แผนบริหารการสอนประจำบท
บทที่ 7 ผลการแปลงลาปลาซ

เนื้อหาประจำบท

1. ผลการแปลงลาปลาซ
2. สมบัติบางประการของผลการแปลงลาปลาซ
   2.1 สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ
   2.2 สมบัติผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระ
   2.3 สมบัติการเลื่อนขนานของผลการแปลงลาปลาซ
   2.4 ผลการแปลงลาปลาซที่เป็นฟังก์ชันแกมมา
   2.5 ผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันเป็นคาบ
   2.6 ผลการแปลงลาปลาซผกผัน
3. การหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยผลการแปลงลาปลาซ

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนศึกษาบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายบทนิยาม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซได้
2. อธิบายสมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซได้
3. อธิบายสมบัติผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระได้
4. อธิบายสมบัติการเลื่อนขนานของผลการแปลงลาปลาซได้
5. หาผลการแปลงลาปลาซที่เป็นฟังก์ชันแกมมาได้
6. หาผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันเป็นคาบได้
7. หาผลการแปลงลาปลาซผกผันได้
8. หาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขเริ่มต้นด้วยผลการแปลงลาปลาซได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายถึงทฤษฎีบท บทนิยาม และวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยวิธีผลการแปลงลาปลาซ มีการตั้งคำถาม ตอบคำถามระหว่างผู้สอนและผู้เรียน
2. แสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยวิธีผลการแปลงลาปลาซ

3. ตรวจสอบผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยวิธีผลการแปลงลาปลาซโดยใช้โปรแกรม Wolfram Alpha

4. ให้ผู้เรียนทำใบกิจกรรม

5. สืบค้นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยวิธีผลการแปลงลาปลาซทางอินเทอร์เน็ตเพิ่มเติม

6. อภิปราย สรุปประเด็นสำคัญที่เกี่ยวกับผลการแปลงลาปลาซ

7. สรุป และซักถามความเข้าใจท้ายบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เครื่องคอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต
2. เพาเวอร์พอยต์ เรื่องผลการแปลงลาปลาซ
3. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์
4. โปรแกรม Wolfram Alpha
5. ใบกิจกรรม

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายโต้ตอบ ซักถาม และการแสดงความคิดเห็น
3. สังเกตพฤติกรรมความกระตือรือร้นในการร่วมกิจกรรมและคุณภาพของงานที่มอบหมาย
4. ผลจากการลงมือปฏิบัติด้วยโปรแกรม Wolfram Alpha
5. ตรวจใบกิจกรรม
6. ตรวจแบบฝึกหัด
7. ประเมินจากแบบทดสอบ

บทที่ 7
ผลการแปลงลาปลาซ

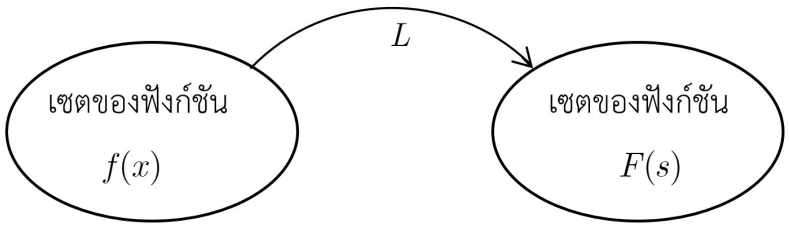
การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ในบทที่ผ่านมานั้นส่วนใหญ่เป็นการใช้ความสัมพันธ์ของตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ หรือใช้ความรู้เกี่ยวกับการหาทั้งอนุพันธ์และปริพันธ์ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งค่อนข้างมีขั้นตอนที่ยุ่งยากและซับซ้อน และในบทนี้จะกล่าวถึงอีกวิธีที่สามารถใช้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้เช่นกัน ซึ่งเราเรียกว่า ผลการแปลงลาปลาซ

การแปลงลาปลาซมีประโยชน์อย่างมากในการการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และสามารถนำไปประยุกต์ใช้กับการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ได้เป็นอย่างดีดังนั้นในบทนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการแปลงลาปลาซที่เป็นผลของการแปลงลาปลาซและการหาผลการแปลงลาปลาซแบบต่าง ๆ สมบัติของผลการแปลงลาปลาซ และการนำผลการแปลงลาปลาซไปใช้ในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์

ผลการแปลงลาปลาซเป็นวิธีการหนึ่งที่ใช้ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ และเป็นวิธีการที่ใช้กันมาก ถือได้ว่าเป็นวิธีที่เหมาะสมที่สุดวิธีหนึ่งที่ใช้ในการแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น เนื่องจากเราสามารถหาผลเฉลยเฉพาะได้เลยโดยไม่ต้องหาผลเฉลยทั่วไปมาก่อน และยังใช้กับปัญหาค่าขอบได้อีกด้วย ก่อนจะกล่าวถึงวิธีการนำเอาผลการแปลงลาปลาซไปใช้ในการหาผลเฉลย จะกล่าวถึงนิยามและสมบัติต่าง ๆ ของผลการแปลงลาปลาซ เพื่อความเข้าใจในเบื้องต้นั้น

ผลการแปลงลาปลาซ

ดำรง ทิพย์โยธา (2541 : 177) ได้กล่าวว่า ผลการแปลงลาปลาซ เป็นการส่งค่าที่เป็นฟังก์ชันไปเป็นฟังก์ชันโดยใช้สัญลักษณ์แทนผลการแปลงลาปลาซด้วย L ตัวอย่างเช่น $L\{f\} = F$



ภาพประกอบที่ 7.1 แสดงการแปลงลาปลาซ
ที่มา : ดำรง ทิพย์โยธา (2541 : 177)

ดังนั้นการแปลงลาปลาซ หรือผลการแปลงลาปลาซ สามารถนำไปช่วยแก้สมการเชิงอนุพันธ์อย่างหนึ่ง ซึ่งจะต้องอาศัยเรื่องของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบ ดังจะกล่าวถึงในบทนิยาม

ถ้ากำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนช่วง $[0,\infty]$ หรือ $f(x)$ หาค่าได้สำหรับ $x \geq 0$ จะได้ว่า $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx$ ซึ่งเป็นค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบในรูปของลิมิต หลักการดังกล่าวนี้สามารถสร้างเป็นบทนิยามได้ดังนี้คือ

บทนิยาม 7.1 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง $[0,b]$ เมื่อ $b>0$ ถ้า $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx$ หาค่าได้และเป็นค่าจำกัด จะกล่าวว่า **ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ** $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ **ลู่เข้า** ไม่เช่นนั้นกล่าวว่า $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx$ **ลู่ออก** เมื่อ $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b f(x)\,dx = L$ จะเขียน $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx = L$

ข้อสังเกต 7.1

ถ้าปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า จะเห็นว่าค่าปริพันธ์ไม่ตรงแบบดังกล่าวเป็นการแปลงฟังก์ชัน $f(x)$ ไปเป็น $F(s) = \int\limits_0^\infty k(s,x)f(x)\,dx$

ในที่นี้ถ้ากำหนดให้ $K(s,x) = e^{-sx}$ จะได้นิยามของการแปลงลาปลาซได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 7.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง $[0,\infty)$ แล้วค่าปริพันธ์ $\int\limits_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx = F(s)$ จะเรียกว่า ซึ่งถ้าลิมิตหาค่าได้ จะเรียกว่า**การแปลงลาปลาซ หรือผลการแปลงลาปลาซของ** f

ถ้าปริพันธ์นี้หาค่าได้ การแปลงลาลาซของ f แทนด้วย $L\{f\}$ หรือ $L\{f(x)\}$

ตัวอย่าง 7.1 จงหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x) = 2$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{f(x)\} = \int\limits_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$

สำหรับทุกค่าของ s ที่ทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบลู่เข้า และ $f(x)$ หาค่าได้บนช่วง $[0,\infty]$

จะได้ว่า $L\{2\} = \int\limits_0^\infty e^{-sx}(2)\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b 2e^{-sx}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{2}{s}e^{-sx}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= -2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{s} - \frac{e^{-s(0)}}{s}\right]$$

$$L\left\{2\right\} = -2\lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{s} - \frac{1}{s}\right]$$

1. สำหรับ $s = 0$ จะทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int\limits_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ ลู่ออก เพราะว่าถ้า $s = 0$

จะได้ $\int\limits_0^\infty e^{-(0)x}(2)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b 2\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\left[2x\right]\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}\left[2b - 0\right] = \infty$

2. สำหรับ $s < 0$ จะทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int\limits_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ ลู่ออก เพราะว่าถ้า $s < 0$

จะได้ $-sb > 0$ และ $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-sb} = \infty$

3. สำหรับ $s > 0$ จะทำให้ปริพันธ์ไม่ตรงแบบ $\int\limits_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ ลู่เข้าเพราะว่าถ้า $s > 0$

จะได้ $-sb < 0$ และ $\lim\limits_{b\to\infty} e^{-sb} = 0$

ดังนั้น $L\{2\} = \dfrac{2}{s}$ สำหรับ $s > 0$

จากตัวอย่าง 7.1 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\{a\} = \dfrac{a}{s}$ สำหรับ $s > 0$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 7.2 จงหา $L\left\{e^{5x}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned}
L\left\{e^{5x}\right\} &= \int\limits_0^\infty e^{-sx}(e^{5x})\,dx \\
&= \int\limits_0^\infty e^{(5-s)x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^\infty e^{(5-s)x}\,dx \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{5-s}e^{(5-s)x}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \frac{1}{5-s}\lim_{b\to\infty}\left[e^{(5-s)b} - 1\right] \\
&= \frac{1}{5-s}(0-1) \\
&= \frac{1}{s-5}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $L\left\{e^{5x}\right\} = \dfrac{1}{s-5}$ สำหรับ $s > 5$

จากตัวอย่าง 7.2 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\left\{e^{ax}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$ สำหรับ $s > a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 7.3 จงหา $L\{x\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{x\} = \int\limits_0^\infty e^{-sx}(x)\,dx$

$$= \int\limits_0^\infty xe^{-sx}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^\infty xe^{-sx}\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า

$$\int xe^{-sx}\,dx = \left[-\frac{xe^{-sx}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]$$

จะได้ $L\{x\} = \lim\limits_{b\to\infty}\left[-\dfrac{xe^{-sx}}{s} - \dfrac{e^{-sx}}{s^2}\right]\Bigg|_0^b$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2}\right) - \left(-\frac{(0)e^{-s(0)}}{s} - \frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{be^{-sb}}{s} - \frac{e^{-sb}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right]$$

$$= -0 - 0 + \frac{1}{s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2}$$

ดังนั้น $L\{x\} = \dfrac{1}{s^2}$ สำหรับ $s > 0$

ตัวอย่าง 7.4 จงหา $L\left\{x^2\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{x^2\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-sx}(x^2)\,dx$

$$= \int\limits_0^\infty x^2e^{-sx}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b x^2e^{-sx}\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนสองครั้งจะได้ว่า

$$\int x^2 e^{-sx}\,dx = \left[-\frac{x^2 e^{-sx}}{s} - \frac{2xe^{-sx}}{s^2} - \frac{2e^{-sx}}{s^3}\right]$$

