

บทที่ 8

การสร้างสื่อประกอบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐาน

ในบทนี้จะกล่าวถึงการสร้างสื่อประกอบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ขั้นพื้นฐานในสาระต่างๆ เช่น จำนวนและการดำเนินการ การวัด เรขาคณิต พีชคณิต และการวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น โดยใช้โปรแกรม GSP มีรายละเอียดการสร้างดังกิจกรรมที่ 38 - 62

การสร้างสื่อประกอบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในสาระจำนวนและการดำเนินการ

กิจกรรมที่ 38

การสร้างสื่อแสดงจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะ

การสร้างรูปแสดงจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะสามารถสร้างโดยใช้เครื่องมือกำหนดเองดังนี้

1. สร้างเครื่องมือกำหนดเองรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงตามที่ต้องการ
 - 1.1 สร้างส่วนของเส้นตรง XY ยาวพอสมควร
 - 1.2 สร้างส่วนของเส้นตรง AB จากนั้นสร้างเส้นตั้งฉากที่จุด B
 - 1.3 สร้างวงกลมที่จุด B โดยคลิกที่จุด B และเลือกส่วนของเส้นตรง XY เป็นรัศมี
 - 1.4 หาจุดตัดของวงกลมกับเส้นตั้งฉากที่จุด B ตั้งชื่อเป็นจุด C
 - 1.5 ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด A กับ C และ B กับ C จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - 1.6 ทำการซ่อนส่วนที่ช่วยในการสร้างทั้งหมด ให้มีองค์ประกอบแสดงให้เห็นเฉพาะ

รูปสามเหลี่ยมมุมฉากและส่วนของเส้นตรง XY

2. เก็บเป็นเครื่องมือกำหนดเอง (ควรทำการซ่อนป้ายชื่อแต่ละจุด)

2.1 คลิกตามลำดับดังนี้ จุด A, ส่วนของเส้นตรง AB, จุด B, ส่วนของเส้นตรง XY, ส่วนของเส้นตรง BC, จุด C และส่วนของเส้นตรง AC

2.2 ไปที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง ตั้งชื่อเครื่องมือใหม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสูง 1 หน่วย

3. สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจากเครื่องมือกำหนดเอง โดยเลือกชื่อเครื่องมือรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ลากฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปแรก โดยคลิกที่จุดแรกและลากไปยังจุดที่สองที่ห่างกันพอควร (a หน่วย) แล้วใช้เมาส์ชี้ที่เส้นฐานดังกล่าวต่อเส้นฐานนั้นจะเปลี่ยนเป็นสีฟ้า และจะประกฏเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูงเท่ากับฐานที่เมาส์ชี้

4. สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปที่สองบนด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปแรกต่อ โดยคลิกที่จุดแรก จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉากขึ้นมาโดยอัตโนมัติ โดยที่มีความยาวฐานยาวเท่ากับด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแรก

5. จากนั้นคลิกต่อๆ กันไปโดยเริ่มฐานจากด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่ต่อๆ กันมาและความสูงเท่ากับฐานของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากแรก

6. ถ้าให้ความยาวฐานของสามเหลี่ยมรูปแรกยาว 1 หน่วย จะได้ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยม ดังนี้

รูปแรกยาว $\sqrt{2}$ หน่วย

รูปที่สองยาว $\sqrt{3}$ หน่วย

รูปที่สามยาว $\sqrt{4}$

รูปที่สี่ยาว $\sqrt{5}$ หน่วย เป็นเช่นนี้ต่อไปเรื่อยๆ

การสร้างสื่อประกอบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในสาระการวัด

กิจกรรมที่ 39

การสร้างสื่อการสอน เรื่อง ขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับพื้นที่ที่มากที่สุด

รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีผลรวมของความกว้างและความยาวเป็น 10 ซม. จะมีรูปแตกต่างกันมากมายแต่รูปที่มีพื้นที่มากที่สุดนั้นเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีขนาดอย่างไร เราสามารถสร้างสื่อการสอนเพื่อสำรวจขนาดของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากดังกล่าวได้ดังนี้

1. สร้างจุด 1 จุด คือ จุด A แล้วทำการเลื่อนขนานจุด A ในแนวนอนไป 10 ซม. ซึ่งเป็นผลรวมของความกว้างและความยาวให้ชื่อจุดใหม่ที่ได้ว่าจุด X ลากส่วนของเส้นตรง AX
2. สร้างจุด B ใดๆ บนส่วนของเส้นตรง AX
3. สร้างวงกลมที่มีจุด B เป็นจุดศูนย์กลางรัศมียาวตามส่วนของเส้นตรง BX
4. สร้างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง AB ตัดวงกลม B ที่จุด C เลื่อนขนานจุด C ด้วยवेक्टर

BA

5. จะได้จุด D แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD
6. สร้างพื้นที่บริเวณภายในรูปสี่เหลี่ยม ABCD
7. วัดความยาวของส่วนของเส้นตรง AB และ BC และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD
8. สร้างตารางจากเมนูกราฟเพื่อพิจารณาความสัมพันธ์ของความกว้างความยาวและพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD โดยเลือกตามลำดับต่อไปนี้ ความยาวของส่วนของเส้นตรง BC และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก ABCD ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งสร้างตาราง จะได้ตารางที่แสดงให้เห็นค่าของความยาวของส่วนของเส้นตรง AB, ส่วนของเส้นตรง BC และพื้นที่ เมื่อเพิ่มข้อมูลหลายๆ จำนวนจากเมนูกราฟ ใช้ข้อมูลเหล่านี้สร้างข้อความคาดการณ์เรื่องระหว่างพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากกับขนาดของรูปสี่เหลี่ยมนี้

กิจกรรมที่ 40

การสร้างสื่อการสอนเพื่อฝึกทักษะเบื้องต้นทางคณิตศาสตร์โดยใช้พารามิเตอร์

เราสามารถสร้างแบบฝึกทักษะทางคณิตศาสตร์เรื่องทักษะของการบวก การลบ และการคูณ เพื่อให้ผู้เรียนใช้ฝึกแข่งขันหาผลลัพธ์และสามารถตรวจสอบผลลัพธ์ได้เอง

การสร้างแบบฝึกทางคณิตศาสตร์เรื่องการบวก โดยใช้พารามิเตอร์มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1. กำหนดค่าพารามิเตอร์ใหม่ 2 ค่า ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งพารามิเตอร์ใหม่ กำหนดชื่อ t_1 โดยกำหนดค่าเริ่มต้นเป็น 1 และสร้างพารามิเตอร์ใหม่อีกค่าหนึ่ง กำหนดชื่อเป็น t_2 ค่าเริ่มต้นเป็น 1 เช่นกัน
2. คำนวณหาค่าผลบวกของค่าพารามิเตอร์ 2 ค่า ไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณ เมื่อปรากฏกล่องโต้ตอบเครื่องคำนวณ ให้เลือก t_1 กดปุ่ม + และเลือก t_2 จะได้คำตอบซึ่งเป็นผลบวกของ t_1 และ t_2 ($t_1 + t_2$)
3. กำหนดสมบัติของค่า t_1 , t_2 และ $t_1 + t_2$ ให้เป็นจำนวนเต็มหน่วย
4. ใช้เครื่องมือสร้างข้อความพิมพ์เครื่องหมาย + และเครื่องหมาย =
5. นำค่าพารามิเตอร์และเครื่องหมายมาจัดเรียง
6. เลือกพารามิเตอร์ t_1 ปรับให้แสดงเฉพาะตัวเลข (ไม่แสดงป้าย) โดยคลิกขวาที่ t_1 เลือกสมบัติที่กล่องโต้ตอบ สมบัติของพารามิเตอร์ เลือกที่แผงรายการค่าต่างๆ คลิกเลือกส่วนแสดงด้วยเป็นไม่แสดงชื่อ
7. กำหนดค่าพารามิเตอร์ t_2 และค่าที่เกิดจากการคำนวณให้แสดงแบบเดียวกันกับ t_1
8. จัดเรียงให้สวยงาม เมื่อต้องการเปลี่ยนแปลงค่าต่างๆ ให้คลิกเลือกค่าพารามิเตอร์ แล้วกดป้ายเครื่องหมาย + เพื่อเพิ่มจำนวนหรือกดแป้นเครื่องหมาย - เพื่อลดจำนวน ซึ่งค่าของผลลัพธ์จะเปลี่ยนแปลงตามค่าพารามิเตอร์ที่เปลี่ยนไป

หลังจากนั้นอาจสร้างปุ่มแสดงการทำงาน ซ่อนแสดงค่าของ $t_1 + t_2$ ให้ชื่อปุ่มว่า “เฉลยผลลัพธ์” ซึ่งโจทย์เกี่ยวกับการลบและการคูณก็สามารถสร้างได้ในทำนองเดียวกัน

การสร้างสื่อประกอบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในสาระเรขาคณิต

กิจกรรมที่ 41

การสร้างสื่อการสอนเพื่อแสดงความสัมพันธ์ของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีพีทาโกรัส

ในทฤษฎีพีทาโกรัส ได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากดังนี้ “กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก” นั้น เพื่อช่วยให้นักเรียนเห็นภาพของความสัมพันธ์ชัดเจนขึ้น เราอาจใช้การสร้างรูปเรขาคณิตช่วยแสดงได้หลายๆ วิธี ดังตัวอย่างการสร้างต่อไปนี้

สร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AC
2. เลือกจุด C และส่วนของเส้นตรง AC สร้างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง AC ผ่านจุด C
3. กำหนดจุด B บนเส้นตั้งฉากให้จุด B เลื่อนไปมาได้
4. ซ้อนเส้นตั้งฉาก ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC

สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านของรูปสามเหลี่ยม

1. ไปที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง เลือกเครื่องมือสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่สร้างไว้
2. คลิกที่จุด B แล้วลากมาตามเข็มนาฬิกา ให้จุดปลายมาพบกันที่จุด A จะได้รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AB ทำเช่นนี้จนครบด้าน
3. กดแป้น Esc เพื่อออกจากคำสั่งการใช้เครื่องมือรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส
4. คลิกทุกจุดของมุมรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสไปที่เมนูการสร้าง เลือกคำสั่งบริเวณภายใน ใส่สี และวัดพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งสามรูป โดยใช้คำสั่งจากเมนูการวัด เลือกคำสั่งพื้นที่
5. จากเมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณ จะเกิดกล่องโต้ตอบคำนวณ ให้เลือกค่าที่วัดพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน a และปุ่มเครื่องหมายบวก จากนั้นจึงเลือกค่าที่วัดของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน b คลิกตกลง จะได้ค่าผลรวมของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน a และด้าน b

