48
รูปที่ 2.5 สมการเส้นตรง $5x + 2y - 6 = 0$	49
รูปที่ 2.6 เส้นตรงมีความชันเท่ากับ 3 และตัดแกน Y ที่จุด $(0,2)$	50
รูปที่ 2.7 รูปสามเหลี่ยม PP_1M คล้ายกับ รูปสามเหลี่ยม P_1P_2N	51
รูปที่ 2.8 เส้นตรง $2x - 5y + 1 = 0$	52
รูปที่ 2.9 เส้นตรง $3x + 7y - 5 = 0$	53
รูปที่ 2.10 เส้นตรงตัดแกน X และตัดแกน Y ที่จุด $(a,0)$ และจุด $(0,b)$ ตามลำดับ.....	54
รูปที่ 2.11 เส้นตรง $3x - 2y + 6 = 0$	55
รูปที่ 2.12 เส้นตรง $x + 5y + 5 = 0$	56
รูปที่ 2.13 เส้นตรง $2x + 3y - 4 = 0$	57
รูปที่ 2.14 เส้นตรง $l : x + 3y - 8 = 0$ ขนานกับเส้นตรง $x + 3y - 11 = 0$	58
รูปที่ 2.15 เส้นตรง $l_1 : x + 3y - 8 = 0$ ตั้งฉากกับเส้นตรง $3x - y - 1 = 0$	59
รูปที่ 2.16 จุด R ที่อยู่บนแกน X ที่ทำให้ $PR + RQ$ มีค่าน้อยที่สุด.....	60

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 2.17 พื้นที่รูปสามเหลี่ยม ABC	62
รูปที่ 2.18 ระยะตั้งฉากจากจุด $P_1(x_1, y_1)$ ไปยังเส้นตรง $Ax + By + C = 0$	64
รูปที่ 2.19 ระยะทางจากจุด $(1, 3)$ ไปยังเส้นตรง $l: -3x + 4y + 16 = 0$	65
รูปที่ 2.20 ระยะทางจากจุด $(-7, -6)$ ไปยังเส้นตรง $l: 3x + 4y - 5 = 0$	66
รูปที่ 2.21 สมการของเส้นตรง $3x - 4y - 12 = 0$ และ $3x - 4y + 8 = 0$	67
รูปที่ 2.22 ระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1: 2x + y + 3 = 0$ และ $l_2: 2x + y - 7 = 0$	69
รูปที่ 2.23 ระยะทางระหว่างเส้นตรง $l_1: x + 3y - 4 = 0$ และ $l_2: 2x + 6y + 10 = 0$	70
รูปที่ 3.1 กราฟวงกลม.....	76
รูปที่ 3.2 กราฟวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$	78
รูปที่ 3.3 กราฟวงกลม $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$	79
รูปที่ 3.4 กราฟวงกลม $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y + 8 = 0$	80
รูปที่ 3.5 กราฟวงกลม $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$	81
รูปที่ 3.6 กราฟวงกลม $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 5$	82
รูปที่ 3.7 กราฟวงกลม $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$	83
รูปที่ 3.8 กราฟแสดงส่วนประกอบพาราโบลา.....	84
รูปที่ 3.9 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0, c)$	85
รูปที่ 3.10 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(0, -c)$	86
รูปที่ 3.11 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(c, 0)$	87
รูปที่ 3.12 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(0, 0)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(-c, 0)$	88
รูปที่ 3.13 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h, k + c)$	89
รูปที่ 3.14 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h, k - c)$	90
รูปที่ 3.15 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h + c, k)$	91
รูปที่ 3.16 พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $V(h, k)$ จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $F(h - c, k)$	92
รูปที่ 3.17 กราฟพาราโบลา $x^2 = 8y$	93
รูปที่ 3.18 กราฟพาราโบลา $(y - 1)^2 = 8(x - 2)$	94
รูปที่ 3.19 กราฟพาราโบลา $y^2 - 28x - 6y - 47 = 0$	95

(10)