จะได้

$$\begin{aligned}
L\left\{x^2\right\} &= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{x^2 e^{-sx}}{s} - \frac{2xe^{-sx}}{s^2} - \frac{2e^{-sx}}{s^3}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-\frac{b^2 e^{-sb}}{s} - \frac{2be^{-sb}}{s^2} - \frac{2e^{-sb}}{s^3}\right) - \left(-\frac{(0)^2 e^{-s(0)}}{s} - \frac{2(0)e^{-s(0)}}{s^2} - \frac{2e^{-s(0)}}{s^3}\right)\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{b^2 e^{-sb}}{s} - \frac{2be^{-sb}}{s^2} - \frac{2e^{-sb}}{s^3} + \frac{2}{s^3}\right] \\
&= -0 - 0 - 0 + \frac{2}{s^3} \\
&= \frac{2}{s^3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $L\{x\} = \dfrac{2}{s^3}$ สำหรับ $s > 0$

จากตัวอย่าง 7.3 และ 7.4 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\left\{x^n\right\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ สำหรับ $s > 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 7.5 จงหา $L\{\sin 3x\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{\sin 3x\right\} = \displaystyle\int_0^\infty e^{-sx}(\sin 3x)\,dx$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-sx}\sin 3x\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนสองครั้งและใช้สมบัติของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะได้ว่า

$$\int e^{-sx}\sin 3x\,dx = \frac{e^{-sx}(-s\sin 3x - 3\cos 3x)}{(-s)^2 + 3^2}$$

และ

$$\begin{aligned}
L\left\{e^{-sx}\sin 3x\right\} &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sx}(-s\sin 3x - 3\cos 3x)}{s^2 + 3^2}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{e^{-sb}(-s\sin 3b - 3\cos 3b)}{s^2 + 3^2}\right) - \left(\frac{e^{-s(0)}(-s\sin 3(0) - 3\cos 3(0)}{s^2 + 3^2}\right)\right] \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}(-s\sin 3b - 3\cos 3b)}{s^2 + 3^2} + \frac{3}{s^2 + 3^2}\right]
\end{aligned}$$

$$L\left\{e^{-sx}\sin 3x\right\} = \lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{e^{-sb}(-s\sin 3b - 3\cos 3b)}{s^2+3^2}\right) - \left(\frac{e^{-s(0)}(-s\sin 3(0) - 3\cos 3(0)}{s^2+3^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}(-s\sin 3b - 3\cos 3b)}{s^2+3^2} + \frac{3}{s^2+3^2}\right]$$

$$= 0 + \frac{3}{s^2+3^2}$$

$$= \frac{3}{s^2+3^2}$$

ดังนั้น $L\{\sin 3x\} = \dfrac{3}{s^2+3^2}$ สำหรับ $s > 0$

จากตัวอย่าง 7.5 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\{\sin ax\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ สำหรับ $s > 0$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว และในทำนองเดียวกัน $L\{\cos ax\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ สำหรับ $s > 0$

ตัวอย่าง 7.6 จงหา $L\left\{xe^{5x}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{xe^{5x}\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}(xe^{5x})\,dx$

$$= \int_0^\infty xe^{(5-s)x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int_0^b xe^{(5-s)x}\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า

$$\int xe^{(5-s)x}\,dx = \left[\frac{xe^{(5-s)x}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)x}}{(5-s)^2}\right]$$

และ $$L\{x\} = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{xe^{(5-s)x}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)x}}{(5-s)^2}\right]\Bigg|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(\frac{be^{(5-s)b}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)b}}{(5-s)^2}\right) - \left(\frac{(0)e^{(5-s)(0)}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)(0)}}{(5-s)^2}\right)\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{be^{(5-s)b}}{5-s} - \frac{e^{(5-s)b}}{(5-s)^2} + \frac{1}{(5-s)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{(5-s)^2}$$

ดังนั้น $L\left\{xe^{5x}\right\} = \dfrac{1}{(5-s)^2}$ สำหรับ $s > 5$

จากตัวอย่าง 7.6 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $L\left\{xe^{ax}\right\} = \dfrac{1}{(a-s)^2}$ สำหรับ $s > a$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว

จากตัวอย่างที่ผ่านมาข้างต้น ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐาน จะสรุปเป็นสูตรซึ่งสามารถนำไปใช้ได้โดยการแทนค่าได้ กำหนดให้ a เป็นค่าคงตัว (ก่อสุข วีระถาวร. 2539 : 106)

1. $L\{a\} = \dfrac{a}{s}$ สำหรับ $s > 0$
2. $L\left\{e^{ax}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$ สำหรับ $s > a$
3. $L\left\{x^n\right\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ สำหรับ $s > 0$ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก
4. $L\{\sin ax\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$ สำหรับ $s > 0$
5. $L\{\cos ax\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ สำหรับ $s > 0$
6. $L\left\{xe^{ax}\right\} = \dfrac{1}{(a-s)^2}$ สำหรับ $s > a$
7. $L\{\sinh ax\} = \dfrac{a}{s^2-a^2}$ สำหรับ $s > \left|a\right|$
8. $L\{\cosh ax\} = \dfrac{s}{s^2-a^2}$ สำหรับ $s > \left|a\right|$

ตัวอย่างเช่น

$L\{4\} = \dfrac{4}{s}$ สำหรับ $s > 0$

$L\left\{e^{-2x}\right\} = \dfrac{1}{s+2}$ สำหรับ $s > -2$

$L\left\{x^3\right\} = \dfrac{6}{s^4}$ สำหรับ $s > 0$

$L\left\{\sin(-2x)\right\} = -\dfrac{2}{s^2+4}$ สำหรับ $s > 0$

$L\{\cos x\} = \dfrac{s}{s^2+1}$ สำหรับ $s > 0$

$L\left\{xe^{10x}\right\} = \dfrac{1}{(10-s)^2}$ สำหรับ $s > 10$

$L\{\sinh x\} = \dfrac{1}{s^2-1}$ สำหรับ $s > 1$

$L\{\cosh 5x\} = \dfrac{5}{s^2-25}$ สำหรับ $s > 5$

สำหรับฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ไม่เป็นไปตามสูตรการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานข้างต้น นั้น สามารถหาได้จากบทนิยาม $L\left\{f(x)\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx$ โดยตรง หรือบางครั้งอาจต้องใช้วิธีการเปลี่ยนรูปของฟังก์ชัน และถ้ามีความยุ่งยากจะต้องใช้เทคนิคที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้มาช่วย

ตัวอย่าง 7.7 จงหา $L\left\{\sin^2 x\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}
L\left\{\sin^2 x\right\} &= \int\limits_0^\infty e^{-sx}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-sx}\left(1-\cos 2x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^\infty e^{-sx}\,dx - \int\limits_0^\infty e^{-sx}\cos 2x\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[L\left\{1\right\} - L\left\{\cos 2x\right\}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s+4}\right] \\
&= \frac{2}{s(s^2+4)}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $L\left\{\sin^2 x\right\} = \dfrac{2}{s(s^2+4)}$ สำหรับ $s > 0$

ตัวอย่าง 7.8 จงหา $L\left\{\sin(2x-3)\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{\sin(2x-3)\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-sx}\sin(2x-3)\,dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b e^{-sx}\sin(2x-3)\,dx$

หาปริพันธ์ทีละส่วนจะได้ว่า

$$\int e^{-sx}\sin(2x-3)\,dx = \left[\frac{-se^{-sx}\sin(2x-3)}{s^2+4} + \frac{2e^{-sx}\cos(2x-3)}{s^2+4}\right]$$

$$\begin{aligned}
L\left\{\sin(2x-3)\right\} &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{-se^{-sx}\sin(2x-3)}{s^2+4} + \frac{2e^{-sx}\cos(2x-3)}{s^2+4}\right]\Bigg|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{-se^{-sb}\sin(2b-3)}{s^2+4} + \dfrac{2e^{-sb}\cos(2b-3)}{s^2+4}\right) \\ -\left(\dfrac{-se^{-s(0)}\sin(2(0)-3)}{s^2+4} + \dfrac{2e^{-s(0)}\cos(2(0)-3)}{s^2+4}\right)\end{array}\right]
\end{aligned}$$

$$L\left\{\sin(2x-3)\right\} = \left[\frac{s\sin(-3)+2\cos(-3)}{s^2+4}\right]$$

ดังนั้น $L\left\{\sin(2x-3)\right\} = \dfrac{s\sin(-3)+2\cos(-3)}{s^2+4}$ สำหรับ $s>0$

สำหรับฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ นั้นก็สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้เช่นเดียวกัน แต่ต้องมีเงื่อนไขเพิ่มเติมดังบทนิยามต่อไปนี้ (วชิรารักษ์ โอรสรัมย์. 2558 : 291)

บทนิยาม 7.3 ฟังก์ชัน f จะกล่าวว่ามี**อันดับเลขชี้กำลังเท่ากับ** c ถ้ามีค่าคงตัว c สำหรับบาง $M>0$ และ $x_0>0$ ซึ่งทำให้ $\left|f(x)\right| \le Me^{cx}$ ทุกค่า $x>x_0$

ตัวอย่างเช่น

$f(x)=e^x$ จะมีค่าอันดับเลขชี้กำลังเป็น 1 เพราะว่า $\left|e^x\right| \le 1\cdot e^x$

$f(x)=e^{-x}$ จะมีค่าอันดับเลขชี้กำลังเป็น 1 เพราะว่า $\left|e^{-x}\right| \le 1\cdot e^x$

$f(x)=2\sin x$ จะมีค่าอันดับเลขชี้กำลังเป็น 1 เพราะว่า $\left|2\sin x\right| \le 2\cdot e^x$

บทนิยาม 7.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(0,\infty)$ และมีอันดับเลขชี้กำลังเท่ากับ c แล้วจะได้ว่า $L\left\{f(x)\right\}$ หาค่าได้สำหรับ $s>c$

และในการหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ก็สามารถหาได้โดยการหาปริพันธ์ในแต่ละช่วงที่ $x>0$

ตัวอย่าง 7.9 จงหา $L\left\{f(x)\right\}$ เมื่อกำหนด $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le 2\\ 1, & x>2\end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{f(x)\right\} = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx = \int_0^2 e^{-sx}(-1)\,dx + \int_2^\infty e^{-sx}(1)\,dx$

จะได้ว่า $L\left\{f(x)\right\} = \left[\dfrac{e^{-sx}}{s}\right]\Bigg|_0^2 + \lim\limits_{b\to\infty}\int_2^\infty e^{-sx}\,dx$

$$= \left[\left(\frac{e^{-s(2)}}{s}\right)-\left(\frac{e^{-s(0)}}{s}\right)\right] + \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{e^{-sx}}{s}\right]\Bigg|_2^b$$

$$= \left[\frac{e^{-2s}}{s}-\frac{1}{s}\right] - \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-sb}}{s}-\frac{e^{-s(2)}}{s}\right]$$

$$L\left\{f(x)\right\} = \left[\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{1}{s}\right] - \left[-\frac{e^{-s(2)}}{s}\right]$$
$$= \frac{2e^{-2s}}{s} - \frac{1}{s}$$

ดังนั้น $L\left\{f(x)\right\} = \dfrac{2e^{-2s}}{s} - \dfrac{1}{s}$ สำหรับ $s > 0$

ตัวอย่าง 7.10 จงหา $L\left\{f(x)\right\}$ เมื่อกำหนด $f(x) = \begin{cases} 2, & 0 \le x \le 1 \\ e^x, & 1 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$L\left\{f(x)\right\} = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)\,dx = \int_0^1 e^{-sx}(2)\,dx + \int_1^3 e^{-sx}(e^x)\,dx + \int_3^\infty e^{-sx}(0)\,dx$$