กิจกรรมที่ 42

การสร้างสื่อแสดงการเปิดแผ่นกระดาษ

การสร้างภาพที่ทำให้มองเห็นเป็นการเคลื่อนไหวของการพลิกกระดาษ จะเป็นพื้นที่ที่นำมาใช้ในการสร้างภาพอื่นๆ อีกหลายอย่าง เช่น การเปิดกล่อง กาหมุนแกน การพับรูป เป็นต้น

การสร้างสื่อแสดงการเปิดแผ่นกระดาษมีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
2. เลือกจุด A สร้างเส้นตั้งฉาก กับส่วนของเส้นตรง AB
3. เลือกจุด A และส่วนของเส้นตรง AB แล้วสร้างวงกลมที่สร้างจากจุดศูนย์กลางและรัศมี
4. หาจุดตัดของวงกลมและเส้นตั้งฉาก ตั้งชื่อจุด C
5. สร้างส่วนโค้ง BC โดยเลือกจุด A, B และ C ในทิศทวนเข็มนาฬิกา ไปที่เมนูการสร้าง

เลือกคำสั่งส่วนโค้งบนวงกลม ซ่อนวงกลมเพื่อให้เห็นเฉพาะส่วนโค้งที่สร้าง

6. สร้างจุดบนส่วนโค้งของวงกลม ตั้งชื่อจุด F สร้างส่วนของเส้นตรง AF
7. ระบุเวกเตอร์จุด B และ D แล้วเลื่อนขนานจุด F จะได้จุด F'
8. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด F, F' และจุด E, E'
9. ระบายสี และซ่อนสิ่งที่ไม่ต้องการแสดงทั้งหมด

กิจกรรมที่ 43

การสร้างสื่อแสดงกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก

การสร้างสื่อแสดงกล่องทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก มีขั้นตอนในการสร้างดังนี้

1. สร้างตัวเลื่อน (Slider) 2 เส้น โดยเส้นหนึ่งกำหนดเป็นความยาวของด้านรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส อีกหนึ่งเส้นกำหนดเป็นความยาวที่จะต้องตัดออกในแต่ละมุมของสี่เหลี่ยมจัตุรัส
2. สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสโดยให้มีความยาวเท่ากับตัวเลื่อน (Slider) ที่กำหนดความยาวของด้านรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส (ใช้เครื่องมือวงเวียนช่วยในการสร้าง) ตั้งชื่อเป็น ABCD
3. เลือกจุดมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ Slider เส้นที่สั้น (เส้นที่กำหนดความยาวในการตัดมุมออก) สร้างวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับเส้นนี้ จะได้วงกลมทั้งสี่มุม หากจุดตัดแต่ละเส้น
4. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดทั้งสี่ที่เกิดขึ้นและหาจุดตัด แล้วเลือกเส้นเป็นแบบเส้นประ
5. ทำการซ่อนวงกลมทั้งสี่มุม จะได้รูปกระดาษที่แสดงการตัดมุมทั้งสี่
6. สร้างกล่องแบบ 3 มิติ โดยมีวิธีการสร้างดังนี้
 - 6.1 สร้างฐานของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ในบริเวณที่ว่างของแบบร่าง (Sketch) โดยให้มีความยาวเท่ากับส่วนของเส้นตรง AB (ความยาวของฐานกล่อง) ตั้งชื่อจุดเป็น M และ N
 - 6.2 สร้างวงกลมที่มีรัศมีเท่ากับตัวเลื่อนที่เป็นส่วนตัดของรูปสี่เหลี่ยมที่จุด M สร้างเส้นตั้งฉากที่ N
 - 6.3 หาจุดตัดของวงกลมกับเส้นตั้งฉาก ตั้งชื่อเป็นจุด O
 - 6.4 ที่จุด N สร้างเส้นตั้งฉากกับด้านความยาวฐาน จากนั้นคลิกที่จุด O กับเส้นฐานสร้างเส้นขนาน หาจุดตัด แล้วตั้งชื่อจุดตัดเป็นจุด P
 - 6.5 เลือกจุด NMO เพื่อสร้างเส้นแบ่งครึ่งมุม M จากนั้นสร้างเส้นขนานกับเส้นแบ่งครึ่งมุม โดยให้ผ่านจุด O เส้นหนึ่งให้ผ่านจุด P และเส้นหนึ่งให้ผ่านจุด N
 - 6.6 คลิกที่จุด N และส่วนของเส้นตรง AB สร้างวงกลมที่มีความยาวรัศมีที่กำหนดหาจุดตัดของเส้นตรงกับวงกลม ตั้งชื่อเป็นจุด S
 - 6.7 ที่จุด S สร้างเส้นขนานกับเส้นตรงที่ลากผ่านจุด P จากนั้นหาจุดตัด เช่นเดียวกันสร้างเส้นขนานที่จุดอื่น จากนั้นเชื่อมจุดทั้งหมด ซ่อนสิ่งที่ไม่ต้องการแสดง

ในกรณีที่ต้องการสร้างภาพกล่องกระดาษนี้ให้คลี่ได้ ให้ดำเนินการสร้างแต่ละด้านทั้งสี่ ตามวิธีการเดียวกันกับที่สร้างในหัวข้อ การสร้างสื่อแสดงภาพการเปิดแผ่นกระดาษ

การสร้างสื่อประกอบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในสาระพีชคณิต

กิจกรรมที่ 44

การสอนเรื่องกราฟของสมการเส้นตรง

ใน GSP มีเมนูกราฟที่ช่วยให้การสอนเรื่องกราฟทำได้ง่ายขึ้น ดังตัวอย่างต่อไปนี้

กราฟเส้นตรงที่ผ่านจุดที่กำหนดให้

1. สร้างระบบพิกัด โดยไปที่เมนูกราฟ แล้วเลือกคำสั่งกำหนดระบบพิกัด
2. เลือกคำสั่งลงจุดจากเมนูกราฟ แบบคู่อันดับ
3. เลือกจุดสองจุดเช่น A และ D แล้วไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นตรง
4. อธิบายความหมายของความชันของกราฟเส้นตรง โดยเลือกจุด A และแกน X

แล้วไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นขนาน จากนั้นเลือกจุด D และแกน Y ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นขนาน

5. ลากเส้นขนานกับแกน X ผ่านจุด A และลากเส้นขนานกับแกน Y ผ่านจุด D สร้างจุดตัดของเส้นทั้งสองเส้นคือจุด E

6. หาความชันของกราฟเส้นตรง โดยการคำนวณจากเมนูการวัด

1.1 เลือกจุด A ไปที่เมนูการวัด เลือกวัดพิกัดที่หนึ่ง (X) จะได้ค่า X_A

1.2 เลือกจุด A ไปที่เมนูการวัด เลือกวัดพิกัดที่หนึ่ง (Y) จะได้ค่า Y_A

ในทำนองเดียวกัน วัดพิกัดที่หนึ่ง (X) และวัดพิกัดที่สอง (Y) ของจุด D

ไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณ ป้อนค่า $(Y_D - Y_A)/(X_D - X_A)$ ลงในเครื่องคำนวณ จะได้ค่าความชันของกราฟเส้นตรงผ่านจุดที่กำหนดให้ ทำการตรวจสอบโดยเลือกกราฟเส้นตรง แล้วไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งความชัน ใน GSP สามารถแสดงค่าความชันของกราฟเส้นตรงให้ได้

7. การหาสมการของกราฟเส้นตรง

7.1 เลือกกราฟเส้นตรง ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งจุดบนเส้นตรง ตั้งชื่อจุดที่ได้เป็นจุด P จุด P นี้สามารถเลื่อนไป มาได้บนกราฟเส้นตรง

7.2 เลือกจุด P แล้วไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่ง วัดพิกัดที่ หนึ่ง (x) จะได้ค่า X_A เลือกจุด P แล้วไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งวัดพิกัดที่สอง (Y) จะได้ค่า Y_A

7.3 เลือก X_P และ Y_P แล้วไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งสร้างตาราง

การเพิ่มจำนวนแถวในตารางมีขั้นตอนดังนี้

1. เลือกตารางแล้วไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งเพิ่มตารางครั้งละ 1 แถว จากนั้นเพิ่มแถวของตารางโดยการเลื่อน จุด P ไปยังตำแหน่งที่ต้องการแล้วคลิกเมาส์เพื่อรับค่า X_p และ Y_p ของตำแหน่งใหม่
2. เลือกตารางกดแป้น + หรือ Shift และ + เพื่อเพิ่มแถวของตารางอีกหนึ่งแถว
3. เลือกจุด P แล้วลากไปยังตำแหน่งใหม่ คลิกเมาส์เพื่อรับค่า X_p และ Y_p ค่าใหม่
4. ทำซ้ำข้อ 2, 3 เมื่อต้องการเพิ่มจำนวนแถว
5. ถ้าต้องการลบจำนวนแถวให้กดแป้น -

เมื่อได้ข้อมูลมากพอ สามารถสรุปได้ว่า X และ Y มีความสัมพันธ์กันอย่างไร และสรุปออกมาเป็นสมการของกราฟเส้นตรงตามข้อมูลที่สังเกตได้

เลือกภาพของเส้นตรงแล้วไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งสมการจะได้สมการของกราฟเส้นตรง แล้วเปรียบเทียบกับสมการที่ได้จากการสังเกตข้อมูล

กิจกรรมที่ 45

การเขียนกราฟของภาคตัดกรวยโดยอาศัยบทนิยาม

พาราโบลา

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของพาราโบลา

พาราโบลา (Parabola) เป็นเซตของจุดทั้งหมดบนระนาบซึ่งอยู่ห่างจากจุด F ที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรง L ที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่ง เป็นระยะทางเท่ากัน

จุดที่อยู่ตรึงกับที่เรียกว่า โฟกัส (Focus) และเส้นตรงที่อยู่ตรึงกับที่นี้เรียกว่า เส้นบังคับ หรือ ไดรেকทริกซ์ (Directrix) ของพาราโบลา

การเขียนกราฟของพาราโบลาทำได้ดังนี้

1. สร้างเส้นตรงหนึ่งเส้นเพื่อให้เป็นเส้นไดเรกทริกซ์
2. สร้างจุดโฟกัส F
3. เลือกเส้นไดเรกทริกซ์แล้วสร้างจุด A บนเส้นตรงนี้
4. สร้างส่วนของเส้นตรง AF แล้วสร้างจุดกึ่งกลาง (B) บน \overline{AF}
5. สร้างเส้นตรงตั้งฉากกับ \overline{AF} ที่จุด B
6. สร้างเส้นตรงตั้งฉากกับเส้นไดเรกทริกซ์ที่จุด A ซึ่งจะตัดกับเส้นตั้งฉากในข้อ 5 ที่จุด C
7. เลือกจุด C ไปที่เมนูแสดงผล เลือกคำสั่งสร้างรอยจุดตัด
8. ลากจุด A ไปมา จะได้รอยของจุดเป็นกราฟของพาราโบลา