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 3.20 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 3.2.4.....	97
รูปที่ 3.21 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 3.2.5.....	98
รูปที่ 3.22 กราฟแสดงส่วนประกอบของวงรี.....	99
รูปที่ 3.23 กราฟวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a > b$	102
รูปที่ 3.24 กราฟวงรี $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ โดยที่ $a > b$	104
รูปที่ 3.25 กราฟวงรี $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ โดยที่ $a > b$	107
รูปที่ 3.26 กราฟวงรี $\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ โดยที่ $a > b$	110
รูปที่ 3.27 กราฟพาราโบลา $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{20} = 1$	112
รูปที่ 3.28 กราฟวงรี $9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0$	113
รูปที่ 3.29 ส่วนประกอบของกราฟไฮเพอร์โบลา.....	114
รูปที่ 3.30 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	116
รูปที่ 3.31 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	118
รูปที่ 3.32 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	120
รูปที่ 3.33 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	122
รูปที่ 3.34 กราฟไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$	123
รูปที่ 3.35 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{9} = 1$	124

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 4.1 แสดงการหมุนและเลื่อนแกน.....	131
รูปที่ 4.2 แสดงการเลื่อนตามแนวนอน.....	132
รูปที่ 4.3 แสดงการเลื่อนตามแนวตั้ง.....	132
รูปที่ 4.4 แกนชุดเก่าเทียบกับแกนชุดใหม่.....	133
รูปที่ 4.5 แกนชุดใหม่เทียบกับแกนชุดเก่า.....	134
รูปที่ 4.6 กราฟเส้นตรง $2x' + 3y' + 14 = 0$ เทียบกับแกน $X'Y'$	135
รูปที่ 4.7 กราฟวงกลม $(x')^2 + (y')^2 = 3^2$ เทียบกับแกน $X'Y'$	136
รูปที่ 4.8 กราฟพาราโบลา $(x')^2 = 6(y')$ เทียบกับแกน $X'Y'$	137
รูปที่ 4.9 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{(x')^2}{16} - \frac{(y')^2}{25} = 1$ เทียบกับแกน $X'Y'$	138
รูปที่ 4.10 กราฟวงรี $\frac{(x')^2}{12} + \frac{(y')^2}{8} = 1$ เทียบกับแกน $X'Y'$	139
รูปที่ 4.11 กราฟเส้นตรง $3x' - 2y' = 0$ หรือ $2x' + 2y' = 0$ เทียบกับแกน $X'Y'$	140
รูปที่ 4.12 แสดงหมุนแกน OX และแกน OY ไปเป็นมุม θ โดย $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$	141
รูปที่ 4.13 กราฟวงรี $\frac{3x'^2}{16} + \frac{y'^2}{16} = 1$ เทียบกับแกน $X'Y'$	144
รูปที่ 4.14 กราฟพาราโบลา $x'^2 = \frac{-\sqrt{2}}{2}y'$ เทียบกับแกน $X'Y'$	146
รูปที่ 4.15 กราฟไฮเพอร์โบลา $\frac{x'^2}{3} - \frac{y'^2}{5} = 1$ เทียบกับแกน $X'Y'$	147
รูปที่ 4.16 กราฟวงรี $\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{32} = 1$ เทียบกับแกน $X'Y'$	149
รูปที่ 4.17 กราฟเส้นตรง $x' = 0$ เทียบกับแกน $X'Y'$	150
รูปที่ 4.18 กราฟไฮเพอร์โบลา $52x'^2 - 117y'^2 + 96\sqrt{13}x' + 144\sqrt{13}y' - 468 = 0$	152
รูปที่ 4.19 กราฟพาราโบลา $x''^2 = -4y''$ เทียบกับแกน $X''Y''$	154