จะได้ว่า $L\left\{f(x)\right\} = \left[\dfrac{-2e^{-sx}}{s}\right]\Bigg|_0^1 + \left[\dfrac{e^{(1-s)x}}{s-1}\right]\Bigg|_1^3 + \lim\limits_{b\to\infty}\int_3^\infty e^{-sx}(0)\,dx$

$$= \left[\left(\frac{-2e^{-s(1)}}{s}\right) - \left(\frac{-2e^{-s(0)}}{s}\right)\right] + \left[\left(\frac{e^{(1-s)(3)}}{s-1}\right) - \left(\frac{e^{(1-s)(1)}}{s-1}\right)\right] + 0$$

$$= \left[\frac{-2e^{-s}}{s} + \frac{2}{s}\right] + \left[\frac{e^{(3-3s)}}{s-1} - \frac{e^{(1-s)}}{s-1}\right]$$

$$= \frac{-2e^{-s}}{s} + \frac{2}{s} + \frac{e^{(3-3s)}}{s-1} - \frac{e^{(1-s)}}{s-1}$$

ดังนั้น $L\left\{f(x)\right\} = \dfrac{-2e^{-s}}{s} + \dfrac{2}{s} + \dfrac{e^{(3-3s)}}{s-1} - \dfrac{e^{(1-s)}}{s-1}$ สำหรับ $s > 1$

สมบัติบางประการของผลการแปลงลาปลาซ

ผลการแปลงลาปลาซนั้นมีสมบัติที่สำคัญเพื่อช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันรูปแบบต่าง ๆ ได้ง่ายขึ้นและสมบัติที่สำคัญที่นำมาใช้ได้แก่ (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. 2536 : 266 และ William E. Boyce and Richaed C. Diprima. 2010 : 317) ได้กล่าวว่า

สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ

สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 7.1 ถ้า $f(x)$ และ $g(x)$ มีผลการแปลงลาปลาซแล้วจะได้ว่า

$L\left\{af(x) + bg(x)\right\} = aL\left\{f(x)\right\} + bL\left\{g(x)\right\}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

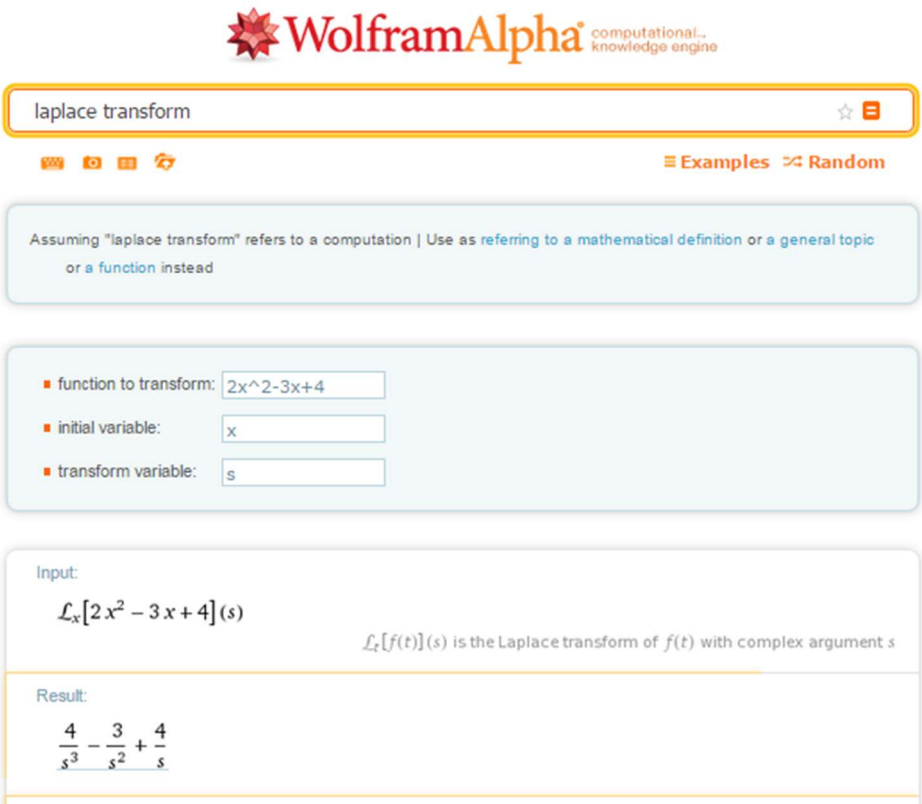
จากทฤษฎีบท 7.1 สามารถนำไปใช้ได้กับสมบัติดังนี้ได้

1. $L\{af(x)-bg(x)\}=aL\{f(x)\}-bL\{g(x)\}$
2. $L\{af(x)\}=aL\{f(x)\}$

ตัวอย่าง 7.11 จงหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x)=2x^2-3x+4$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$\begin{aligned} L\{f(x)\} &= L\{2x^2-3x+4\} \\ &= L\{2x^2\}-L\{3x\}+L\{4\} \\ &= 2L\{x^2\}-3L\{x\}+L\{4\} \\ &= 2\left(\frac{2!}{s^3}\right)-3\left(\frac{1}{s^2}\right)+4\left(\frac{1}{s}\right) \\ &= \frac{4}{s^3}-\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\{f(x)\}=\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s}$ สำหรับ $s>0$



ภาพประกอบที่ 7.2 ผลเฉลยของ $L\{2x^2-3x+4\}$

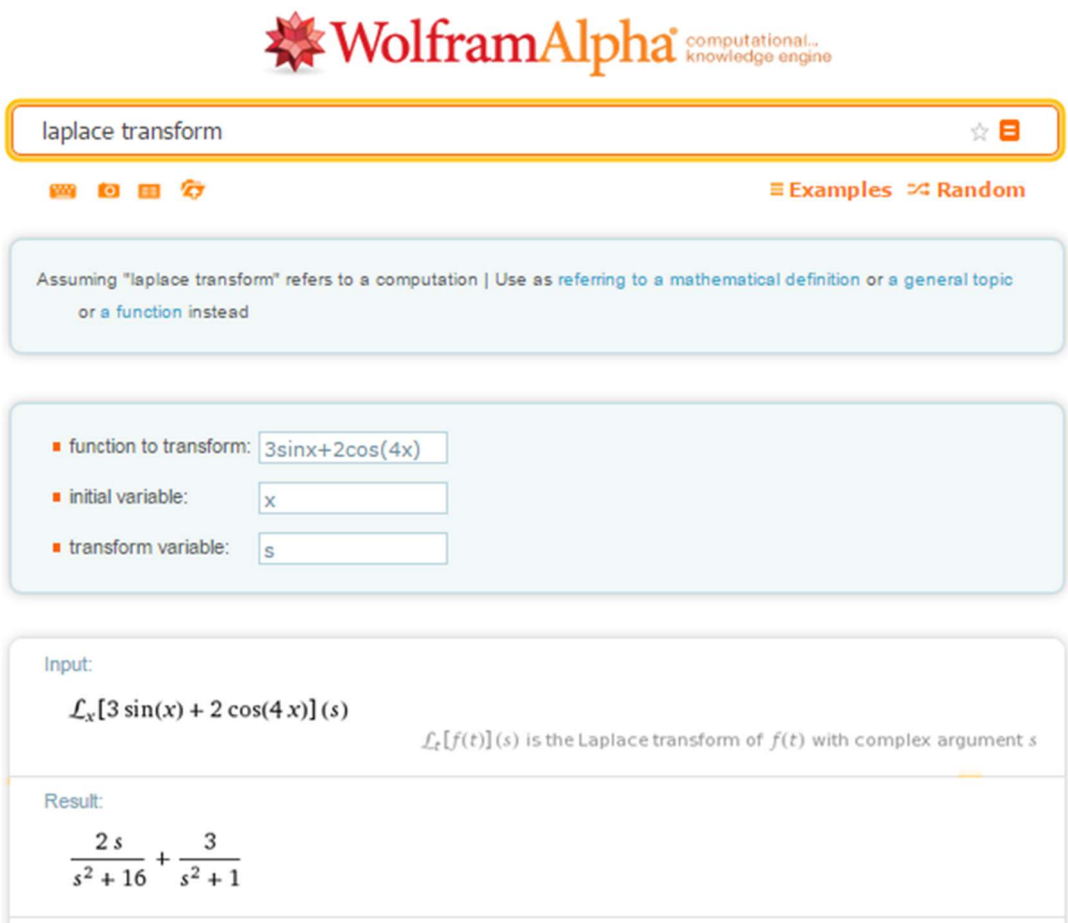
ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 7.12 จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน $3\sin x + 2\cos 4x$

วิธีทำ เนื่องจาก
$$\begin{aligned} L\{3\sin x + 2\cos 4x\} &= 3L\{\sin x\} + 2L\{\cos 4x\} \\ &= L\left\{3\sin x\right\} + L\left\{2\cos 4x\right\} \\ &= 3L\left\{\sin x\right\} + 2L\left\{\cos 4x\right\} \\ &= 3\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + 2\left(\frac{s}{s^2+16}\right) \\ &= \frac{3}{s^2+1} + \frac{2s}{s^2+16} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\{3\sin x + 2\cos 4x\} = \dfrac{3}{s^2+1} + \dfrac{2s}{s^2+16}$ สำหรับ $s > 0$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\left\{3\sin x + 2\cos 4x\right\}$ ดังภาพประกอบที่ 7.3



ภาพประกอบที่ 7.3 หา $L\left\{3\sin x + 2\cos 4x\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

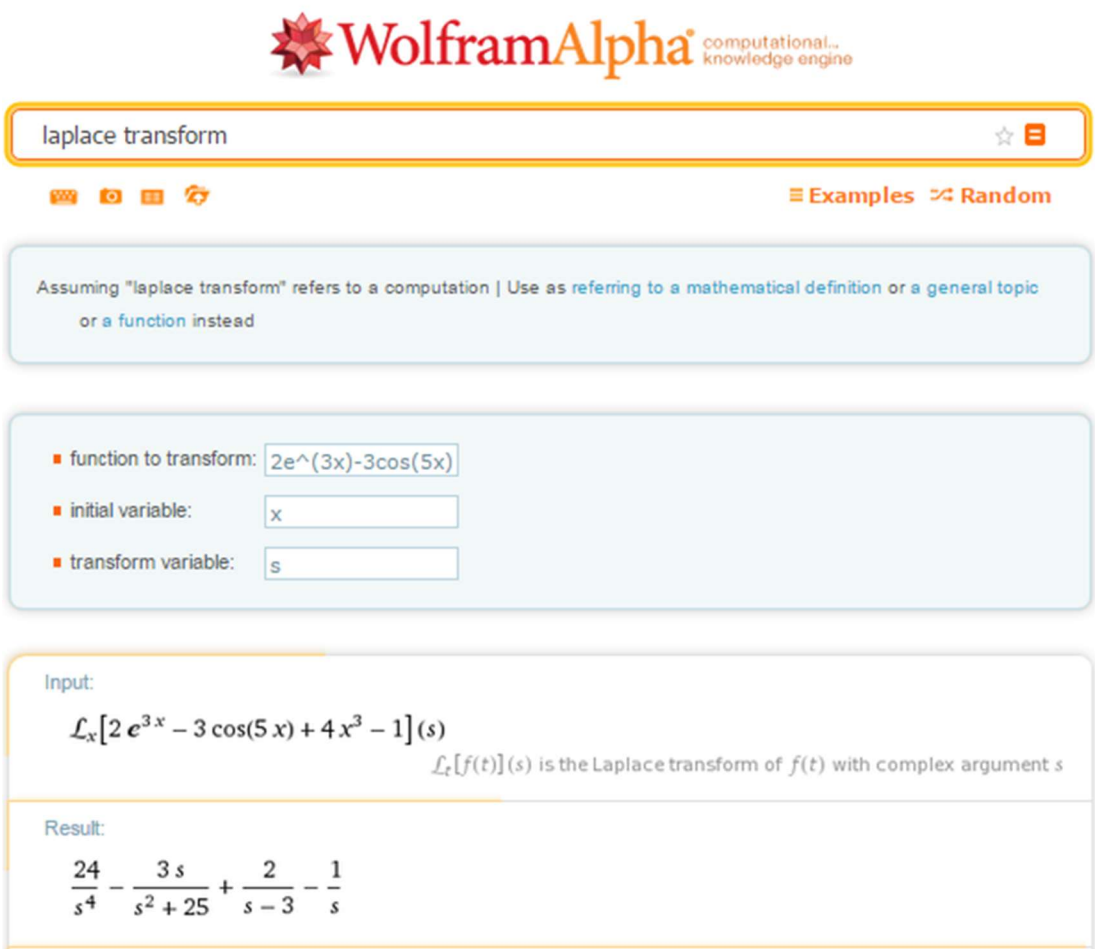
ตัวอย่าง 7.13 จงหา $L\{f(x)\}$ เมื่อกำหนด $f(x) = 2e^{3x} - 3\cos 5x + 4x^3 - 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{f(x)\} = L\left\{2e^{3x} - 3\cos 5x + 4x^3 - 1\right\}$