กิจกรรมที่ 46

การเขียนกราฟของภาคตัดกรวยโดยอาศัยบทนิยาม

วงรี

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงรี

วงรี (Ellipse) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบ ซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่ที่มีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้มีค่ามากกว่าระยะห่างระหว่างจุดตรึงอยู่กับที่ทั้งสอง จุดสองจุดที่อยู่ตรึงกับที่นี้ เรียกว่า โฟกัส (Focus) ของวงรี

การเขียนกราฟของวงรีทำได้ดังนี้

1. สร้างส่วนของเส้นตรง AB เพื่อใช้ความยาวเป็นค่าผลบวกคงตัว $2a$
2. เลือก \overline{AB} สร้างจุด X บน \overline{AB} แล้วสร้าง \overline{XA} และ \overline{XB}
3. สร้างจุด F_1 และ F_2 ให้อยู่ห่างกันพอสมควรแต่น้อยกว่า $2a$
4. สร้างวงกลมที่มี F_1 เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ \overline{XA}
5. สร้างวงกลมที่มี F_2 เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมีเท่ากับ \overline{XB} ตัดกับวงกลมในข้อ 4 ที่จุด P และ Q
6. เลือกจุด P และ Q ไปที่เมนูแสดงผล เลือกคำสั่งสร้างรอยจุดตัด
7. ลากจุด X เลื่อนไปมา จะได้รอยของจุดเป็นกราฟวงรี

กิจกรรมที่ 47

การเขียนกราฟของภาคตัดกรวยโดยอาศัยบทนิยาม

ไฮเพอร์โบลา

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่ มีค่าคงตัวโดยค่าคงตัวนั้นน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด F_1 และ F_2 ดังกล่าวนี้นี้เรียกว่า โฟกัส (Focus) ของไฮเพอร์โบลา

การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาทำได้ดังนี้

1. สร้างเส้นตรงเส้นหนึ่ง สร้างจุด A, B และ C บนเส้นตรงนี้ โดยความยาวของ \overline{AB} จะเป็นค่าของผลต่างคงตัว $2a$
2. สร้างจุด F_1 และจุด F_2 เป็นจุดโฟกัส ให้ห่างกันพอสมควร แต่มากกว่า $2a$
3. สร้างวงกลมที่มี F_1 เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมีเท่ากับ CA
4. สร้างวงกลมที่มี F_2 เป็นจุดศูนย์กลางและรัศมีเท่ากับ CB ตัดกับวงกลมในข้อ 3 ที่จุด P และ Q
5. เลือกจุด P และ Q ไปที่เมนูแสดงผล เลือกคำสั่งสร้างรอยจุดตัด
6. ลากจุด C ไปมาจะได้รอยจุดเป็นกราฟของไฮเพอร์โบลา

กิจกรรมที่ 48

การเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์

การเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์ เมื่อกำหนดโดเมนเป็น $(0, 2\pi)$ โดยอาศัยวงกลม 1 หน่วย

1. สร้างวงกลมที่มีขนาดแน่นอน
 - 1.1 กำหนดจุดใดๆ 1 จุด ตั้งชื่อจุด A
 - 1.2 สร้างจุดอีก 1 จุด ที่ห่างจากจุดแรก 2 ซม. โดยการเลื่อนขนานไปทางซ้ายมือ
 - 1.3 ที่จุด A สร้างวงกลมมีรัศมีเท่ากับจุดที่เกิดจากการเลื่อนขนาน
2. สร้างจุดกำเนิดที่ผูกพันกับวงกลมหนึ่งหน่วยที่สร้างขึ้น
 - 2.1 สร้างจุดที่เกิดจากการเลื่อนขนานจุด A ในแนวแกน X ห่าง $(2+1=3)$ ซม. เพื่อให้เป็นจุดกำเนิดของกราฟ ให้ชื่อว่าจุด O
 - 2.2 เลือกจุด O ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งกำหนดจุดกำเนิด จะได้จุดกำเนิดที่จุด O

เนื่องจากต้องการให้วงกลมที่เราสร้างมีรัศมีเท่ากับ 1 หน่วยเราสามารถปรับสเกลของแกนได้

ดังนี้ เลื่อนจุดบังคับหนึ่งหน่วย เพื่อปรับระยะ 1 หน่วยของสเกลให้เท่ากับรัศมีของวงกลม 1 หน่วย แล้วซ่อนจุดบังคับหนึ่งหน่วย
3. ที่จุด O ให้สร้างส่วนของเส้นตรงบนแกน X ที่มีความยาวเท่ากับเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย
 - 3.1 วัดความยาวของเส้นรอบวงของวงกลม A
 - 3.2 เลือกความยาวที่เลือกได้ ไปที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งระยะระยะทาง
 - 3.3 เลือกจุด O ไปที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งเลื่อนขนาน ที่ระยะระยะทางไว้
 - 3.4 ได้จุด O' ในตำแหน่งที่ต้องการ สร้างส่วนของเส้นตรง $\overline{OO'}$
4. กำหนดจุดกึ่งอิสระ บนวงกลมหนึ่งหน่วย 1 จุด ให้ชื่อว่าจุด P และจุดกึ่งอิสระบน $\overline{OO'}$ 1 จุด ให้ชื่อว่าจุด P₁
 1. สร้างจุดตัดที่จะใช้แสดงกราฟฟังก์ชันไซน์
 - 5.1 เลือกจุด P₁ บน $\overline{OO'}$ และเส้นตรง $\overline{OO'}$ ไปที่ เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นตั้งฉากจะได้เส้นตั้งฉากกับ $\overline{OO'}$ ผ่านจุดอิสระ
 - 5.2 เลือกจุด P บนเส้นรอบวงของวงกลม A และเส้น $\overline{OO'}$ ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งเส้นขนาน จะได้เส้นขนานกับ $\overline{OO'}$ และผ่านจุด P บนเส้นรอบวงของวงกลม
 - 5.3 เลือกเส้นตรงที่ขนานกับ $\overline{OO'}$ และผ่านจุด P บนเส้นรอบวงของวงกลม A กับเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ $\overline{OO'}$ และผ่านจุด P₁ บน $\overline{OO'}$ แล้วไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งสร้างจุดตัด ให้ชื่อว่าจุด Q
6. สร้างปุ่มคำสั่งเคลื่อนไหว
 - 6.1 เลือกจุด P บนเส้นรอบวงของวงกลม A และจุด P₁ ที่อยู่บน $\overline{OO'}$
 - 6.2 ไปที่เมนูแก้ไข เลือกปุ่มแสดงการทำงาน แล้วเลือกการเคลื่อนไหว จะได้กล่องโต้ตอบ

พิจารณาการเคลื่อนที่ของจุดบนส่วนของเส้นตรง เลื่อนไปข้างหน้า (*ทั้งจุดบนเส้นรอบวงกลม A และจุด P บน $\overline{OO'}$ ต้องใช้ความเร็วการเคลื่อนที่เท่ากัน)

7. สร้างปุ่มจุดเริ่มต้น โดยเลือกตามลำดับดังนี้

7.1 เลือกจุด P บนเส้นรอบวงของวงกลม A และเลือกจุดที่ใช้เป็นจุดสร้างเส้นรอบวงของวงกลม (จุด A') ตามลำดับ

7.2 เลือกจุด P_1 บน $\overline{OO'}$ และจุดกำเนิด O

7.3 ไปที่เมนูแก้ไข เลือกปุ่มแสดงการทำงาน เลือกการเคลื่อนที่ เมื่อกล่องโต้ตอบปรากฏ ให้เลือกอัตราเร็วชั่วขณะ เปลี่ยนชื่อป้ายเป็น “ไปที่จุดเริ่มต้น” แล้วคลิกตกลง ได้สื่อที่แสดงกราฟตามต้องการ

กิจกรรมที่ 49

กราฟของฟังก์ชันอดิศัย

ฟังก์ชันอดิศัย (Transcendental Function) เป็นฟังก์ชันที่มีใช้ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันอดิศัยที่รู้จักและคุ้นเคยกันดี ได้แก่ ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และฟังก์ชันลอการิทึม

ใน GSP มีสมบัติให้สามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันใดๆ ตามที่กำหนดให้ และปรับเปลี่ยนค่าคงตัว เพื่อพิจารณากราฟ ตลอดจนตรวจสอบค่าต่างๆ ได้โดยใช้คำสั่งง่ายๆ ดังนี้

การสร้างกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. ที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งพารามิเตอร์ใหม่ แล้วกำหนดพารามิเตอร์ 4 ตัว คือ a b c d โดยให้ค่าเป็นเท่าไรก็ได้

2. กำหนดฟังก์ชัน โดยไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ ดังนี้

2.1 ax จะได้ $f(x) = ax$

2.2 bx จะได้ $g(x) = bx$

2.3 cx จะได้ $h(x) = cx$

โดยเลือกจากค่าพารามิเตอร์ a , b , c และ d ที่กำหนดไว้ก่อนแล้วใส่ในฟังก์ชัน

3. เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = ax$

พิจารณากราฟของ $f(x) = ax$ เมื่อพารามิเตอร์เป็นบวกหรือลบ โดยใช้เครื่องหมาย + และ - บนคีย์บอร์ด ควบคุมการเปลี่ยนแปลงค่าพารามิเตอร์

4. เขียนกราฟ

$g(x) = bx$ ปรับค่า $b=3$

$h(x) = cx$ ปรับค่า $c=5$

พิจารณากราฟ ณ จุด (0,1)

5. สร้าง inverse ของฟังก์ชัน $f(x) = ax$ เมื่อ $a=2$ จากเมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ เลือกสมการ $x=f(y)$ จะเห็น y เกิดในกล่องโต้ตอบแทน x เขียนสมการ $f(y) = ay$ พิจารณากราฟเมื่อเปลี่ยนค่า a

นอกจากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลแล้ว ยังสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปแบบต่างๆ เช่น $b \cdot \sin(ax)$, $b \cdot \cos(ax)$, $b \cdot \tan(ax)$ และอื่นๆ เมื่อ a และ b เป็นพารามิเตอร์ซึ่งจากการพิจารณากราฟดังกล่าว จะช่วยเพิ่มความเข้าใจในเรื่องแอมพลิจูดและคาบของฟังก์ชันได้