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 4.20 กราฟพาราโบลา $\frac{x''^2}{4} + \frac{y''}{1} = 1$ เทียบกับแกน $X''Y''$	156
รูปที่ 4.21 กราฟพาราโบลา $\frac{y''^2}{3} - \frac{x''^2}{2} = 1$ เทียบกับแกน $X''Y''$	158
รูปที่ 4.22 กราฟของสมการ $x^2 - 2xy + y^2 = 4$	161
รูปที่ 4.23 กราฟของสมการ $2x^2 + 7xy + 3y^2 + x - 7y = 6$	162
รูปที่ 4.24 กราฟของสมการ $x^2 + 3xy + 3y^2 - x + 1 = 0$	163
รูปที่ 4.25 กราฟพาราโบลา $y''^2 = -\frac{1}{3}x''$ เทียบกับแกน $X''Y''$	165
รูปที่ 4.26 กราฟพาราโบลา $16x^2 + 9y^2 + 24xy - 26x - 168y = -409$	166
รูปที่ 5.1 แสดงพิกัดเชิงขั้ว.....	172
รูปที่ 5.2 แสดงพิกัดของจุด $P'(-r, \theta)$	173
รูปที่ 5.3 แสดงพิกัดจุด A ในระบบพิกัดเชิงขั้ว.....	174
รูปที่ 5.4 พิกัดจุด A, B และ C ในระบบพิกัดเชิงขั้ว.....	175
รูปที่ 5.5 พิกัดจุด A, B และ C ในระบบพิกัดเชิงขั้ว.....	176
รูปที่ 5.6 ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดฉากกับพิกัดเชิงขั้ว.....	179
รูปที่ 5.7 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 5.2.1.....	182
รูปที่ 5.8 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 5.2.2.....	185
รูปที่ 5.9 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 5.2.3.....	187
รูปที่ 5.10 กราฟของสมการ $r = 4 \cos \theta$	188
รูปที่ 5.11 กราฟของสมการ $r = \frac{4}{1 - \sin \theta}$	189
รูปที่ 5.12 กราฟของสมการ $r = \frac{2}{3 - 2 \sin \theta}$	190
รูปที่ 5.13 กราฟของสมการ $r = \frac{1}{r \cos 2\theta - 2 \sin \theta}$	191
รูปที่ 5.14 กราฟของสมการ $2x - 3y = 5$	192
รูปที่ 5.15 กราฟของสมการ $x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0$	193
รูปที่ 5.16 กราฟของสมการ $(x^2 + y^2)(x - y)^2 = 10$	194

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 5.17 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนเชิงชี้.....	195
รูปที่ 5.18 เส้นโค้งมีสมมาตรกับแกนตั้งฉากกับแกนเชิงชี้.....	196
รูปที่ 5.19 เส้นโค้งมีสมมาตรกับชี้.....	196
รูปที่ 5.20 เส้นโค้ง $r = 3 + 5 \cos \theta$	197
รูปที่ 5.21 เส้นโค้ง $r = 4 \sin 3\theta$	198
รูปที่ 5.22 เส้นโค้ง $r = 3 \sin 4\theta$	199
รูปที่ 5.23 เส้นโค้ง $r = 3(1 - \sin \theta)$	200
รูปที่ 5.24 เส้นโค้ง $r = 3(1 - 2 \cos \theta)$	201
รูปที่ 5.25 เส้นโค้ง $r = 3(1 + \cos \theta)$	202
รูปที่ 5.26 เส้นโค้ง $r = \frac{15}{3 - 2 \cos \theta}$	203
รูปที่ 5.27 พิกัดจุด A, B และ C ในระบบพิกัดเชิงชี้.....	205
รูปที่ 5.28 เส้นโค้ง $r = 8 \cos \theta$	207
รูปที่ 6.1 กราฟเส้นตรง $r \cos \theta = a$	214
รูปที่ 6.2 กราฟเส้นตรง $r \sin \theta = b$	215
รูปที่ 6.3 กราฟเส้นตรง $\theta = a$	215
รูปที่ 6.4 แสดงผลเฉลยตามตัวอย่าง 6.1.1.....	217
รูปที่ 6.5 กราฟ $r = 3$	218
รูปที่ 6.6 กราฟ $r = a \cos \theta$	219
รูปที่ 6.7 กราฟ $r = a \sin \theta$	220
รูปที่ 6.8 กราฟ $r = a \cos \theta + b \sin \theta$	221
รูปที่ 6.9 กราฟ $r = a + b \cos \theta$	222
รูปที่ 6.10 กราฟ $r = a - b \cos \theta$	222
รูปที่ 6.11 กราฟ $r = a + b \sin \theta$	222
รูปที่ 6.12 กราฟ $r = a - b \sin \theta$	222
รูปที่ 6.13 กราฟ $r = a(1 + \cos \theta)$	223
รูปที่ 6.14 กราฟ $r = a(1 - \cos \theta)$	223