$$
\begin{aligned}
&= L\left\{2e^{3x}\right\} - L\left\{3\cos 5x\right\} + L\left\{4x^3\right\} - L\left\{1\right\} \\
&= 2L\left\{e^{3x}\right\} - 3L\left\{\cos 5x\right\} + 4L\left\{x^3\right\} - L\left\{1\right\} \\
&= 2\left(\frac{1}{s-3}\right) - 3\left(\frac{s}{s^2+25}\right) + 4\left(\frac{3!}{s^4}\right) + \left(\frac{1}{s}\right) \\
&= \frac{2}{s-3} - \frac{3s}{s^2+25} + \frac{24}{s^4} + \frac{1}{s}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $L\left\{f(x)\right\} = \dfrac{2}{s-3} - \dfrac{3s}{s^2+25} + \dfrac{24}{s^4} + \dfrac{1}{s}$ สำหรับ $s > 3$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\left\{2e^{3x} - 3\cos 5x + 4x^3 - 1\right\}$ ดังภาพประกอบที่ 7.4



ภาพประกอบที่ 7.4 ผลเฉลยของ $L\left\{2e^{3x} - 3\cos 5x + 4x^3 - 1\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

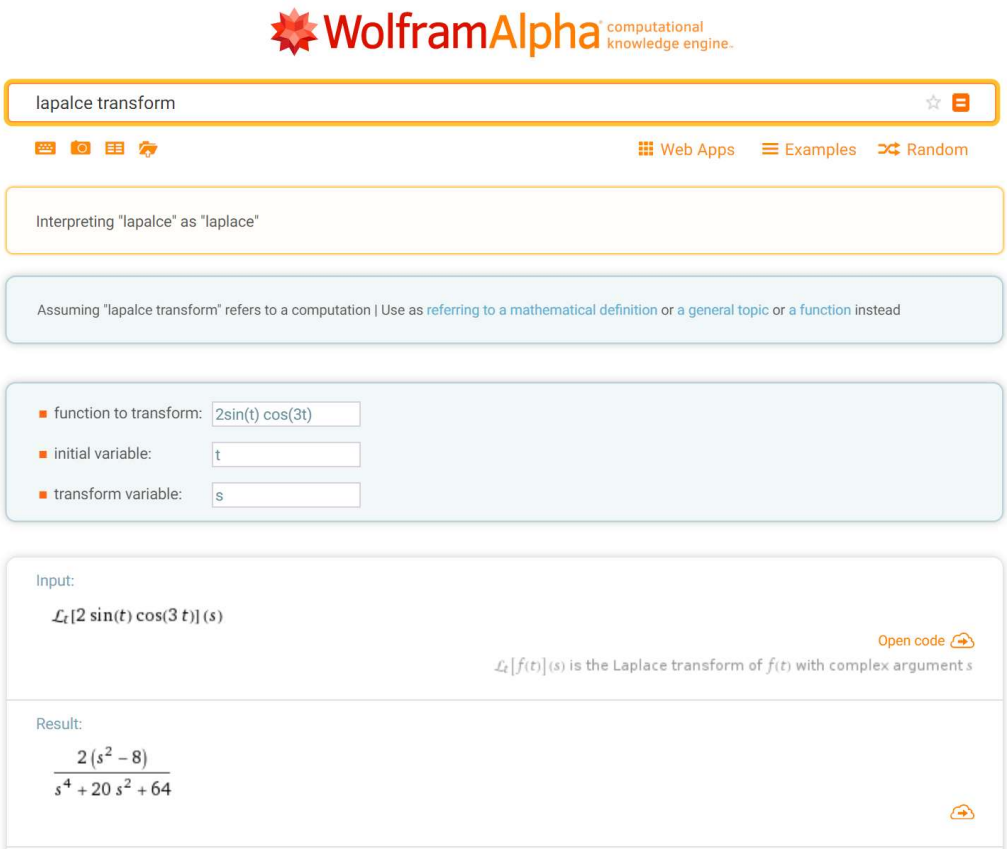
ตัวอย่าง 7.14 จงหา $L\{2\sin x\cos 3x\}$

วิธีทำ เพื่อให้สามารถใช้สูตรและสมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซได้จะต้องจัดให้อยู่ในรูปที่ง่าย โดยใช้ความสัมพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 2\sin x\cos 3x &= \sin(x+3x)+\sin(x-3x) \\ &= \sin 4x+\sin(-2x) \\ &= \sin 4x-\sin 2x \end{aligned}$$

จะได้ว่า
$$\begin{aligned} L\{2\sin x\cos 3x\} &= L\{\sin 4x\}-L\{\sin 2x\} \\ &= \left(\frac{4}{s^2+16}\right)-\left(\frac{2}{s^2+4}\right) \\ &= \frac{4(s^2+4)-2(s^2+16)}{(s^2+16)(s^2+4)} \\ &= \frac{2s^2-16}{(s^2+16)(s^2+4)} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\{2\sin x\cos 3x\} = \dfrac{2s^2-16}{(s^2+16)(s^2+4)}$



ภาพประกอบที่ 7.5 ผลเฉลยของ $L\{2\sin x\cos 3x\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

สมบัติผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระ

สำหรับฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระเช่น $x^3e^{3x}, x\sin 3x, x^5\cos 2x$ เป็นต้น ฟังก์ชันเหล่านี้สามารถหาผลการแปลงลาปลาซได้เช่นเดียวกันและสามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน. 2558 : 204 และ ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. 2543 : 122-123) ได้กล่าวว่า

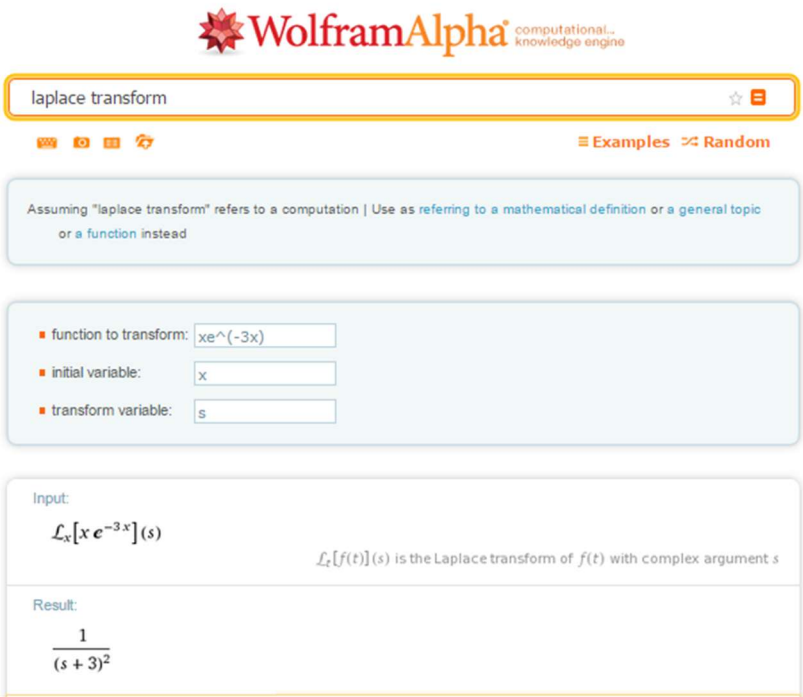
ทฤษฎีบท 7.2 ถ้ากำหนดให้ $L\{f(x)\} = F(s)$ แล้วจะได้ว่า $L\{x^n f(x)\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{dx^n}F(s)$ โดยที่ $n = 1,2,3,\ldots$

ตัวอย่าง 7.15 จงหา $L\left\{xe^{-3x}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{e^{-3x}\right\} = \dfrac{1}{s+3} = F(s)$ จากทฤษฎีบท 7.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L\left\{xe^{-3x}\right\} &= (-1)^1 \frac{d}{ds}F(s) \\ &= (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+3}\right) \\ &= \frac{1}{(s+3)^2} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\left\{xe^{-3x}\right\} = \dfrac{1}{(s+3)^2}$ สำหรับ $s > -3$



ภาพประกอบที่ 7.6 ผลเฉลยของ $L\left\{xe^{-3x}\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

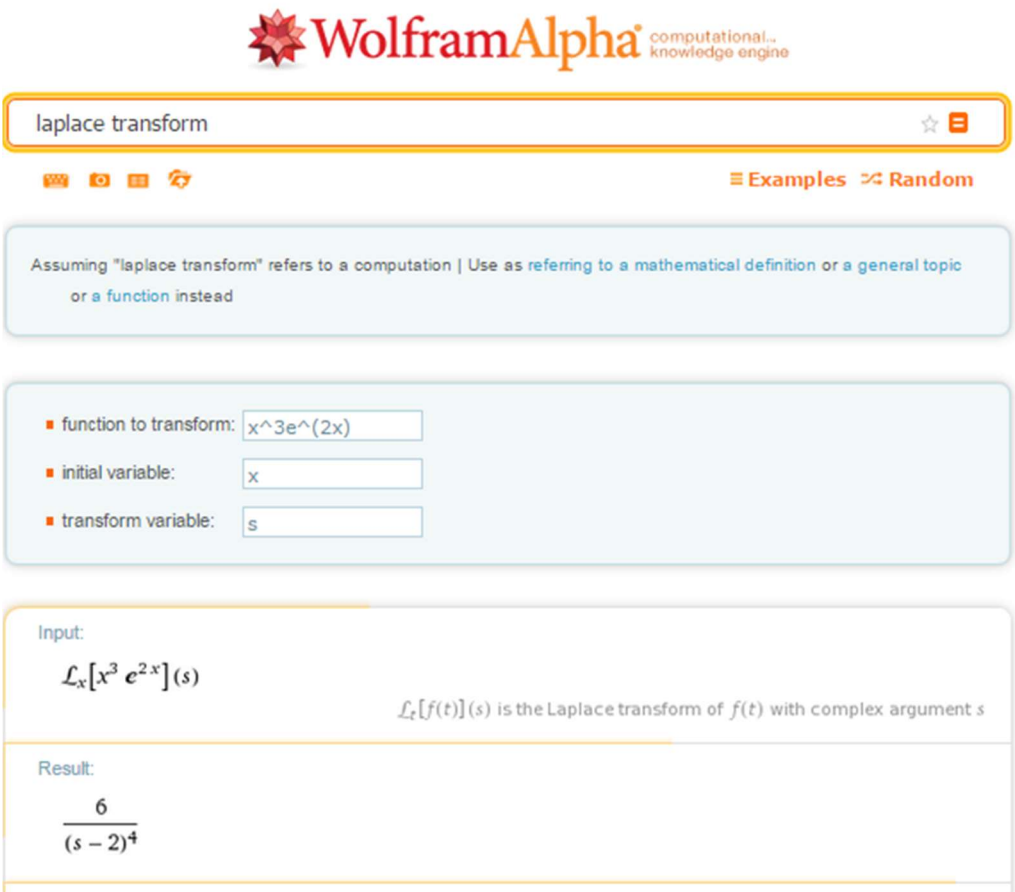
ตัวอย่าง 7.16 จงหา $L\left\{x^3e^{2x}\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{e^{2x}\right\} = \dfrac{1}{s-2} = F(s)$ จากทฤษฎีบท 7.2 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} L\left\{x^3e^{2x}\right\} &= (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}F(s) \\ &= (-1)^3 \frac{d^3}{ds^3}\left(\frac{1}{s-2}\right) \\ &= -1\left(-\frac{6}{(s-2)^4}\right) \\ &= \frac{6}{(s-2)^4} \end{aligned}$$