กิจกรรมที่ 50

ฟังก์ชัน

การใช้ GSP สร้างสื่อการสอนเพื่อสร้างข้อความคาดการณ์เกี่ยวกับเรื่องความสัมพันธ์ระหว่าง x และ $f(x)$ นั้นสามารถทำได้หลายวิธี ตัวอย่างเช่น

1. ไปที่เมนูกราฟเลือก
 - 1.1 กำหนดระบบพิกัด
 - 1.2 สแนพจุด
 - 1.3 ซ่อนกริด
2. คัดลอกแกน X และวางลง พร้อมทั้งเลื่อนแกน X ที่คัดลอกมาวางให้จุดกำเนิดอยู่บนแกน Y และห่างจากแกน X เดิมพอสมควร
3. กำหนดชื่อแกนบน เป็นแกนของ X
4. กำหนดชื่อแกนล่าง เป็นแกนของ $f(x)$ แล้วซ่อนแกน Y และจุดย่อ/ขยายแกน
5. กำหนดจุดเลื่อนที่เป็นจุดอิสระบนแกน X
6. เลือกจุดอิสระบนแกน X (จากข้อ 3) แล้ววัดพิกัดที่หนึ่ง (x)
7. กำหนดฟังก์ชันโดยจากเมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ แล้วกำหนด $f(x) = 2x$ คำนวณค่า $f(x)$ จากเมนูการวัด โดยใช้พิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุดอิสระบนแกน x ที่วัดได้ในข้อ 4 แทนตัวแปร x ในฟังก์ชัน
8. วัดพิกัดทางแกน Y ของจุด O บนแกน $f(x)$
9. ใช้ค่าที่ได้จากข้อ 5 และ 6 ลงจุดแบบ (x,y) จากเมนูกราฟ โดยเลือกค่า $f(x)$ เป็นพิกัดที่ 1 (x) และค่าพิกัดทางแกน y ของจุด O บนแกน $f(x)$ เป็นพิกัดที่สอง (y)
10. ลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมต่อระหว่างจุดอิสระบนแกน X และจุดที่สองใหม่ในข้อ 7 แล้วตกแต่งตามต้องการ

จะได้สื่อการสอนที่สามารถทำการสังเกตแบบรูปของความสัมพันธ์ของสมาชิกบนแกน X และแกน $f(x)$ แล้วสร้างเป็นข้อความคาดการณ์และตรวจสอบด้วยการลากจุดที่กำหนดให้ไปมา จากตัวอย่างข้างต้นเงื่อนไขของความสัมพันธ์คือ $f(x) = 2x$

กิจกรรมที่ 51

ฟังก์ชัน (ต่อ)

ถ้าต้องการสร้างสื่อการสอนให้ค่าที่ปรากฏเป็นจำนวนเต็มมีขั้นตอนดังนี้

1. ไปที่เมนูกราฟเลือก
 - 1.1 กำหนดระบบพิกัด
 - 1.2 สแนพจุด
 - 1.3 ซ่อนกริด
2. คัดลอกแกน X และวาง เลื่อนแกน X ที่คัดลอกมาวางให้จุดกำเนิดอยู่บนแกน Y และห่างจากแกน X เดิมพอสมควร
3. กำหนดชื่อแกนบน เป็นแกนของ X กำหนดชื่อแกนล่าง เป็นแกน $f(x)$ แล้วซ่อนแกน Y และซ่อนจุดย่อ/ขยายแกนกำหนดจุดเคลื่อนที่อิสระบนแกน X
4. เลือกจุดอิสระบนแกน X (จากข้อ 3) แล้ววัดพิกัดที่หนึ่ง (x)
5. กำหนดให้พิกัด x ที่ได้จากข้อ 4 เป็นจำนวนเต็ม โดยไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณจะได้กล่องโต้ตอบเลือกฟังก์ชัน แล้วเติมค่า x ที่วัดได้ในวงเล็บ
6. ซ่อนพิกัดที่วัดได้จากข้อ 4 (ค่า x เป็นจำนวนจริง) เหลือค่า x ที่เป็นจำนวนเต็มเปลี่ยนชื่อเป็น x
7. วัดพิกัดที่สอง $f(y)$ ของจุดกำเนิดบนแกน X
8. เหลือค่าที่ได้จากการวัดลงจุดแบบ (x,y) บนแกน x ไปที่เมนูกราฟโดยใช้ค่า x_x จากข้อ 6 และ y_0 จากข้อ 7
9. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)$ ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ กำหนด $f(x) = 2(x-1)$ แล้วไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณ คำนวณหาค่า $f(x)$ โดยใช้ค่า x ที่เป็นจำนวนเต็ม (จากข้อ 5)
10. วัดพิกัดแกน Y ของจุดกำเนิดบนแกน $f(x)$
11. ลงจุดแบบ (x,y) บนแกน $f(x)$ โดยใช้ค่า $f(x)$ จากข้อ 9 เป็นพิกัดที่หนึ่ง และพิกัดที่สองจากข้อ 10
12. ลากเส้นเชื่อมต่อระหว่างจุดบนแกนทั้งสองที่ได้จากการลงจุด
13. สร้างปุ่มเลื่อน ตกแต่งตามความต้องการ

กิจกรรมที่ 52

เวกเตอร์

เวกเตอร์

บทนิยาม ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่าปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity) ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity) หรือเรียกสั้นๆ ว่า เวกเตอร์

จากบทนิยามจะพบว่า ปริมาณเวกเตอร์ประกอบด้วยสองส่วนที่สำคัญคือ ทิศทาง และ ขนาด ในเชิงเรขาคณิตแทนทิศทางด้วยหัวลูกศรและแทนขนาดด้วยความยาวของส่วนของเส้นตรง

ขั้นตอนการสร้างเวกเตอร์ มีดังนี้

1. สร้างตัวเลื่อน (Slider) 1 เส้น ในที่นี้คือส่วนของเส้นตรง PQ สำหรับการควบคุมขนาดของเวกเตอร์
2. สร้างจุดอิสระ 1 จุด (จุด A) เป็นจุดเริ่มต้นของเวกเตอร์
3. เลือกจุด A และตัวเลื่อน (ส่วนของเส้นตรง PQ) แล้วสร้างวงกลมที่มี A เป็นจุดศูนย์กลางรัศมี PQ
4. สร้างจุดบนส่วนของวงกลม 1 จุด (จุด B) เป็นจุดปลายของเวกเตอร์ สามารถเคลื่อนที่ได้บนเส้นรอบวงของวงกลม
5. สร้างส่วนของเส้นตรง AB เป็นขนาดของเวกเตอร์ AB
6. ที่จุด B สร้างหัวลูกศร แสดงทิศทางของเวกเตอร์ โดยเลือกจุด B แล้วเลื่อนขนานจุด B ไป 0.7 ซม. ในทิศ 0 องศา
7. เลือกจุด B (เป็นจุดศูนย์กลาง) และเลือกจุดที่ได้จากการเลื่อนขนานจุด B แล้วสร้างวงกลม
8. สร้างจุดตัดระหว่างส่วนของเส้นตรง AB และเส้นรอบวงของวงกลมได้จุด C
9. เลือกจุด C เลื่อนขนานจุด C เป็นระยะ 0.2 ซม. มุม 0 องศา
10. เลือกจุด C และจุดที่เกิดจากการเลื่อนขนานของจุด C สร้างวงกลม
11. สร้างจุดตัดระหว่างวงกลมเดิมกับวงกลมใหม่ และจุดตัดระหว่างวงกลมใหม่กับส่วนของเส้นตรง AB ได้จุด D, E และ F
12. เลือกจุด D, E, F และ B ตามลำดับ สร้างบริเวณภายในรูปสี่เหลี่ยม
13. ซ่อนจุดและเส้นรอบวงที่ไม่ต้องการแสดง จะได้เวกเตอร์ตามต้องการ

กิจกรรมที่ 53

การบวกเวกเตอร์

การบวกเวกเตอร์

นิยาม ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ใดๆ เลื่อน \vec{v} ให้จุดเริ่มต้นของ \vec{v} อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ \vec{u} ผลบวกของ \vec{u} และ \vec{v} เขียนแทนด้วย " $\vec{u} + \vec{v}$ " คือ เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ \vec{u} และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ \vec{v}

ขั้นตอนการสร้างสื่อการสอนเรื่องผลบวกเวกเตอร์

1. สร้างเวกเตอร์ 2 เวกเตอร์คือ เวกเตอร์ AB และ CD โดยมี a , b เป็นตัวเลื่อนเพื่อกำหนดขนาดของเวกเตอร์
2. สร้างจุดอิสระสองจุดคือจุด M และ N สำหรับเป็นตำแหน่งที่อยู่ของเวกเตอร์ AB และเวกเตอร์ CD
3. สร้างปุ่มเคลื่อนที่สำหรับเคลื่อนเวกเตอร์ AB และ CD กลับที่ โดยเลือกจุด A, M, C และ N ตามลำดับ แล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งแสดงการทำงาน เคลื่อนที่ ที่กล่องโต้ตอบเลือกความเร็วในการเคลื่อนที่เป็นช่วงขณะ (ทดสอบการทำงานของปุ่ม) ตั้งชื่อป้ายเป็นกลับ
4. สร้างปุ่มเคลื่อนที่ที่ C-->B โดยเลือกจุด C และ B ตามลำดับ (ในกรณีเวกเตอร์ AB และ CD อยู่ที่ตำแหน่ง M และ N ต้องใช้เมาส์ลากเวกเตอร์ทั้งสองออกจากตำแหน่ง M และ N ก่อน) แล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงานเคลื่อนที่ จะได้กล่องโต้ตอบ เลือกความเร็วในการเคลื่อนที่เป็นเร็ว หรือปานกลาง (ทดสอบการทำงานของปุ่ม)
5. สร้างเวกเตอร์ผลลัพธ์ โดยกำหนดจุดอิสระ 2 จุด แล้วสร้างเวกเตอร์ EF
6. สร้างปุ่มการเคลื่อนที่ F-->D เลือกความเร็วในการเคลื่อนที่แบบปานกลางหรือเร็ว
7. สร้างปุ่มการเคลื่อนที่ E-->A และ F-->A เลือกความเร็วในการเคลื่อนที่แบบช่วงขณะ เลือกปุ่มทั้งสองแล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งแสดงปุ่มการทำงาน แล้วเลือกการนำเสนอ จะได้กล่องโต้ตอบ เลือกทำงานพร้อมกัน แล้วตั้งชื่อป้ายเป็นกลับจุด A
8. สร้างปุ่มการนำเสนอ 2 ปุ่ม ดังนี้
 - 8.1 ปุ่มที่ 1 ปุ่ม “กลับไปจุดเริ่มต้น” มีขั้นตอนดังนี้
 - 1) เลือกปุ่มกลับ (ข้อ 3) และปุ่มกลับจุด A (ข้อ 7) แล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงานการนำเสนอ
 - 2) ที่กล่องโต้ตอบเลือก การทำงานพร้อมกัน แล้วตั้งชื่อป้าย “กลับไปจุดเริ่มต้น”
 - 8.2 ปุ่มที่ 2 ปุ่ม “ผลบวกของสองเวกเตอร์ (AB + CD)” มีขั้นตอนดังนี้
 - 1) เลือกปุ่มเคลื่อนที่ C-->B (ข้อ 4) และปุ่ม F-->D (ข้อ 8) แล้วไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงาน แล้วเลือกการนำเสนอ จะได้กล่องโต้ตอบ เลือกการทำงานตามลำดับ แล้วตั้งชื่อป้ายว่า “ผลบวกของสองเวกเตอร์ (AB + CD)”