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 6.15 กราฟ $r = a(1 + \sin \theta)$	223
รูปที่ 6.16 กราฟ $r = a(1 - \sin \theta)$	223
รูปที่ 6.17 กราฟ $r = a + b \cos \theta$	224
รูปที่ 6.18 กราฟ $r = a - b \cos \theta$	224
รูปที่ 6.19 กราฟ $r = a + b \sin \theta$	224
รูปที่ 6.20 กราฟ $r = a - b \sin \theta$	224
รูปที่ 6.21 กราฟ $r = 3 \sin 3\theta$	225
รูปที่ 6.22 กราฟ $r = 3 \cos 3\theta$	225
รูปที่ 6.23 กราฟ $r = 3 \sin 2\theta$	225
รูปที่ 6.24 กราฟ $r = 3 \cos 2\theta$	225
รูปที่ 6.25 กราฟ $r^2 = a^2 \cos 2\theta$	226
รูปที่ 6.26 กราฟ $r^2 = a^2 \sin 2\theta$	226
รูปที่ 6.27 กราฟ $r = a\theta$	226
รูปที่ 6.28 กราฟ $r = 2 \csc \theta + 2$	227
รูปที่ 6.29 กราฟ $r = \csc \theta - 4$	227
รูปที่ 6.30 กราฟ $r = -3 \csc \theta + 2$	227
รูปที่ 6.31 กราฟ $r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$	228
รูปที่ 6.32 กราฟ $r = 1 + \sin(2\theta) + \cos^2(4\theta)$	228
รูปที่ 6.33 กราฟ $r = (2 + 7 \sin(3\theta)) \cos 5\theta$	229
รูปที่ 6.34 กราฟ $r = 2 \tan \theta$	229
รูปที่ 6.35 จุดตัดของเส้นโค้ง $r = 4 \sin \theta$ และ $r = 4 \cos \theta$	231
รูปที่ 6.36 จุดตัดของเส้นโค้ง $r = 6 \sin \theta$ และ $r = 6 \cos 2\theta$	232
รูปที่ 6.37 จุดตัดของเส้นโค้ง $r \cos \theta = 2$ และ $r = 2 + 4 \cos \theta$	234
รูปที่ 6.38 จุดตัดของเส้นโค้ง $r = \frac{3}{2} - \cos \theta$ และ $\theta = \frac{2\pi}{3}$	235
รูปที่ 6.39 เส้นไคเรทริกซ์ตั้งฉากกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปทางซ้าย k หน่วย.....	236
รูปที่ 6.40 เส้นไคเรทริกซ์ขนานกับแกนเชิงขั้วและอยู่ห่างจากจุดขั้วไปด้านล่าง k	237

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 6.41 กราฟ $r = 4$	239
รูปที่ 6.42 กราฟ $r = \frac{15}{3 - 2 \cos \theta}$	240
รูปที่ 6.43 กราฟ $r = \frac{6}{1 + 2 \sin \theta}$	241
รูปที่ 6.44 กราฟ $r = \frac{10}{3 + 3 \cos \theta}$	242
รูปที่ 6.45 กราฟ $r = \frac{15}{4 + \sin \theta}$	243
รูปที่ 6.46 กราฟ $y = 3x - 7$	245
รูปที่ 6.47 กราฟ $x = 2 \cos \theta, y = 2 \sin \theta$	246
รูปที่ 6.48 กราฟ $x = 1 + 3 \cos \theta, y = 2 + 3 \sin \theta$	247
รูปที่ 6.49 กราฟ $x = \cos^2 \theta, y = 2 \sin \theta$	249
รูปที่ 6.50 กราฟ $x = t + 2, y = 3 - t^2$	250
รูปที่ 6.51 กราฟ $x = \cos \theta, y = 2 \sin \theta$	252
รูปที่ 6.52 กราฟ $x = 3 \cos t - 3, y = 1 + \sin t$	253
รูปที่ 6.53 กราฟ $x = 3 \cos t - 3, y = 1 + \sin t$	255
รูปที่ 6.54 กราฟ $x = 3 \sec t + 2, y = \tan t + 2$	256
รูปที่ 7.1 ระบบพิกัดฉาก 3 มิติ.....	263
รูปที่ 7.2 จุด $P(x, y, z)$ ในปริภูมิ 3 มิติ มีค่าเป็นบวก.....	264
รูปที่ 7.3 พิกัดจุด $A(-3, 4, 1), B(3, -2, 4)$ และจุด $C(2, 3, -4)$	265
รูปที่ 7.4 ระนาบ $z = 2$	265
รูปที่ 7.5 ระนาบ $z = 2$	266
รูปที่ 7.6 ระนาบ $2y + 3z = 6$	266
รูปที่ 7.7 ระนาบ $x + y + z = 2$	267
รูปที่ 7.8 กล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก.....	268
รูปที่ 7.9 ระยะห่างระหว่างจุด $A(0, 0, 0)$ กับจุด $B(4, 3, 0)$	269
รูปที่ 7.10 ระยะห่างระหว่างจุด $A(-1, 2, 3)$ กับจุด $B(4, 0, 2)$	270

(16)