ดังนั้น $L\left\{x^3e^{2x}\right\} = \dfrac{6}{(s-2)^4}$ สำหรับ $s > 2$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L\left\{\sin^2 x\right\}$ ดังภาพประกอบที่ 7.7



ภาพประกอบที่ 7.7 ผลเฉลยของ $L\left\{\sin^2 x\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 7.17 จงหา $L\left\{x^2 \sin 3x\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{\sin 3x\} = \dfrac{3}{s^2+9} = F(s)$ จากทฤษฎีบท 7.2 จะได้ว่า

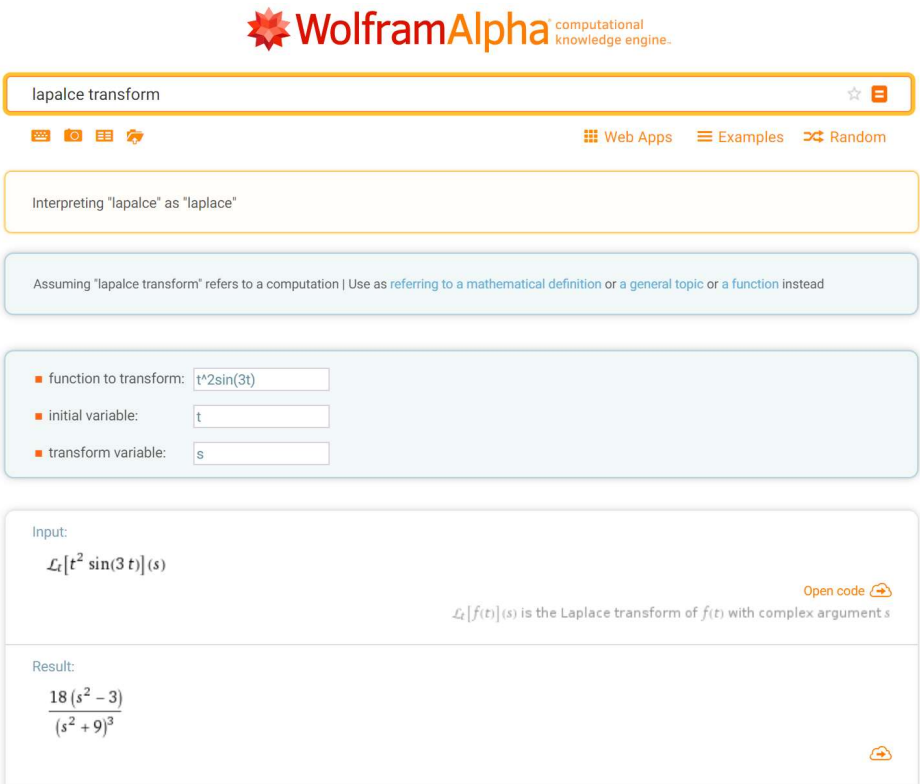
$$L\left\{x^2 \sin 3x\right\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2} F(s)$$

จาก $F(s) = \dfrac{3}{s^2+9}$

จะได้ $\dfrac{d}{ds} F(s) = -\dfrac{6s}{(s^2+9)^2}$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{ds^2} F(s) &= -\frac{6(s^2+9)^2 - 24s^2(s^2+9)}{(s^2+9)^4} \\
&= -\frac{6(s^2+9) - 24s^2}{(s^2+9)^3} \\
&= \frac{18s^2 - 54}{(s^2+9)^3}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $L\left\{x^2 \sin 3x\right\} = \dfrac{9(2s^2-6)}{(s^2+9)^3}$ สำหรับ $s > 0$



ภาพประกอบที่ 7.8 ผลเฉลยของ $L\left\{x^2 \sin 3x\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

สมบัติการเลื่อนขนานของผลการแปลงลาปลาซ

มีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับสมบัติการเลื่อนขนานมีอยู่ 2 ทฤษฎีบทดังจะกล่าวถึงดังต่อไปนี้ (วชิรารักษ์ โอรสรัมย์. 2558 : 299 และ George F. Simmons. 1991 : 393)

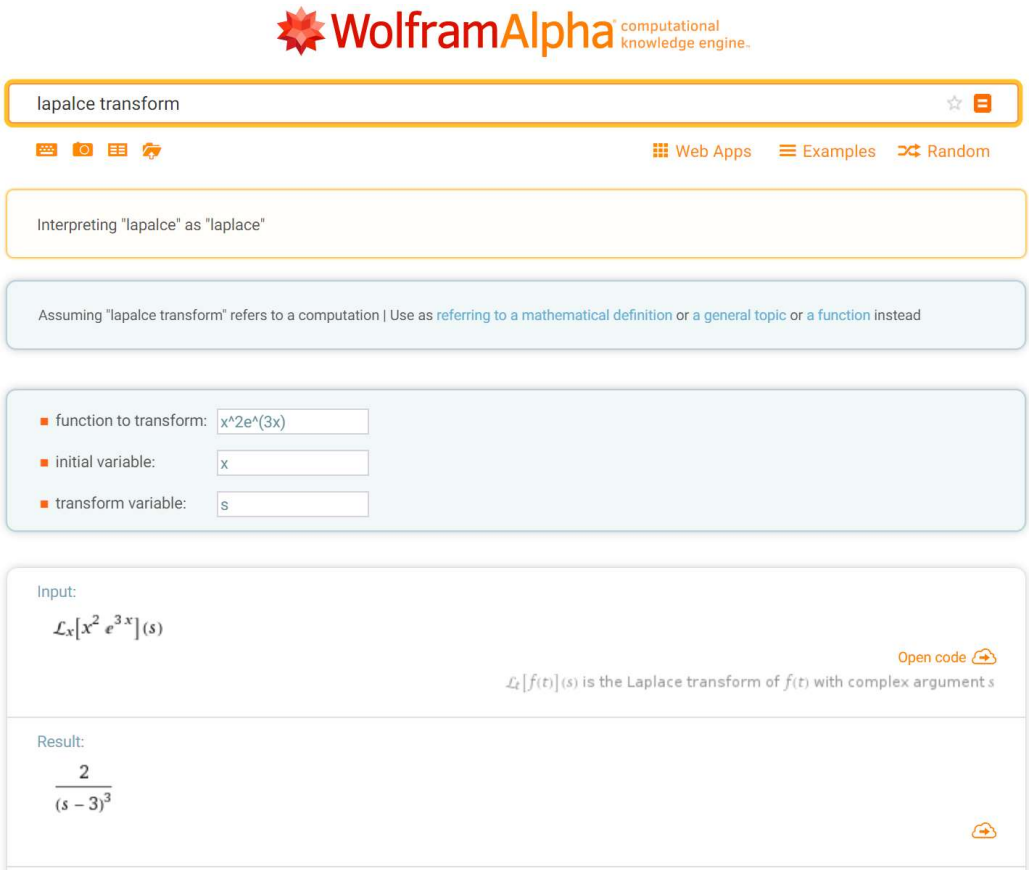
ทฤษฎีบท 7.3 ถ้า $L\{f(x)\} = F(s)$ แล้วจะได้ว่า $L\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a)$

ตัวอย่าง 7.18 จงหา $L\{x^2e^{3x}\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{x^2\} = \dfrac{2}{s^3} = F(s)$ จากทฤษฎีบท 8.3 จะได้ว่า

$$L\{x^2e^{3x}\} = F(s-3) = \frac{2}{(s-3)^2}$$

ดังนั้น $L\{x^2e^{3x}\} = \dfrac{2}{(s-3)^2}$ สำหรับ $s > 3$



ภาพประกอบที่ 7.9 ผลเฉลยของ $L\{x^2e^{3x}\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 7.19 จงหา $L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{3\cos 5x - 5\sin 6x\} = 3L\{\cos 5x\} - 5L\{\sin 6x\}$

$$= 3\left(\frac{s}{s^2+25}\right) - 5\left(\frac{6}{s^2+36}\right)$$

$$= \frac{3s}{s^2+25} - \frac{30}{s^2+36}$$

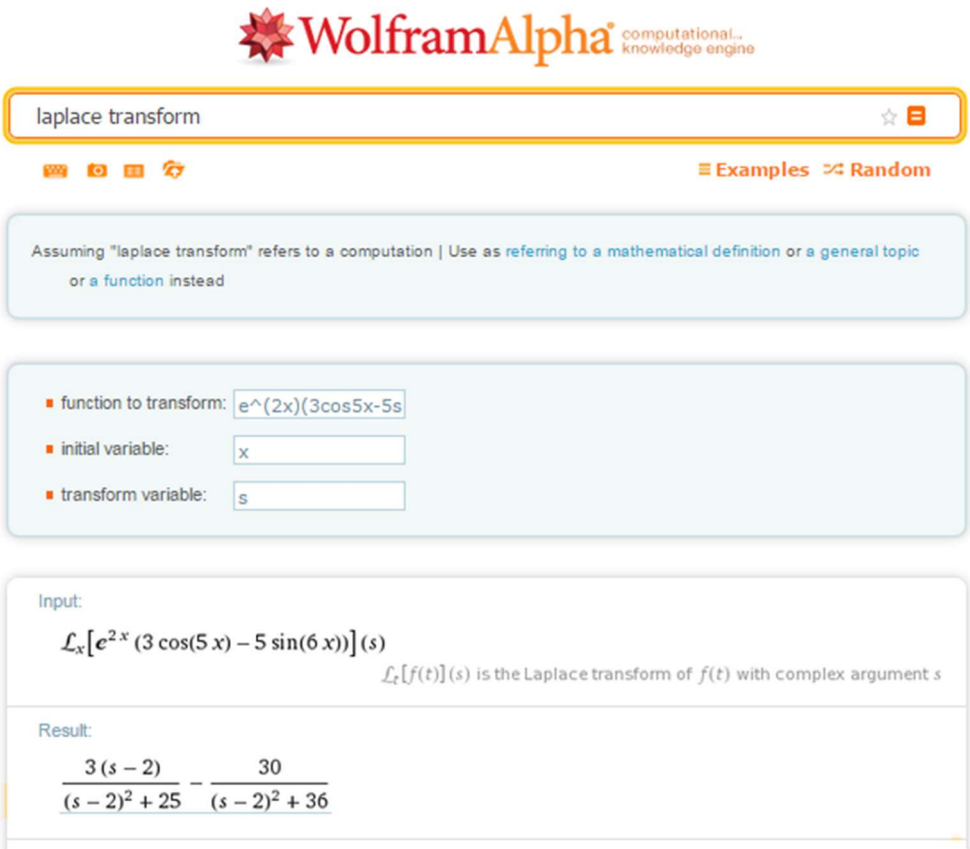
$$= F(s)$$

จากทฤษฎีบท 7.3 จะได้ว่า

$$L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\} = F(s-2)$$

$$= \frac{3(s-2)}{(s-2)^2+25} - \frac{30}{(s-2)^2+36}$$

ดังนั้น $L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\} = \dfrac{3(s-2)}{(s-2)^2+25} - \dfrac{30}{(s-2)^2+36}$ สำหรับ $s > 2$