กิจกรรมที่ 54

การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์

นิยาม นิเสธของ \vec{u} (negative of \vec{u}) คือเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับเวกเตอร์ของ \vec{u} แต่มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางของ \vec{u} แทนด้วย $-\vec{u}$

นิยาม ให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ใดๆ ผลลบของ \vec{u} กับ \vec{v} หมายถึงผลบวกของ \vec{u} และนิเสธของ \vec{v} เขียนแทนด้วย $\vec{u} - \vec{v}$

นั่นคือ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

การสร้างนิเสธของ \vec{u}

1. สร้างเวกเตอร์ 1 เวกเตอร์ เป็นเวกเตอร์ CD
2. ที่จุด C สร้างเส้นตั้งฉากกับส่วนของเส้นตรง CD
3. เลือกเส้นตั้งฉากเป็นเส้นสะท้อน
4. สะท้อนเวกเตอร์ CD ได้นิเสธของเวกเตอร์ CD

การสร้างสื่อการสอนเรื่องลบเวกเตอร์ เช่น เวกเตอร์ AB ลบด้วยเวกเตอร์ CD ทำเหมือนกับการบวกเวกเตอร์นั่นคือ เวกเตอร์ AB บวกด้วยนิเสธของเวกเตอร์ CD แต่ต้องเพิ่มปุ่มการซ่อน/แสดงเวกเตอร์ AB กับนิเสธของเวกเตอร์ AB เพื่อใช้ในการสร้างปุ่มการนำเสนอ

กิจกรรมที่ 55

กราฟของอสมการ

กำหนดการเชิงเส้น (Linear programming) สามารถช่วยในการตัดสินใจเกี่ยวกับปัญหาทรัพยากรที่มีอยู่อย่างจำกัด เพื่อให้ได้ประโยชน์สูงสุดแก่ผู้ตัดสินใจ วิธีการนี้ใช้ประยุกต์ในหลายด้าน เช่น ต้องการให้ได้กำไรสูงสุดภายใต้ต้นทุนจำกัด ต้องการเสียเงินในการซื้ออาหารน้อยที่สุด แต่ให้ได้รับสารอาหารมากที่สุด เป็นต้น การแก้ปัญหาจึงสามารถทำได้โดยการแก้สมการ และระบบสมการเชิงเส้นแล้วหาคำตอบที่ต้องการ ซึ่งใช้เทคนิคการหาสมการจุดประสงค์และอสมการข้อจำกัด แล้วนำมาเขียนกราฟของสมการต่อสมการ คำตอบจะอยู่ในบริเวณที่ซ้ำกันของกราฟ

ต่อไปนี้เป็นตัวอย่างเกี่ยวกับปัญหาที่ใช้กำหนดการเชิงเส้นพร้อมทั้งวิธีหาคำตอบจากกราฟ

ตัวอย่าง อุตสาหกรรมครัวเรือนแห่งหนึ่งผลิตนมเย็นและไอศกรีมทุกวัน สมมติว่านมเย็นแต่ละลิตรต้องใช้ นม 0.4 ลิตร และครีม 0.2 ลิตร ส่วนไอศกรีมแต่ละลิตรต้องใช้ นม 0.2 ลิตร และใช้ครีม 0.4 ลิตรจากส่วนผสม ดังกล่าวปรากฏว่าขายนมเย็นได้กำไรลิตรละ 8 บาท ส่วนไอศกรีมได้กำไรลิตรละ 10 บาท ถ้าในแต่ละวัน อุตสาหกรรมนี้มีนม 10 ลิตร และครีม 14 ลิตร เขาควรจะมีผลิตไอศกรีมและนมเย็นอย่างละเท่าใด จึงจะได้กำไรมากที่สุดต่อวัน

วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนลิตรของนมเย็นที่ผลิต

y เป็นจำนวนลิตรของไอศกรีมที่ผลิต

z เป็นผลกำไรทั้งหมด

สมการจุดประสงค์คือ $z = 8x + 10y$

$$0.4x + 0.2y \leq 10$$

$$0.2x + 0.4y \leq 14$$

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

เขียนกราฟของอสมการข้อจำกัด แต่ละอสมการดังนี้

การเขียนกราฟของอสมการ $x \geq 0$

1. จากเมนูกราฟกำหนดระบบพิกัด และซ่อนกริด
2. สร้างรังสีเพื่อแสดงค่า x ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 โดยเลือกที่จุดกำเนิด และจุดหนึ่งหน่วย ตามลำดับ สร้างรังสี
3. สร้างจุดบนรังสี แล้วเลือกที่จุดนั้นและเส้นรังสีเพื่อสร้างตั้งฉาก
4. จากเมนูแสดงผล เลือกสร้างรอบเส้นตั้งฉาก
5. เมื่อเลื่อนเส้นตั้งฉาก จะได้อาณาบริเวณที่แรเงาซึ่งแสดงให้เห็นกราฟ ของ $x \geq 0$

การเขียนกราฟของอสมการ $y \geq 0$

6. สร้างรังสีเพื่อแสดงค่า y ที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0 โดยเลือกจุดมาวางบนแกน y ตั้งชื่อจุดเป็น B เลือกที่จุดกำเนิดและจุด B ตามลำดับ สร้างรังสี จากนั้นซ่อนจุด B
7. เลือกที่เส้นรังสี สร้างจุดบนรังสี แล้วเลือกที่จุดนั้นและเส้นรังสี เพื่อสร้างเส้นตั้งฉาก
8. จากเมนูแสดงผล เลือกสร้างรอยเส้นตั้งฉาก เมื่อเลื่อนเส้นตั้งฉาก จะได้อาณา

บริเวณที่แรเงาที่แสดงให้เห็นกราฟของ $y \geq 0$

การเขียนกราฟของอสมการ $0.4x + 0.2y \leq 10$

1. จากอสมการ $0.4x + 0.2y \leq 10$ จะได้ $y \leq \frac{10 - 0.4x}{0.2}$
2. ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ พิมพ์ $f(x) = \frac{10 - 0.4x}{0.2}$ แล้วเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้
3. สร้างจุด M และ N บนกราฟของฟังก์ชัน เลือกที่เส้นกราฟของฟังก์ชัน เพื่อซ่อนเส้นกราฟ จากนั้นเลือกที่จุด M และ N เพื่อสร้างเส้นตรงแทนเส้นกราฟของฟังก์ชัน
4. เลือกที่จุด M และเส้นตรงที่แทนเส้นกราฟของฟังก์ชัน สร้างเส้นตั้งฉาก
5. สร้างจุดบนเส้นตั้งฉาก โดยเลือกวางจุดให้อยู่ใต้เส้นกราฟ ตั้งชื่อจุดเป็นจุด P ซ่อนเส้นตั้งฉาก จากนั้นเลือกที่จุด M และจุด P ตามลำดับ สร้างรังสี ซ่อนจุด P
6. สร้างจุดบนรังสี ตั้งชื่อจุด O เลือกจุด O และเส้นตรงที่อยู่บนกราฟ สร้างเส้นขนานจะได้อาณาบริเวณที่แรเงา ซึ่งจะแสดงกราฟของอสมการ $0.4x + 0.2y \leq 10$

การเขียนกราฟของอสมการ $0.2x + 0.4y \leq 14$

1. จากอสมการ $0.2x + 0.4y \leq 14$ จะได้ $y \leq \frac{14 - 0.2x}{0.4}$
2. ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ พิมพ์ $f(x) = \frac{14 - 0.2x}{0.4}$ แล้วเขียนกราฟของฟังก์ชันนี้
3. สร้างจุด S และ T บนกราฟของฟังก์ชัน เลือกที่เส้นกราฟของฟังก์ชัน เพื่อซ่อนเส้นกราฟ จากนั้นเลือกที่จุด S และ T เพื่อสร้างเส้นตรงแทนเส้นกราฟของฟังก์ชัน
4. เลือกจุด S และเส้นตรงที่แทนเส้นกราฟของฟังก์ชัน สร้างเส้นตั้งฉาก
5. สร้างจุดบนเส้นตั้งฉาก โดยเลือกวางจุดให้อยู่ใต้เส้นกราฟ ตั้งชื่อจุดเป็นจุด R ซ่อนเส้นตั้งฉาก จากนั้นเลือกที่จุด S และจุด R ตามลำดับ สร้างรังสี ซ่อนจุด R
6. สร้างจุดบนรังสี ตั้งชื่อจุด V เลือกจุด V และเส้นตรงที่อยู่บนกราฟ สร้างเส้นขนานจะได้อาณาบริเวณที่แรเงา ซึ่งจะแสดงกราฟของอสมการ $0.2x + 0.4y \leq 14$

การเขียนกราฟของสมการจุดประสงค์ $z = 8x + 10y$

1. จากอสมการ $z = 8x + 10y$ จะได้ $y = \frac{z - 8x}{10}$
2. สร้างพารามิเตอร์ใหม่ จากเมนูกราฟ ตั้งชื่อว่า z กำหนดค่าเริ่มต้นเป็น 0
3. ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งฟังก์ชันใหม่ พิมพ์ $f(x) = \frac{z - 8x}{10}$

4. จากนั้นเขียนกราฟฟังก์ชัน $y = \frac{z-8x}{10}$ เมื่อ $z=0$

เมื่อสร้างกราฟของสมการทั้งหมดแล้ว จะได้ส่วนแรเงาที่มีการซ้อนทับกัน

เซตของจุดที่อยู่ในอาณาบริเวณที่แรเงาซ้อนทับกัน เป็นอาณาบริเวณที่หาคำตอบได้ ซึ่งจุดทุกจุดในอาณาบริเวณนี้สอดคล้องสมการข้อจำกัดทั้งหมด และมีจุดมุมที่ใช้พิจารณาหาค่าต่ำสุดของสมการจุดประสงค์ เมื่อเขียนกราฟของสมการจุดประสงค์บนระบบพิกัดเดียวกัน (ในรูปคือเส้นประ) แล้วเลื่อนกราฟนี้ไปแบบขนานจะไปพบที่จุดมุม ซึ่งที่จุดมุมนี้จะเป็นจุดที่ใช้พิจารณาคำตอบได้