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 7.11 ระยะห่างระหว่างจุด $A(-4, 4, 1)$ กับจุด $B(-3, 5, -4)$	271
รูปที่ 7.12 จุด $P(x, y, z)$ แบ่งส่วนของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ กับ $P_2(x_2, y_2, z_2)$	272
รูปที่ 7.13 จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1, 2, 3)$ และ $B(3, -4, 1)$	273
รูปที่ 7.14 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1, 3, -2)$ และ $B(7, 6, 1)$ ออกเป็น $1 : 3$	274
รูปที่ 7.15 จุดแบ่งส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุด $A(1, 4, 7)$ และ $B(5, -1, 11)$ ออกเป็น $2 : 3$	275
รูปที่ 7.16 แสดงเวกเตอร์ \overrightarrow{AB}	276
รูปที่ 7.17 แสดงการบวกกันของ 2 เวกเตอร์.....	277
รูปที่ 7.18 แสดงนิเสธของเวกเตอร์ \vec{u}	277
รูปที่ 7.19 หาเวกเตอร์หน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ \overrightarrow{PQ}	279
รูปที่ 7.20 ภาพฉายของ \vec{u} บน \vec{v}	281
รูปที่ 7.21 ภาพฉายของ $\vec{u} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ บน $\vec{v} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$	282
รูปที่ 7.22 $\vec{u} \times \vec{v}$	283
รูปที่ 7.23 เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{u} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$ และ $\vec{v} = 5\hat{i} + 9\hat{k}$	284
รูปที่ 7.24 แสดงส่วนประกอบเส้นตรงในปริภูมิ 3 มิติ.....	285
รูปที่ 7.25 เส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ ขนานกับเวกเตอร์ $\vec{v} = \langle 3, -4, 7 \rangle$	286
รูปที่ 7.26 แสดงการหาผลเฉลยตามตัวอย่าง 7.3.2.....	287
รูปที่ 7.27 จุดตัดของเส้นตรง L_1 และ L_2	288
รูปที่ 7.28 เส้นไขว้ต่างระนาบ.....	289
รูปที่ 7.29 ระยะทางจากจุด Q มายังเส้นตรง L	290
รูปที่ 7.30 ระยะทางจากจุด $(1, 1, 5)$ ไปยังเส้นตรง $L : x = 1 + t, y = 3 - t, z = 2t$	291
รูปที่ 7.31 แสดงจุดกับเวกเตอร์บนระนาบ.....	292
รูปที่ 7.32 ระนาบ $4x + 2y - 5z + 23 = 0$	293
รูปที่ 7.33 ระนาบ $4x + 5y - z = 11$	294
รูปที่ 7.34 ระนาบ $3x - 9y - 7z = 0$	295

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 7.35 มุมระหว่างระนาบ $5x - 2y + 5z = 12$ และระนาบ $2x + y - 7z = -11$	296
รูปที่ 7.36 สมการเส้นตรง $\frac{x}{7} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-5}$	298
รูปที่ 7.37 ระยะทางจากจุด $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ไปยังระนาบ $ax + by + cz + d = 0$	299
รูปที่ 7.38 ระยะตั้งฉากจากจุด $(2, -3, 1)$ กับระนาบ $2x - 3y - 6z - 14 = 0$	300
รูปที่ 7.39 ระยะตั้งฉากจากจุด $(5, -3, 3)$ กับระนาบ $2x - y + 2z + 5 = 0$	301
รูปที่ 7.40 ระยะห่างระหว่างระนาบ $ax + by + cz + d_1 = 0$ กับระนาบ $ax + by + cz + d_2 = 0$	302
รูปที่ 7.41 ระยะห่างระหว่างระนาบ $2x - 3y + 6z + 1 = 0$ กับระนาบ $2x - 3y + 6z + 15 = 0$	303
รูปที่ 7.42 ระยะห่างระหว่างระนาบ $x + 2y - 2z = -3$ กับระนาบ $x + 2y - 2z = 15$	304
รูปที่ 8.1 แสดงจุดตัดของ $2x^2 + y^2 + 2z^2 = 8$ กับแกนพิกัด X, Y และ Z	311
รูปที่ 8.2 แสดงจุดตัดของ $z = x^2 + 2y^2$ กับแกนพิกัด X, Y และ Z	312
รูปที่ 8.3 แสดงจุดตัดของ $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{36} - \frac{z^2}{25} = 1$ กับแกนพิกัด X, Y และ Z	313
รูปที่ 8.4 แสดงการสมมาตรของพื้นผิว $z = 2x^2 + 3y^2$	316
รูปที่ 8.5 แสดงการสมมาตรของพื้นผิว $z^2 = x^2 + 4y^2$	318
รูปที่ 8.6 แสดงรอยตัด $x = 2$ กับพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$	319
รูปที่ 8.7 แสดงรอยตัด $y = 1$ กับพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$	320
รูปที่ 8.8 แสดงรอยตัด $z = 6$ กับพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$	320
รูปที่ 8.9 แสดงรอยตัด $x = 2$ กับพื้นผิว $x^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$	321
รูปที่ 8.10 แสดงรอยตัด $y = 2$ กับพื้นผิว $x^2 = 3y^2 + 2z^2 - 1$	322
รูปที่ 8.11 แสดงรอยตัด $z = 2$ กับพื้นผิว $2z = x^2 + 4y^2$	323
รูปที่ 8.12 แสดงขอบเขตของพื้นผิว $\sqrt{9 - x^2 - y^2} = z$	324
รูปที่ 8.13 แสดงขอบเขตของพื้นผิว $10z = 10 + x^2 - y^2$	325
รูปที่ 8.14 ลักษณะของพื้นผิว $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$	329
รูปที่ 8.15 แสดงเส้นโค้ง $y = f(x), z = 0$	330