ภาพประกอบที่ 7.10 ผลเฉลยของ $L\left\{e^{2x}(3\cos 5x - 5\sin 6x)\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 7.20 จงหา $L\{e^{-x}x\cos 2x\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\{\cos 2x\} = \dfrac{s}{s^2+4} = F(s)$

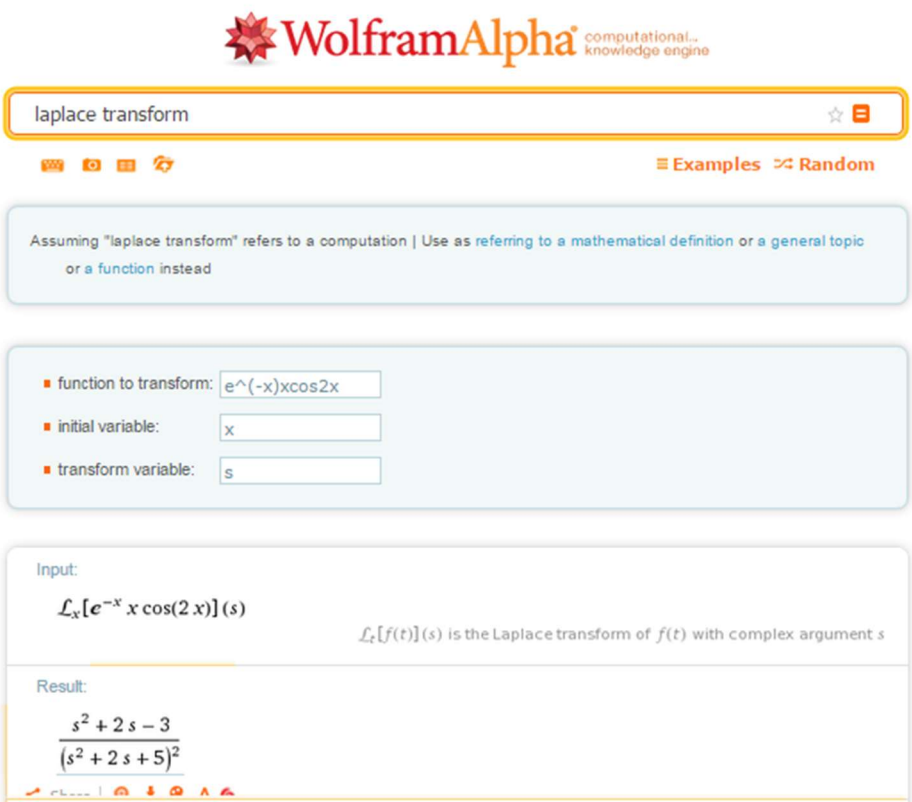
และ $\dfrac{d}{dx}F(s) = \dfrac{(s^2+4)-s(2s)}{(s^2+4)^2} = \dfrac{-s^2+4}{(s^2+4)^2}$

จากทฤษฎีบท 7.2 สมบัติผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระจะได้

$$\begin{aligned} L\{x\cos 2x\} &= (-1)^1 \frac{d}{ds}F(s) \\ &= \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2} \\ &= G(s) \end{aligned}$$

นั่นคือ $L\{e^{-x}x\cos 2x\} = G(s+1) = \dfrac{(s+1)^2-4}{\left((s+1)^2+4\right)^2}$

ดังนั้น $L\{e^{-x}x\cos 2x\} = \dfrac{(s+1)^2-4}{\left((s+1)^2+4\right)^2}$ สำหรับ $s > -1$



ภาพประกอบที่ 7.11 ผลเฉลยของ $L\{e^{-x}x\cos 2x\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันแกมมา

ฟังก์ชันแกมมาเป็นอีกฟังก์ชันหนึ่งที่เกี่ยวข้องกับผลการแปลงลาปลาซโดยที่สามารถนำไปใช้ในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตและหาผลการแปลงลาปลาซได้เช่นกัน ซึ่งความหมายของฟังก์ชันแกมมาได้ให้บทนิยามไว้ดังนี้คือ (อุบล กลองกระโทก. 2549 : 286-288)

บทนิยาม 7.5 ฟังก์ชันแกมมา คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Gamma(p)$ สำหรับจำนวนจริงบวก p ใด ๆ

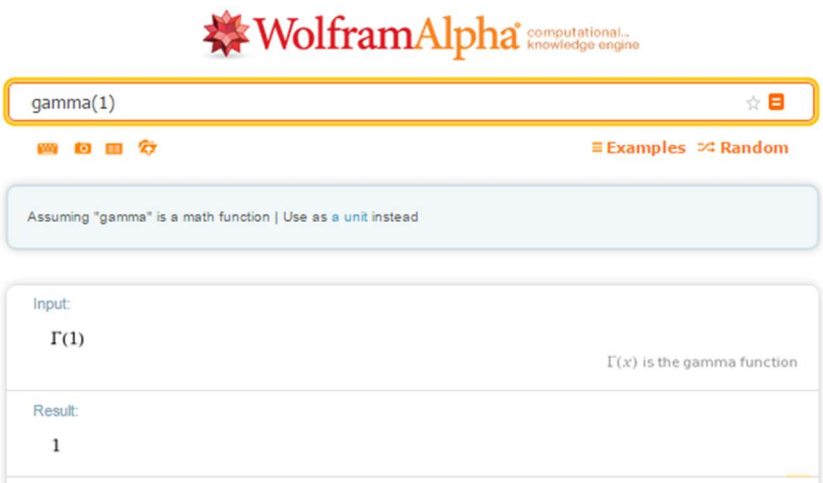
นั่นคือ $\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ ซึ่งจะเห็นว่าอยู่ในรูปของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบคล้ายกับผลการแปลงลาปลาซดังจะแสดงดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.21 จงหาค่าของ $\Gamma(1)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\Gamma(p)=\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\Gamma(1)&=\int_0^\infty x^{1-1}e^{-x}\,dx\\&=\int_0^\infty x^{0}e^{-x}\,dx\\&=\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,dx\\&=\lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]\Big|_0^b=1\end{aligned}$$

ดังนั้น $\Gamma(1)=1$ ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $\Gamma(1)$ ดังภาพประกอบที่ 7.12



ภาพประกอบที่ 7.12 ผลเฉลยของ $\Gamma(1)$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 7.22 จงหาค่าของ $\Gamma(3)$

วิธีทำ เนื่องจาก $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$

ดังนั้น $\Gamma(3) = \int\limits_0^\infty x^{3-1}e^{-x}\,dx$

$$= \int\limits_0^\infty x^2e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b x^2e^{-x}\,dx$$

หาปริพันธ์ทีละส่วนสองครั้งจะได้ว่า

$$\int x^2e^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]\Big|_0^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left[\left(-x^2e^{-b} - 2xe^{-b} - 2e^{-b}\right) - \left(-(0)^2e^{-0} - 2(0)e^{-0} - 2e^{-0}\right)\right]$$

$$= 2$$

ดังนั้น $\Gamma(3) = 2$

จากตัวอย่าง 7.21 และ 7.22 ใช้วิธีการหาเช่นเดียวกันจะได้ว่า $\Gamma(n-1) = n!$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 7.23 จงหาค่าของ $\dfrac{10\Gamma(4)}{\Gamma(2)}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\Gamma(n-1) = n!$

จะได้

$$\frac{10\Gamma(4)}{\Gamma(2)} = \frac{10(3!)}{1!}$$

$$= 60$$

ดังนั้น $\dfrac{10\Gamma(4)}{\Gamma(2)} = 60$

จากบทนิยามของฟังก์ชันแกมมา เราสามารถนำมาใช้ในการหาค่าของปริพันธ์ไม่ตรงแบบและหาผลการแปลงลาปลาซได้ดังต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.24 จงหาค่าของ $\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx$

วิธีทำ เนื่องจาก $\Gamma(p) = \int\limits_0^\infty x^{p-1} e^{-x}\,dx$

และ $x^4 e^{-x}\,dx = x^{5-1} e^{-x}\,dx$

$$= \Gamma(5)$$

$$= \Gamma(4+1)$$

$$= 4!$$

$$= 24$$

ดังนั้น $\int\limits_0^\infty x^4 e^{-x}\,dx = 24$

ตัวอย่าง 7.25 จงหาค่าของ $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-2x}\,dx$

วิธีทำ ให้ $u = 2x$

ได้ $du = 2dx$ หรือ $dx = \dfrac{du}{2}$

จะได้ว่า $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-2x}\,dx = \int\limits_0^\infty \left(\dfrac{u}{2}\right)^3 e^{-u}\,\dfrac{du}{2}$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_0^\infty u^3 e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{16}\int\limits_0^\infty u^{4-1} e^{-u}\,du$$

$$= \frac{1}{16}\Gamma(4)$$

$$= \frac{1}{16}\Gamma(3+1)$$

$$= \frac{1}{16}(3!)$$

$$= \frac{3}{8}$$

ดังนั้น $\int\limits_0^\infty x^3 e^{-2x}\,dx = \dfrac{3}{8}$

จากตัวอย่างการหาฟังก์ชันแกมมาและการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตที่ผ่านมานั้น เราสามารถนำมาหาผลการแปลงลาปลาซได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.26 จงหา $L\left\{x^2\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{x^2\right\} = \int\limits_0^\infty x^2 e^{-sx}\,dx$

ให้ $sx = z$ หรือ $x = \dfrac{z}{s}$

จะได้ $dx = \dfrac{1}{s}dz$ เมื่อ $s > 0$

ทำให้ $L\left\{x^2\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-z}\left(\dfrac{z}{s}\right)^2 \dfrac{1}{s}dz$

$$= \frac{1}{s^3}\int\limits_0^\infty e^{-z}z^2\,dz$$

$$= \frac{1}{s^3}\int\limits_0^\infty e^{-z}z^{3-1}\,dz$$

$$= \frac{1}{s^3}\Gamma(3)$$

$$= \frac{2}{s^3}$$

ดังนั้น $L\left\{x^2\right\} = \dfrac{2}{s^2}$

จากตัวอย่าง 7.24 และ 7.25 $L\left\{x^2\right\} = \dfrac{2}{s^3}$ ต่างก็มีค่าเท่ากัน แต่หรับวิธีทำตัวอย่าง 7.26 นั้นเป็นการหาผลการแปลงลาปลาซโดยใช้ฟังก์ชันแกมมา ก็จะทำได้ง่ายสะดวกและรวดเร็วขึ้น ทำให้ได้ว่า $L\left\{x^n\right\} = \dfrac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$ เมื่อ $n > -1$ และ $s > 0$