กิจกรรมที่ 56

เมทริกซ์

เราสามารถใช้ GSP ช่วยในการสื่อการสอนคณิตศาสตร์ในการทำงานแบบซ้ำๆ เช่น เรื่องเมทริกซ์ เพื่อลดความจำเจ และใช้เวลาในการฝึกการวิเคราะห์โจทย์ปัญหาให้มากขึ้น หากเป็นงานที่ครูมอบหมายให้นักเรียนสร้าง template ของการดำเนินการระหว่างเมทริกซ์ ก็จะช่วยให้นักเรียนจำบทนิยาม ทฤษฎี หรือสมบัติได้ง่ายขึ้น เช่น การบวก ลบ หรือ คูณ ระหว่างเมทริกซ์และการหา A' , A^{-1} และ $\det A$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ใดๆ เป็นต้น ทำให้นักเรียนมีเวลาในการศึกษาวิเคราะห์และแก้โจทย์ปัญหาโดยใช้เมทริกซ์แก้ระบบสมการมากขึ้น

วิธีการสร้างเมทริกซ์

1. กำหนดจุดอิสระใดๆ ตั้งชื่อว่าจุด A
2. สร้างส่วนบนของวงเล็บ ด้วยการเลื่อนขนานจุด A แบบเชิงซ้าย ระยะ 0.3 ซม. มุมคงที่ 0 องศา ได้จุด A' สร้างส่วนของเส้นตรง AA'
3. สร้างรังสี AA'
4. สร้างจุด B บนรังสี AA' เลื่อนขนานจุด B โดยเวกเตอร์ AA' ได้จุด B' สร้างส่วนของเส้นตรง BB'
5. สร้างเส้นตั้งฉากกับรังสี AA' ที่จุด A
6. สร้างเส้นตั้งฉากกับรังสี AA' ที่จุด B
7. สร้างจุด C บนเส้นตั้งฉากในข้อ 5
8. เลือกส่วนของเส้นตรง AA' และ BB' ให้เลื่อนขนานด้วยเวกเตอร์ AC
9. เชื่อมต่อจุดที่ได้จะได้รูปเมทริกซ์ที่ปรับขนาดได้ โดยซ่อนสิ่งที่ไม่ต้องการ

วิธีกำหนดเป็นเครื่องมือส่วนตัว

เลือกอ็อบเจกต์ที่ต้องการ ตามลำดับดังนี้ จุด A, จุด B, จุด C จากนั้นเลือกส่วนที่เหลือทั้งหมดโดยไม่จำเป็นต้องลำดับก็ได้

1. ไปที่เครื่องมือกำหนดเอง เลือกคำสั่งสร้างเครื่องมือใหม่ ตั้งชื่อ
2. เมื่อเรียกเครื่องมือกำหนดเองมาใช้แล้ว ที่ตำแหน่งจุด A และจุด B จะเป็นส่วนที่สามารถปรับยึดได้ตามขนาดของเมทริกซ์ที่ต้องการ

วิธีเรียกใช้งานวงเล็บ

ไปที่เครื่องมือกำหนดเอง เลือกชื่อเครื่องมือที่เราตั้งชื่อไว้ นำมาไว้ที่ๆ ต้องการได้

วิธีกำหนดสมาชิกในเมทริกซ์

ใช้พารามิเตอร์ในเมนูกราฟ เพื่อกำหนดค่าที่เปลี่ยนแปลงได้ เช่น เมทริกซ์ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

วิธีการสร้างอีกวิธีหนึ่งมีขั้นตอนดังนี้

ดังนี้

1. ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งพารามิเตอร์ใหม่ จะได้กล่องโต้ตอบ ให้เปลี่ยนแปลงค่า โดยเติมค่า

a[11] ในช่องชื่อ และ 1 ในช่องค่า

a[12] ในช่องชื่อ และ -1 ในช่องค่า

a[21] ในช่องชื่อ และ 3 ในช่องค่า

a[22] ในช่องชื่อ และ 2 ในช่องค่า

2. คลิกขวาที่พารามิเตอร์เพื่อเลือกสมบัติ จากกล่องโต้ตอบ สมบัติของพารามิเตอร์ เลือกแผนรายการค่าต่างๆ ปรับค่าความเที่ยงเป็นจำนวนเต็ม จะได้ดังนี้

$$a_{11} = 1, a_{12} = -1$$

$$a_{21} = 3, a_{22} = 2$$

3. วิธีเปลี่ยนป้ายชื่อ ให้คลิกขวาที่พารามิเตอร์แต่ละค่า จะได้กล่องสมบัติของพารามิเตอร์ แล้วทำการลบ (delete) ชื่อออกจากป้ายจะได้

1 -1

3 2

ยกไปวางให้ตรงตำแหน่งที่ต้องการ

การคำนวณในแต่ละคู่ของสมาชิก สามารถทำได้ด้วยคำสั่งคำนวณ จากเมนูการวัด โดยอาศัยนิยามสมบัติ หรือทฤษฎีเกี่ยวกับเมทริกซ์ เพื่อหาค่าของสมาชิกตัวใหม่ แล้วนำไปใส่ในเมทริกซ์ใหม่ที่เป็นผลลัพธ์ ทำให้เมื่อกำหนดเมทริกซ์ A ให้สามารถแสดงเมทริกซ์ A' , A^{-1} และ $\det A$ ได้

กิจกรรมที่ 57

ลิมิตของฟังก์ชัน

ในการศึกษาเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน เราสามารถสร้างสื่อง่ายๆ เพื่อให้นักเรียนเห็นภาพ ของค่า x ที่เข้าใกล้ a และค่าลิมิตของฟังก์ชัน ได้ชัดเจนขึ้นโดยมีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. ไปที่เมนูกราฟ กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \frac{(x-2)^2}{16} + 1$ และวาดกราฟของฟังก์ชันนี้
2. สร้างจุด 1 จุดบนแกน X ให้ชื่อว่า “a” ไปที่เมนูการวัดหาพิกัดที่หนึ่ง (x) ของ a จะได้ x_a
3. ไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณ เพื่อหาค่า $f(x_a)$ แล้วเลือก x_a และ $f(x_a)$ ตามลำดับ ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งลงจุดบน (x,y) จะได้จุด $(x_a, f(x_a))$ บนกราฟของ f
4. จากเมนูการพิกัดสร้างพารามิเตอร์ใหม่ สร้างพารามิเตอร์ t=0
5. เลือก t=0 และ $f(x_a)$ ตามลำดับ แล้วไปที่เมนูกราฟ ใช้คำสั่งลงจุดแบบ (x,y) จะได้จุด $(0, f(x_a))$ บนแกน Y
6. ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งส่วนของเส้นตรง เพื่อสร้างเส้นตรงเชื่อมจุดที่ลงไว้ เมื่อเลื่อน a ไปบนแกน X จะได้ค่า $f(x_a)$ บนแกน Y
7. เลือกจุด a ไปที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งเลื่อนขนานแบบเชิงขั้ว ระยะคงที่ 3 ซม.และมุมคงที่ 0 องศา จะได้จุดปลายขวาของ a ห่างจาก a ระยะทาง 3 หน่วย และไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งส่วนของเส้นตรง เพื่อสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อม 2 จุดนี้
8. สร้างจุด 1 จุด บนส่วนของเส้นตรงในข้อ 7 ให้ชื่อว่า x_1 จุดนี้จะเคลื่อนที่บนส่วนของเส้นตรงที่สร้างขึ้นเท่านั้น แล้วไปเมนูการวัด เลือกคำสั่งหาพิกัดที่หนึ่งของ x_1 จะได้ค่า x_{x1}
9. ไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณ เลือกฟังก์ชัน f และเลือก x_{x1} จะได้ค่า $f(x_{x1})$
10. เลือก x_{x1} และ $f(x_{x1})$ ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งลงจุดแบบ (x,y) จะได้จุด $(x_{x1}, f(x_{x1}))$
11. เลือก t=0 และ $f(x_{x1})$ ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งลงจุดแบบ (x,y) จะได้จุด $(0, f(x_{x1}))$
12. ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งส่วนของเส้นตรง เพื่อสร้างเส้นตรงเชื่อมจุดที่ลงไว้ เมื่อเลื่อนจุด x_1 เข้าใกล้ a ภาพดังกล่าวจะแสดงค่าของ $f(x_1)$ เมื่อ x เข้าใกล้ a จะเห็นว่า $f(x_1)$ เข้าใกล้ $f(a)$ ด้วย
13. ในทำนองเดียวกัน เราสามารถสร้างจุด x_2 ทางซ้ายของจุด a อยู่บนส่วนของเส้นตรง ระยะห่างจากจุด a ระยะทาง 3 ซม. ได้ เช่นเดียวกัน (ทำนองเดียวกับข้อ 7-12)
14. หลังจากสร้างภาพแสดงค่าของ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ เสร็จแล้ว ให้เลือกจุด x_1 และ a ตามลำดับ ไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงาน แล้วเลือกการเคลื่อนที่ จะได้ป้ายการเคลื่อนที่ $x_1 \rightarrow a$
15. เลือกจุด x_2 และจุด a ตามลำดับ ไปที่เมนูแก้ไข เลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงาน แล้วเลือกคำสั่งการเคลื่อนที่ จะได้ป้ายการเคลื่อนที่ $x_2 \rightarrow a$
16. กดปุ่มในข้อ 14 และข้อ 15 จะได้ภาพการเคลื่อนที่ของ x เข้าใกล้ a ทั้งทางซ้ายและทางขวาของ a ซึ่งจะเห็นภาพของ $f(x_1)$ และ $f(x_2)$ ต่างก็เคลื่อนเข้าไปหาค่า $f(a)$ ได้เช่นเดียวกัน

17. ในกรณีฟังก์ชันที่กำหนดให้ ไม่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x = a$ ใน GSP จะสามารถแสดงลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้ายและทางขวาได้โดยใช้หลักการเดียวกัน

กิจกรรมที่ 58

ลิมิตของฟังก์ชัน (ต่อ)

การศึกษาเรื่องลิมิตเป็นสิ่งสำคัญมากสำหรับวิชาแคลคูลัสเราจะพิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าจริง และศึกษานิยามของลิมิตโดยละเอียดดังนี้

เราจะนิยามว่า f มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L เมื่อ x เข้าใกล้ a (ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$) ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$ สำหรับทุก $0 < |x - a| < \delta$