สารบัญรูปภาพ(ต่อ)

รูปภาพ	หน้า
รูปที่ 8.16 สมการของพื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $y = f(x), z = 0$ รอบแกน X	331
รูปที่ 8.17 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $x = y^2, z = 0$ รอบแกน X	332
รูปที่ 8.18 พื้นผิวซึ่งเกิดจากการหมุนเส้นโค้ง $3z + 4y = 12, x = 0$ รอบแกน Y	333
รูปที่ 8.19 แสดงส่วนประกอบของทรงกระบอก.....	334
รูปที่ 8.20 ทรงกระบอก $x^2 + 16y^2 + 4z^2 - 8xy = 64$	336
รูปที่ 8.21 แสดงส่วนประกอบของกรวย.....	337
รูปที่ 8.22 กรวย $100x^2 + 100y^2 - 9z^2 + 180z - 900 = 0$	339
รูปที่ 8.23 ทรงรี.....	340
รูปที่ 8.24 กราฟของทรงรี $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 8y + 4z = 28$	341
รูปที่ 8.25 กราฟของทรงไฮเพอร์โบล่าเชิงวงรีแบบเชื่อมโยง.....	342
รูปที่ 8.26 กราฟของสมการ $2x^2 - 2y^2 + z^2 - 12x + 20y - 2z = 33$	343
รูปที่ 8.27 กราฟของทรงไฮเพอร์โบล่าเชิงวงรีแบบไม่เชื่อมโยง.....	344
รูปที่ 8.28 กราฟของสมการ $x^2 - 4y^2 - 16z^2 - 4x - 8y = 1$	345
รูปที่ 8.29 กราฟของทรงพาราโบล่าเชิงวงรี.....	346
รูปที่ 8.30 กราฟของทรงพาราโบล่าเชิงวงรี $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4z = 19$	347
รูปที่ 8.31 กราฟของทรงพาราโบล่าเชิงไฮเพอร์โบล่า.....	348
รูปที่ 8.32 กราฟของพาราโบล่าเชิงไฮเพอร์โบล่า $2x^2 - y^2 - 24x - 2y + 4z + 59 = 0$	349
รูปที่ 8.33 กราฟของกรวยเชิงวงรี.....	350
รูปที่ 8.34 กราฟของกรวยเชิงวงรี $16x^2 - 4y^2 + z^2 + 32x - 8y + 6z + 21 = 0$	351
รูปที่ 8.35 กราฟของทรงกระบอกเชิงพาราโบล่า.....	352
รูปที่ 8.36 กราฟของทรงกระบอกเชิงพาราโบล่า $x^2 - 4x - 2z + 10 = 0$	353
รูปที่ 8.37 กราฟของทรงกระบอกเชิงวงรี.....	354
รูปที่ 8.38 กราฟของทรงกระบอกวงรี $x^2 + 4z^2 + 2x - 16z + 1 = 0$	355
รูปที่ 8.39 กราฟของทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบล่า.....	356
รูปที่ 8.40 กราฟของทรงกระบอกเชิงไฮเพอร์โบล่า $4y^2 - 25z^2 - 24y + 100z = 65$	357