ตัวอย่าง 7.27 จงหา $L\left\{x^5\right\}$

วิธีทำ เนื่องจาก $L\left\{x^5\right\} = \dfrac{\Gamma(5+1)}{s^6}$

$$= \frac{5!}{s^6}$$

ดังนั้น $L\left\{x^5\right\} = \dfrac{5!}{s^6}$

ผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันคาบ

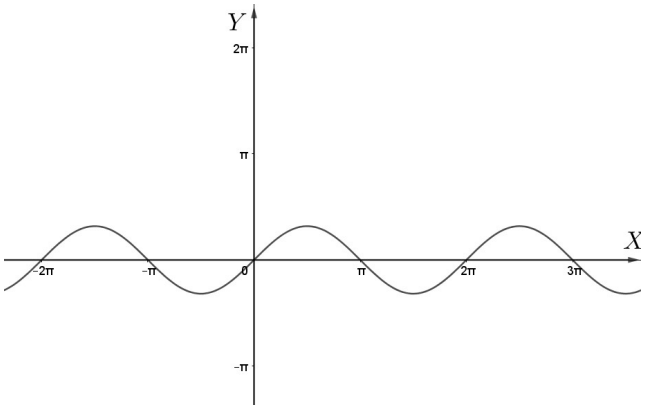
กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันถ้า $f(x+T)=f(x)$ เรียก T ว่าคาบของฟังก์ชัน และเรียก f ว่าฟังก์ชันคาบ ซึ่งสามารถให้บทนิยามได้ดังนี้ (อุบล กลองกระโทก. 2549 : 289)

บทนิยาม 7.6 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันและ $T>0$ ถ้า $f(x+T)=f(x)$ จะเรียก f ว่าฟังก์ชันคาบ และเรียก T ว่าคาบของฟังก์ชัน

ตัวอย่างเช่น $f(x)=\sin x$ เป็นฟังก์ชันคาบเพราะ

$$f(x+2\pi)=\sin(x+2\pi)=\sin x=f(x)$$

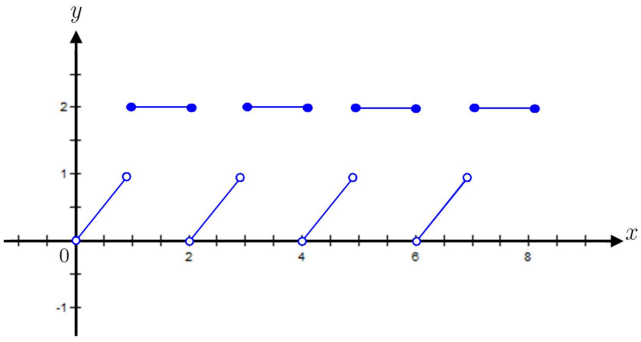
เขียนกราฟได้ดังนี้



ภาพประกอบที่ 7.13 กราฟแสดงฟังก์ชันคาบ $f(x)=\sin x$

ที่มา : อุบล กลองกระโทก (2549 : 289)

กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x<1 \\ 2, & 1\le x\le 2 \end{cases}$ สำหรับช่วง $(0,2]$ เป็นฟังก์ชันคาบและมีคาบเท่ากับ 2 เขียนกราฟได้ดังนี้



ภาพประกอบที่ 7.14 กราฟแสดงฟังก์ชันคาบในช่วง $(0,2]$

ที่มา : อุบล กลองกระโทก (2549 : 289)

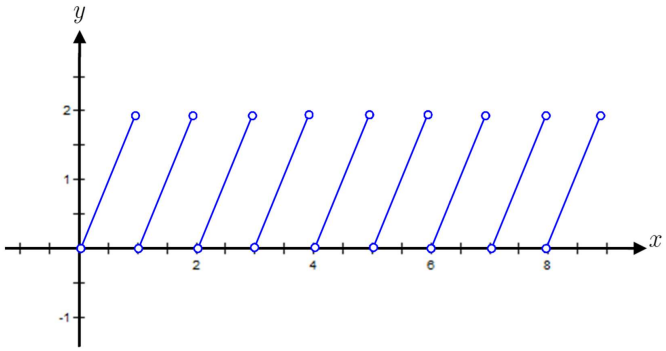
วชิรารักษ์ โอรสรัมย์ (2558 : 309) ได้กล่าวถึงทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องกับผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันคาบมีดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันคาบ โดย $f(x+T)=f(x),\ T>0$ แล้ว

$$L\{f(x)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-sx}f(x)\,dx$$

ตัวอย่าง 7.28 จงวาดกราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันคาบและมีคาบเท่ากับ 1 ซึ่งมีบทนิยามโดย $f(x)=2x$ ในช่วง $(0,1)$ และจงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชัน f

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชันคาบได้ดังนี้



ภาพประกอบที่ 7.15 กราฟแสดงฟังก์ชันคาบ $f(x)=2x$ ในช่วง $(0,1)$
ที่มา : วชิรารักษ์ โอรสรัมย์ (2558 : 309)

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันคาบ ดังนั้น $L\left\{f(x)\right\}=\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\displaystyle\int_0^T e^{-sx}f(x)\,dx$

แทนค่า $T=1$ และ $f(x)=2x$ จะได้

$$L\left\{f(x)\right\}=\frac{1}{1-e^{-s}}\int_0^1 e^{-sx}(2x)\,dx$$

$$=\frac{2}{1-e^{-s}}\int_0^1 xe^{-sx}\,dx$$

ใช้เทคนิคการหาปริพันธ์แบบแยกเศษส่วนย่อย

$$\int_0^1 xe^{-sx}dx=\left[-\frac{xe^{-sx}}{s}-\frac{e^{-sx}}{s^2}\right]\Bigg|_0^1$$

$$=\left[-\frac{(1)e^{-s(1)}}{s}-\frac{e^{-s(1)}}{s^2}\right]-\left[-\frac{(0)e^{-s(0)}}{s}-\frac{e^{-s(0)}}{s^2}\right]$$

$$=-\frac{e^{-s}}{s}-\frac{e^{-s}}{s^2}+\frac{1}{s^2}$$

จะได้ว่า

$$L\left\{f(x)\right\} = \frac{1}{1-e^{-s}}\left(-\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2}\right)$$

$$= \frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2(1-e^{-s})}$$

$$= \frac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$$

ดังนั้น $L\left\{f(x)\right\} = \dfrac{1-(s+1)e^{-s}}{s^2(1-e^{-s})}$

ผลการแปลงลาปลาซผกผัน

ก่อสุข วีระถาวร (2539 : 137) ได้กล่าวว่า จากหัวข้อที่ผ่านมาแล้วนั้น ผลการแปลงลาปลาซของ $f(x)$ แทนด้วย $L\left\{f(x)\right\} = F(s)$ หมายถึงการส่งค่าที่เป็นฟังก์ชัน $f(x)$ ไปเป็นฟังก์ชัน $F(s)$ และเรียก $f(x)$ ว่าเป็นผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s)$ สำหรับผลการแปลงลาปลาซผกผันนั้น มีประโยชน์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ดังนั้นก่อนที่จะไปหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันนั้นต้องศึกษาผลการแปลงผกผันลาปลาซดังหัวข้อต่อไปนี้

การหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน

ก่อนที่จะศึกษาการแปลงลาปลาซผกผันจะได้ให้นิยามของผลการแปลลาปลาซผกผันดังต่อไปนี้

บทนิยาม 7.7 ถ้า $L\left\{f(x)\right\} = F(s)$ เรียก $f(x)$ ว่า**ผลการแปลงลาปลาซผกผัน**ของ $F(s)$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(x)$ (ก่อสุข วีระถาวร. 2539 : 137)

จากบทนิยาม 7.7 นั้น $L^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(x)$ เมื่อ $L\left\{f(x)\right\} = F(s)$ แสดงว่าสมบัติและสูตรต่าง ๆ ของผลการแปลงลาปลาซ สามารถนำมาใช้กับการแปลงลาปลาซผกผันได้

ตัวอย่างเช่น $L\{1\} = \dfrac{1}{s}$ เมื่อ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 1$

$L\left\{e^{ax}\right\} = \dfrac{1}{s-a}$ เมื่อ $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{ax}$

ดังนั้นสมบัติพื้นฐานสำคัญ ๆ ที่จะช่วยในการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันของฟังก์ชันพื้นฐานสรุปเป็นสูตรได้ดังต่อไปนี้

1. $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s}\right\}$
2. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-a}\right\} = e^{ax}$
3. $L^{-1}\left\{\dfrac{n!}{s^{n+1}}\right\} = x^n$
4. $L^{-1}\left\{\dfrac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin ax$
5. $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos ax$

ตัวอย่าง 7.29 จงหา

1. $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s}\right\}$
2. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\}$
3. $L^{-1}\left\{\dfrac{30}{s^4}\right\}$
4. $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2+4}\right\}$
5. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s}{s^2+25}\right\}$

วิธีทำ ใช้สมบัติของผลการแปลงลาปลาซผกผัน ได้ดังนี้

1. $L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s}\right\} = 2L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s}\right\} = 2(1) = 2$
2. $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s-2}\right\} = e^{2x}$
3. $L^{-1}\left\{\dfrac{30}{s^4}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{5(6)}{s^{3+1}}\right\} = 5L^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^{3+1}}\right\} = 5L^{-1}\left\{\dfrac{3!}{s^{3+1}}\right\} = 5x^3$
4. $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s^2+4}\right\} + L^{-1}\left\{\left(\dfrac{5}{2}\right)\dfrac{2}{s^2+4}\right\} = \dfrac{5}{2}L^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+2^2}\right\} = \dfrac{5}{2}\sin 2x$
5. $L^{-1}\left\{\dfrac{2s}{s^2+25}\right\} = 2L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+25}\right\} = 2L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+5^2}\right\} = 2\cos 5x$

ทฤษฎีบท 7.5 ถ้า L^{-1} เป็นการแปลงลาปลาซผกผันแล้วจะได้ว่า L^{-1} เป็นการแปลงเชิงเส้น นั่นคือ

$$L^{-1}\left\{aF(x)+bG(x)\right\} = aL^{-1}\left\{F(x)\right\} + bL^{-1}\left\{G(x)\right\}$$

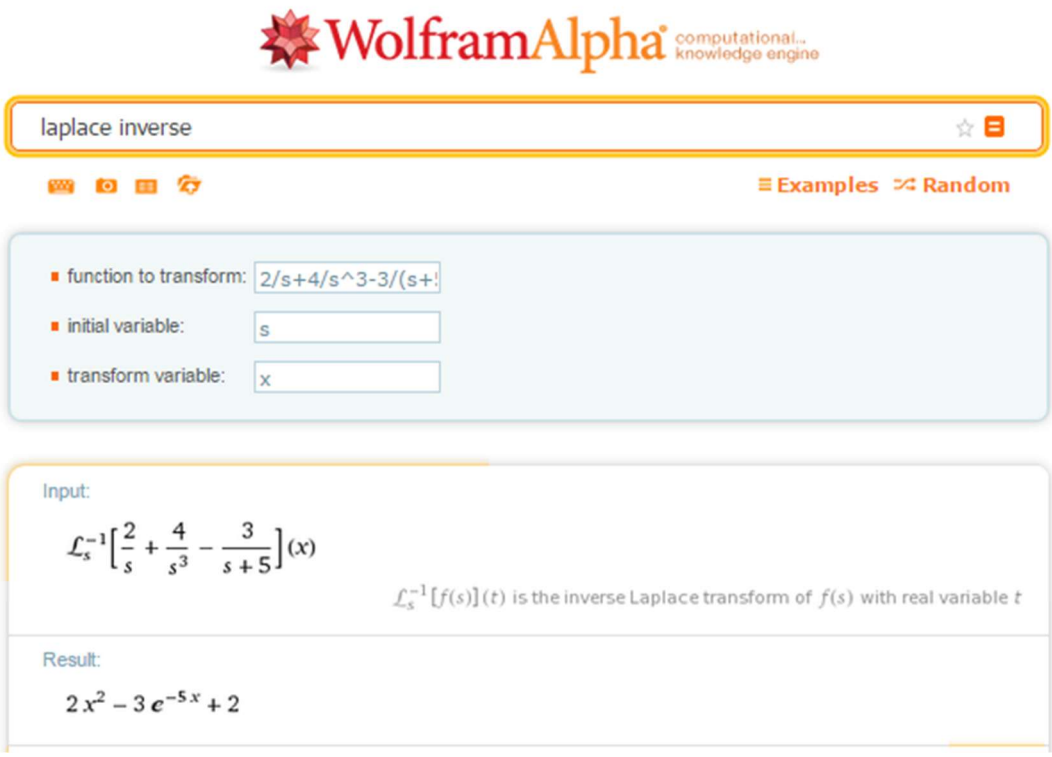
ตัวอย่าง 7.29 จงหา $L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s+5}\right\}$