เพื่อให้เข้าใจถึงจำนวนจริง ε และ δ ที่มีบทบาทมากสำหรับนิยามของลิมิต เราสามารถทำได้อย่างง่ายดาย ได้จากบทนิยามต่อไปนี้

เมื่อเรากล่าวว่า $|f(x) - L| < \varepsilon$ (ทุก $\varepsilon > 0$)

เราจะได้ว่า $-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

หรือ $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$

หรือพูดง่ายๆ ว่า $f(x)$ มีค่าใกล้ L

เราสามารถสร้างสื่อให้เห็นภาพได้ว่า ถ้าเราสามารถกำหนดช่วง $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ ให้เล็กมากเท่าใดก็ได้ โดยใช้ ε ซึ่งเป็นจำนวนจริงบวกเป็นตัวกำหนด และเมื่อ $f(x)$ อยู่ในช่วง $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ แสดงว่า $f(x)$ กับ L มีค่าห่างกันไม่เกิน ε

การสร้างสื่อเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน มีขั้นตอนดังนี้

1. กำหนดค่า L บนแกน Y เลื่อนขนาน L ไป 1 หน่วยในแนวแกน Y (ใช้คำสั่งเลื่อนขนาน 1 หน่วย 90 องศา)
2. ลากเส้นตรงผ่านจุด 2 จุดนั้น
3. สร้างตัวเลื่อน ε ความยาวพอสมควร
4. ใช้ L เป็นจุดศูนย์กลางเขียนวงกลมรัศมี ε หาจุดตัดของเส้นกับวงกลม ตั้งชื่อว่า $L + \varepsilon$ และ $L - \varepsilon$ ตามลำดับ
5. สร้างเส้นเชื่อมจุด $L + \varepsilon$ และ $L - \varepsilon$ จะมี L เป็นจุดกึ่งกลางช่วง
6. ลองเลื่อนความยาวตัวเลื่อน ε จะเห็นช่วง $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ เปลี่ยนไปด้วย

ต่อไปเราจะสร้างสื่อเพื่อเข้าใจเกี่ยวกับค่า δ (delta) เมื่อเราต้องการแสดงให้เห็นภาพที่ $x \rightarrow a^-$ เราสามารถทำได้ตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. สร้างจุด a บนแกน X แล้วเลื่อนขนาน a ไปในแนวนอนทางซ้ายมือ 1 หน่วย ลากเส้นตรงผ่านจุด a และจุดที่เกิดขึ้นใหม่
2. กำหนดค่า δ โดยวิธีสร้างตัวเลื่อน δ ความยาวพอสมควร

3. สร้างวงกลม โดยมี a เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว δ แล้วหาจุดตัดของวงกลมกับเส้นตรงที่ผ่านจุด a ได้จุด 2 จุด

4. เลือกจุดทางซ้ายของ a ให้ชื่อจุดนั้นว่า $a - \delta$

5. ขอนเส้นตรงที่ผ่านจุด a แล้วสร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด $a - \delta$ กับจุด a

6. สร้างจุด 1 จุด บนส่วนของเส้นตรงนั้น ให้ชื่อว่า X ซึ่ง X สามารถเคลื่อนที่ไปมาได้บนส่วนของเส้นตรงได้ จะได้ว่า $a - \delta < X < a + \delta$

7. สร้างหัวลูกศรตามใจชอบให้มีทิศทางพุ่งหาจุด a

8. ทำปุมเคลื่อนที่ X โดยให้เคลื่อนที่เริ่มจากจุด $a - \delta$ ไปยังจุด a

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเราต้องการแสดงให้เห็นภาพที่ $X \rightarrow a^+$ เราก็สามารถสร้างได้โดยกระทำเช่นเดียวกัน ตั้งแต่ข้อ 1-4 โดยเลือกจุดตัดทางด้านขวาของจุด a และให้ชื่อจุดนั้นว่า $a + \delta$

หลังจากนั้นเมื่อรวมภาพ $X \rightarrow a^-$ และ $X \rightarrow a^+$ ก็จะได้ภาพของ $X \rightarrow a$ (หมายถึงเข้าใกล้ a ทั้งทางซ้ายและทางขวา)

นั่นคือ X สามารถเคลื่อนไหวได้บนช่วง $(a - \delta, a + \delta)$ ซึ่งแปลว่า X มีโอกาสเท่ากับ a ได้แต่เมื่อเรากล่าวว่า $0 < |x - a| < \delta$ หมายความว่า $a - \delta < X < a + \delta$ และ $x \neq a$ ที่จุด $x \neq a$ นั้นเป็นส่วนที่แสดงให้เห็นชัดเจนได้ยาก ดังนั้นเราจึงจำเป็นต้องอาศัยอธิบายเพิ่มเติมในขณะที่ใช้สื่อ ต้องเน้นย้ำว่าเราจะยกเว้น กรณีที่ $X = a$ ไว้ 1 จุด

กิจกรรมที่ 59

กราฟเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด ที่กำหนดให้

การสร้างเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P ที่กำหนดให้มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

- กำหนดพารามิเตอร์ใหม่ a, b, c, d จากเมนูกราฟใช้คำสั่งฟังก์ชันใหม่ สร้างฟังก์ชัน

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

- จากเมนูกราฟ วาดกราฟของฟังก์ชัน f(x)

- กำหนดจุด P บนกราฟของฟังก์ชัน f และจากเมนูการวัด หาพิกัดที่หนึ่ง (x) ของจุด P และหาพิกัดที่ 2 (y) ของจุด P จะได้ค่า x_p และ y_p

- เลือกฟังก์ชัน $f'(x)$ และจากเมนูกราฟใช้คำสั่งอนุพันธ์จะได้ $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

- จากเมนูการวัดเลือกคำสั่งคำนวณ แล้วเลือก f(x) และจุด x_p ตามลำดับจะได้ $f(x_p) = m$

- เราต้องการสร้างเส้นสัมผัส L ที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_p, y_p) ซึ่งมีสมการ

$y = m(x - x_p) + y_p$ เมื่อ $m = f'(x)$ เราจะได้สร้างฟังก์ชันเส้นตรง L นี้ได้โดยจากเมนูกราฟ ใช้คำสั่งฟังก์ชันใหม่โดยใช้ชื่อ g(x) , $g(x) = m(x - x_p) + y_p$

- จากเมนูกราฟ ใช้คำสั่ง เขียนกราฟฟังก์ชัน จะได้กราฟของเส้นตรง ซึ่งผ่านจุด P และสัมผัสกราฟของ f ที่จุด P

- เลื่อนจุด P ไปบนส่วนโค้งของฟังก์ชัน f จะพบว่า เส้นสัมผัสเปลี่ยนแปลงไปตามจุด P

- กำหนดจุด Q บนกราฟของ f(x) แล้วสร้างเส้นตรงผ่านจุด P และจุด Q จากเมนูสร้าง ใช้เครื่องมือ ลูกศร เคลื่อนที่ Q ให้เข้าใกล้ P แล้วสังเกตเส้นตรงที่ผ่านจุด P และจุด Q จะพบว่าเมื่อ Q เคลื่อนที่เข้าใกล้ P เส้นตรง PQ จะเคลื่อนเข้าใกล้เส้นสัมผัส L ดังนั้น ความชันของเส้นตรง PQ จะเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัส L

$$\text{ความชันของเส้นตรง PQ} = \frac{f(x_Q) - f(x_p)}{x_Q - x_p}$$

ถ้าเราให้ $h = x_Q - x_p$ เมื่อ $Q \rightarrow P$ จะได้ $x_Q \rightarrow x_p$ และทำให้ $h = 0$

ดังนั้น เมื่อ $Q \rightarrow P$ จะทำให้ $h = 0$

นั่นคือ เมื่อเราพิจารณา ความชันของเส้นตรง PQ เมื่อ $Q \rightarrow P$ จะเห็นว่า ความชันของเส้นตรง PQ มีค่าเข้าใกล้ความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่ P ซึ่งทำให้เราจะพอสังเกตได้ว่า

$$\lim_{x_Q \rightarrow x_p} \frac{f(x_Q) - f(x_p)}{x_Q - x_p}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_p + h) - f(x_p)}{h}$$

เป็นค่าความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด P

กิจกรรมที่ 60

กราฟของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

การกราฟของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ในที่นี้เขียนโดยอาศัยความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุดต่างๆ บนกราฟของฟังก์ชัน f มีขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. กำหนด พารามิเตอร์ a, b, c , และ d จากเมนูกราฟ เขียนกราฟของฟังก์ชันใหม่

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

2. กำหนด A บนกราฟของฟังก์ชัน f ใช้เมนูการวัดหาพิกัดที่หนึ่ง (x_A)

3. สร้างกราฟของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง f ที่จุด A (ดูวิธีสร้างจากหัวข้อวิธีสร้างเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุดที่กำหนดให้)

4. เลือกกราฟเส้นสัมผัสจากเมนูการวัดใช้คำสั่งความชันหาค่าความชันของเส้นสัมผัสที่จุด A เปลี่ยนป้ายความชันของเส้นสัมผัสที่ A เป็น m

5. เลือก x_A และ m ตามลำดับ ใช้เมนูกราฟลงจุดแบบ (x,y) ให้ชื่อจุดดังกล่าวว่า B

6. สร้างปุ่มแสดงการทำงานของกราฟเคลื่อนไหวของจุด A โดยคลิกเลือกจุด A จากเมนูแก้ไขเลือกคำสั่งปุ่มแสดงการทำงานของกราฟ เลือกคำสั่งแสดงการเคลื่อนไหว

7. เลือก B และจากเมนูแสดงผลใช้คำสั่งแสดงรอยจุด (เราจะให้มีรอยการเคลื่อนที่ของ B)

8. กดปุ่มการเคลื่อนไหวของจุด A สังเกตให้ A เคลื่อนไหวจะทำให้ทั้งจุด A และ B เคลื่อนไหว สังเกตรอยจุด ที่เกิดขึ้นรอยดังกล่าวจะเป็นกราฟของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f นั้น

9. เราจะสร้างตารางพิกัดที่ 1 ของจุด A และ ค่าความชันของเส้นสัมผัสของเส้นโค้งแล้วนำมาลงจุดแบบ (x,y) เพื่อให้ความสัมพันธ์ระหว่างจุด A และ จุด B และเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด A รวมทั้งความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด A โดยเลือก x_A และ m ซึ่งเป็นความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้งที่จุด A ตามลำดับ และจากเมนูกราฟเลือกคำสั่งตาราง

10. ดับเบิลคลิกที่ตารางเพื่อเพิ่มข้อมูลในตารางใช้เครื่องมือลูกศร เพื่อเคลื่อนที่จุด A ไปเล็กน้อยข้อมูลในตารางจะเปลี่ยนไป เพิ่มข้อมูลในตารางที่แตกต่างกันประมาณ 20 ข้อมูล

11. เลือกตารางและจากเมนูกราฟ เลือกคำสั่ง ลงข้อมูลในตารางจะได้จุดต่างๆ จากตารางบนหน้าจอ

12. จากเมนูแสดงผลเลือกคำสั่งลบรอย (เพื่อลบรอยของจุด B ที่เกิดขึ้นก่อนหน้านี้)

13. เลือกจุด A และ B และจากเมนูสร้างใช้คำสั่งสร้างส่วนของเส้นตรง(เลือกใช้เส้นประ) เราจะได้เส้นเชื่อมจุด A และ B

14. ลองเคลื่อนจุด A ไปบนกราฟของฟังก์ชัน f แล้วสังเกตความสัมพันธ์ระหว่างจุด A และจุด B และเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด A รวมทั้งความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง ณ จุด A ขณะนั้นด้วย

การสร้างสื่อประกอบการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ในสาระการวิเคราะห์ข้อมูลและความน่าจะเป็น

กิจกรรมที่ 61

แผนภูมิแท่ง

การสร้างเครื่องมือกำหนดเองสำหรับแผนภูมิแท่ง

การสร้างเครื่องมือกำหนดเองสำหรับใช้ในการนำเสนอแผนภูมิแท่ง ในที่นี้จะกำหนดความกว้างของแท่งมีขนาดคงที่ 1 หน่วย มีขั้นตอนการสร้างดังนี้

1. ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งกำหนดระบบพิกัด และซ่อนกริด
2. เลือกเส้นแกน Y ไปที่เมนูสร้าง เลือกคำสั่งจุดบนแกน ตั้งชื่อจุด A
3. เลือกจุด A วัดค่าพิกัดที่สอง (Y) จากเมนูการวัด
4. สร้างจุดอิสระ B เลื่อนขนานจุด B ไป 14 หน่วย โดยเลือกจุด B ไปที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งเลื่อนขนาน กำหนดแบบเชิงซ้าย ระยะทางคงที่ 1.0 ซม. มุม 0 องศา จะได้จุด B'
5. สร้างส่วนของเส้นตรง BB'
6. กำหนดความสูงของแท่ง โดยความสูงจะมีค่าตาม Y_A ไปที่เมนูการวัด เลือกคำสั่งคำนวณคลิกเลือกที่ค่าที่ได้จากการวัดพิกัดที่สอง (Y_A) คูณด้วย 1 คลิกเลือกหน่วยเป็น ซม. และคลิกตกลง
7. เลือก $Y_A \cdot 1$ ซม. = 6.32 ซม. จากนั้นไปที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งระบุระยะทาง
8. เลือกจุด B, B' และส่วนของเส้นตรง BB' แล้วไปที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งเลื่อนขนานจะปรากฏกล่องโต้ตอบ ซึ่งระบุระยะทางของ Y_A ไว้ แล้วให้เลือกการเลื่อนขนานแบบเชิงซ้าย กำหนดมุมคงที่เป็น 90 องศา จะได้จุดและส่วนของเส้นตรงที่เกิดจากการเลื่อนขนาน
9. เชื่อมต่อจุดให้เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก และสร้างบริเวณภายใน

การเก็บเครื่องมือสร้างแท่งของแผนภูมิ

6. เลือกจุด B', ส่วนของเส้นตรง BB', จุด B', ค่า $Y_A \cdot 1$ ซม. = 6.32 ซม. และเลือกส่วนที่เหลือทั้งหมดคือ ส่วนของเส้นตรง จุด และบริเวณภายใน
7. ไปที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง เลือกคำสั่งสร้างเครื่องมือใหม่ ตั้งชื่อ “แท่งแผนภูมิ” คลิกตกลง

การเรียกใช้เครื่องมือแท่งแผนภูมิในการสร้างแผนภูมิแท่ง

1. กำหนดข้อมูลที่ต้องการแสดงเป็นแผนภูมิแท่ง โดยใช้พารามิเตอร์เป็นค่าแสดงข้อมูล ไปที่เมนูกราฟ เลือกคำสั่งพารามิเตอร์ใหม่ A ระบุหน่วยเป็น ซม. และสร้างพารามิเตอร์ใหม่เพิ่มตามจำนวนที่ต้องการแล้วกำหนดค่าแตกต่างกัน ซึ่งในแต่ละพารามิเตอร์ที่สร้างให้ระบุหน่วยเป็น ซม.
2. การเรียกใช้เครื่องมือ “แท่งแผนภูมิ” ที่เก็บไว้แล้ว ไปที่ปุ่มเครื่องมือกำหนดเอง เลือกชื่อเครื่องมือ “แท่งแผนภูมิ” จะปรากฏส่วนของเส้นตรงที่ปลายลูกศร เลือกคลิกวางที่ระนาบแกน X เมื่อคลิกวางแล้ว จากนั้นให้เลือกค่าพารามิเตอร์ที่สร้างเตรียมไว้แล้ว 1 ค่า จะได้แท่งที่มีความสูงตามค่าพารามิเตอร์นั้นขึ้นมา

3. สร้างแท่งกราฟแสดงค่าอื่นๆ ในทำนองเดียวกันกับข้อ 2
4. ปรับความสวยงามของค่าพารามิเตอร์แต่ละค่า โดยคลิกเมาส์ทางขวา เลือกคำสั่งแก้ไขพารามิเตอร์ ให้เอาหน่วย ซม. ออกไป ทำเช่นเดียวกันกับทุกๆ ค่า
5. เมื่อต้องการเปลี่ยนแปลงค่า ให้คลิกเลือกที่ค่าพารามิเตอร์นั้น แล้วกดแป้นเครื่องหมาย + เพื่อเพิ่มข้อมูล หรือกดแป้นเครื่องหมาย - เพื่อลดค่าของข้อมูล

กิจกรรมที่ 62

แผนภูมิรูปวงกลม

การนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภูมิรูปวงกลม ใช้วิธีแบ่งเนื้อของรูปวงกลมเป็นส่วนย่อยตามปริมาณที่ต้องการเปรียบเทียบ มีขั้นตอนการสร้างดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ชายคนหนึ่งได้รับเงินเดือนๆ ละ 12,000 บาท มีรายจ่ายในรอบเดือนมีนาคม ดังตารางต่อไปนี้

รายจ่าย	จำนวนเงิน(บาท)
ค่าอาหาร	3,600
ค่าเสื้อผ้า	1,200
ฝากธนาคาร	2,400
เบ็ดเตล็ด	4,800
รวม	12,000

1. สร้างพารามิเตอร์จากเมนูกราฟ โดยคลิกเลือกคำสั่งพารามิเตอร์ จากเมนูกราฟ ซึ่งในกล่องโต้ตอบพารามิเตอร์ใหม่ ส่วนที่เป็นช่องของชื่อให้ใส่ข้อความ “ค่าอาหาร” ส่วนที่เป็นช่องของค่าให้ใส่ตัวเลข “3600” และส่วนของ “หน่วย” ให้เลือกแบบ “ไม่กำหนด” แล้วคลิกตกลง จะได้ ค่าอาหาร เท่ากับ 3600.00 เป็นพารามิเตอร์ตัวแรก ในทำนองเดียวกันเลือกสร้างพารามิเตอร์อีก 3 ตัว โดยใส่ชื่อและค่าดังข้อมูลในตารางจะได้

ค่าอาหาร = 3600.00

ค่าเสื้อผ้า = 1200.00

ฝากธนาคาร = 2400.00

เบ็ดเตล็ด = 4800.00

2. หาผลรวมของค่าพารามิเตอร์ทั้งสี่ โดยใช้คำสั่งคำนวณจากเมนูการวัด เลือกพารามิเตอร์และเครื่องหมายบวกที่เครื่องหมายจนครบ 4 ตัว เมื่อหาผลรวมได้แล้วเปลี่ยนป้ายชื่อเป็นคำว่า “รวม” จะได้ผลปรากฏเป็นดังนี้ “รวม = 12000.00”

3. คำนวณหาขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางซึ่งเป็นมุมยอดของเซกเตอร์ของส่วนที่จะแสดงเป็นค่าอาหาร โดยเลือกคำสั่งคำนวณจากเมนูการวัด จะได้หน้าจอเครื่องหมาย ให้ใส่ค่าที่จะหาคำตอบที่ละคำตอบ ดังนี้ เลือกพารามิเตอร์ค่าอาหาร เครื่องหมายหาร ค่าผลรวม เครื่องหมายคูณ (*) และ 360 ตามลำดับ แล้วเลือกปุ่มเมนูหน่วย จะมีเมนูใหม่ขึ้นมา ให้เลือกหน่วยเป็น “องศา” แล้วคลิกตกลง จะได้ค่าของมุมมีหน่วยเป็นองศา ดังนี้

(ค่าเสื้อผ้า/รวม) • 360องศา = 360.00 องศา

(ฝากธนาคาร/รวม) • 360 องศา = 72.00 องศา

และ (เบ็ดเตล็ด/รวม) • 360องศา = 144.00 องศา

4. สร้างรูปวงกลมขึ้นมา 1 รูป ขนาดพอสมควร ช้อนจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงกลม และสร้างจุดใดๆ ขึ้นมาที่วงกลม 1 จุด (จุดนี้สามารถวิ่งอยู่บนเส้นของวงกลมได้)

5. สร้างส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุดนี้กับจุดศูนย์กลาง

6. เลือกจุดศูนย์กลางของวงกลม เลือกคำสั่งระบุจุดศูนย์กลางจากเมนูการแปลง

7. เลือกค่ามุมแรกที่วัดได้ แล้วเลือกคำสั่งระบุมุมจากเมนูการแปลง (เพื่อจะหมุนตามมุมที่ระบุ)
8. เลือกส่วนของเส้นตรงและจุดบนเส้นรอบวง ไปที่เมนูการแปลง เลือกคำสั่งหมุน จะปรากฏกล่องโต้ตอบเป็นการหมุนตามค่ามุมที่ระบุไว้ คลิกหมุนจะได้เซกเตอร์ซึ่งเป็นส่วนของค่าอาหาร
9. ทำเช่นเดียวกันจนครบตามจำนวนมุมทั้งหมด ทำการระบายสีแต่ละส่วน (การระบายสีแต่ละส่วนต้องสร้างส่วนโค้งของวงกลมที่รองรับด้วยมุมที่จุดศูนย์กลางวงกลมนั้นๆ ก่อนแล้วจึงเลือกระบายสีบริเวณภายในเซกเตอร์ของส่วนโค้ง)