วิธีทำ ใช้สมบัติของผลการแปลงลาปลาซผกผัน และทฤษฎีบท 7.5 ได้

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s+5}\right\} &= L^{-1}\left\{\frac{2}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{4}{s^3}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{3}{s+5}\right\} \\
&= 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{2}{s^{2+1}}\right\}-3L^{-1}\left\{\frac{1}{s-(-5)}\right\} \\
&= 2(1)+2(x^2)-3(e^{-5x}) \\
&= 2+2x^2-3e^{-5x}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s+5}\right\}=2+2x^2-3e^{-5x}$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s+5}\right\}$ ดังภาพประกอบที่ 7.16



ภาพประกอบที่ 7.16 ผลเฉลยของ $L^{-1}\left\{\frac{2}{s}+\frac{4}{s^3}-\frac{3}{s+5}\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 7.30 จงหา $L^{-1}\left\{\dfrac{4s-1}{5s^2+20}\right\}$

วิธีทำ $L^{-1}\left\{\dfrac{4s-1}{5s^2+20}\right\} = \dfrac{1}{5}L^{-1}\left\{\dfrac{4s-1}{s^2+4}\right\}$

$$= \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+4} - \frac{1}{s^2+4}\right\}$$

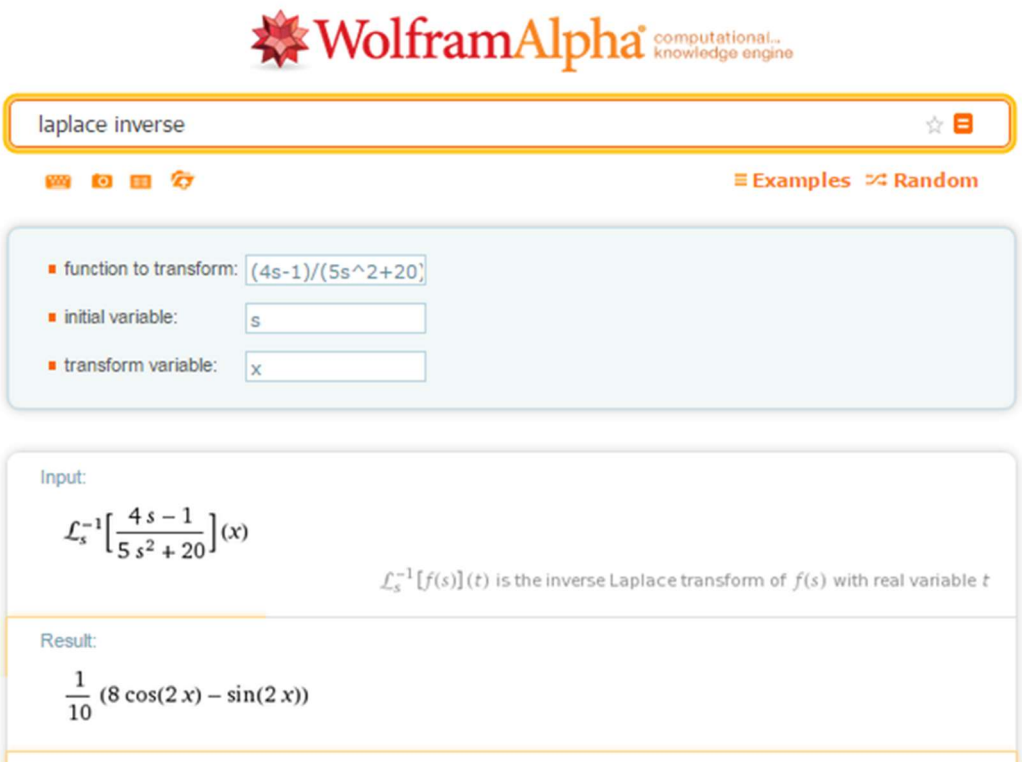
$$= \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{4s}{s^2+4}\right\} - \frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}$$

$$= \frac{4}{5}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+2^2}\right\} - \frac{1}{10}L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+2^2}\right\}$$

$$= \frac{4}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\sin 2x$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\dfrac{4s-1}{5s^2+20}\right\} = \dfrac{4}{5}\cos 2x - \dfrac{1}{10}\sin 2x$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L^{-1}\left\{\dfrac{4s-1}{5s^2+20}\right\}$ ดังภาพประกอบที่ 7.17



ภาพประกอบที่ 7.17 ผลเฉลยของ $L^{-1}\left\{\dfrac{4s-1}{5s^2+20}\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

การหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

อุบล กลองกระโทก (2549 : 296) ได้กล่าวว่า ถ้าเราไม่สามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยใช้สมบัติพื้นฐาน 5 ข้อที่ผ่านมานั้น และจากมีสมบัติของผลการแปลงลาปลาซผกผันที่อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ เช่น

$$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\} = \sin ax \text{ หรือ } L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+a^2}\right\} = \cos ax$$

การจัดรูป $F(s)$ ให้อยู่ในรูปดังกล่าวจะช่วยให้หาค่าผลการแปลงลาปลาซผกผันได้ง่ายและสะดวกขึ้น ซึ่งมีหลักการจัดดังตัวอย่างต่อไปนี้

$$\begin{aligned} s^2+4s+3 &= (s^2+4s+4)+3-4 \\ &= (s+2)^2-1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3s^2-12s+15 &= 3(s^2-4s+5) \\ &= 3\left[(s^2-4s+4)+5-4\right] \\ &= 3\left[(s-2)^2+1\right] = 3(s-2)^2+3 \end{aligned}$$

และสำหรับกรณีทั่ว ๆ ไป as^2+bs+c โดยที่ a,b และ c เป็นค่าคงตัว สามารถจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้ดังนี้คือ

$$\begin{aligned} as^2+bs+c &= a\left[s^2+\frac{b}{a}s\right]+c \\ &= a\left[s^2+\frac{b}{a}s+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c \\ &= a\left(s+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a} \end{aligned}$$

เช่นถ้าเราจัด $3s^2-12s+15$ ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์โดยแทนค่า $a=3, b=-12$ และ $c=15$ ได้

$$\begin{aligned} 3s^2-12s+15 &= 3\left(s+\frac{(-12)}{2(3)}\right)^2+\frac{4(3)(15)-(-12)^2}{4(3)} \\ &= 3(s-2)^2+3 \end{aligned}$$

หลังจากที่จัดฟังก์ชันให้อยู่ในรูปกำลังสองสมบูรณ์ได้แล้วยังต้องอาศัยสมบัติการเลื่อนขนานด้วย ดังนี้

จากหัวข้อที่ผ่านมา ถ้า $L\{f(x)\} = F(s)$ แล้ว $L\{e^{ax}f(x)\} = F(s-a)$

ดังนั้น $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{ax}f(x)$

ตัวอย่าง 7.31 จงหา $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-2s+5}\right\}$

วิธีทำ จาก $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-2s+5}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2-2s+1)+5-1}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+4}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2+2^2}\right\}$$

เนื่องจาก $F(s-1) = \dfrac{1}{(s-1)^2+2^2}$ ดังนั้น $F(s) = \dfrac{1}{s^2+2^2}$

จะได้ว่า $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x$

และจาก $L^{-1}\{F(s-1)\} = e^x f(x)$

$$= e^x \frac{1}{2}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{2}e^x \sin 2x$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \dfrac{1}{2}e^x \sin 2x$

ตัวอย่าง 7.32 จงหา $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\}$

วิธีทำ จาก $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{(s^2+4s+4)+4}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+4}{(s+2)^2+4}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{(s+2)+2}{(s+2)^2+2^2}\right\}$$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+2}{(s+2)^2+2^2}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{(s+2)^2+2^2}\right\}$$

$$= e^{-2x}\cos 2x + e^{-2x}\sin 2x$$

$$= e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x)$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\dfrac{s+4}{s^2+4s+8}\right\} = e^{-2x}(\cos 2x + \sin 2x)$

การหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยการแยกเศษส่วนย่อย

ก่อสุข วีระถาวร (2539 : 150-151) ได้กล่าวว่า การแยกเศษส่วนย่อยของฟังก์ชันเศษส่วนตรรกยะ $\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ เมื่อ $Q(s) \neq 0$ โดยที่ $P(s)$ และ $Q(s)$ เป็นพหุนามที่ไม่มีตัวประกอบร่วม ซึ่งระดับขั้นของ $P(s)$ น้อยกว่า $Q(s)$ สามารถทำได้โดยมีลำดับขั้นตอนดังนี้

1. แยกตัวประกอบของ $Q(s)$ ซึ่งตัวประกอบของ $Q(s)$ จะมีแต่ตัวประกอบเชิงเส้นในรูปของ $(s-a)$ และตัวประกอบกำลังสองในรูป as^2+bs+c (ซึ่งแยกตัวประกอบต่อไปไม่ได้) เท่านั้น

2. ถ้า $(s-a)^m$ เป็นตัวประกอบของ $Q(s)$ แล้วจะเกิดผลบวกของเศษส่วนย่อย m เศษส่วนย่อยจากตัวประกอบ $(s-a)^m$ ในรูปของ

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\frac{A_3}{(s-a)^3}+\cdots+\frac{A_m}{(s-a)^m}$$

3. ถ้า $(as^2+bs+c)^n$ เป็นตัวประกอบของ $Q(s)$ แล้วจะเกิดผลบวกของเศษส่วนย่อย n เศษส่วนย่อยจากตัวประกอบ $(as^2+bs+c)^n$ ในรูปของ

$$\frac{A_1s+B_1}{as^2+bs+c}+\frac{A_2s+B_2}{(as^2+bs+c)^2}+\frac{A_3s+B_3}{(as^2+bs+c)^3}+\cdots+\frac{A_ns+B_n}{(as^2+bs+c)^n}$$

4. แล้วหาค่าของสัมประสิทธิ์ทุกตัว โดยวิธีหนึ่งวิธีใดก็ได้ แต่โดยทั่ว ๆ ไปนิยมวิธีการเทียบสัมประสิทธิ์ หรือ การแทนค่าที่เหมาะสม

เมื่อแยกเศษส่วนย่อยเสร็จแล้วเราสามารถใช้สมบัติของผลการแปลงลาปลาซกับการเลื่อนขนานช่วยในกาหาผลการแปลงลาปลาซผกผัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.33 จงหา $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}$

วิธีทำ พิจารณา $\dfrac{1}{(s-1)(s+2)}=\dfrac{A}{s-1}+\dfrac{B}{s+2}$

$$1=\left(\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}\right)\left[(s-1)(s+2)\right]$$

$$1=A(s+2)+B(s-1)$$

$$1=As+2A+Bs-B$$

$$1=(A+B)s+2A-B$$

จากการเทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ว่า $A+B=0$ และ $2A-B=1$

แก้ระบบสมการได้ $A = \frac{1}{3}$ และ $B = -\frac{1}{3}$

นั่นคือ $$\frac{1}{(s-1)(s+2)} = \frac{1}{3(s-1)} - \frac{1}{3(s+2)}$$

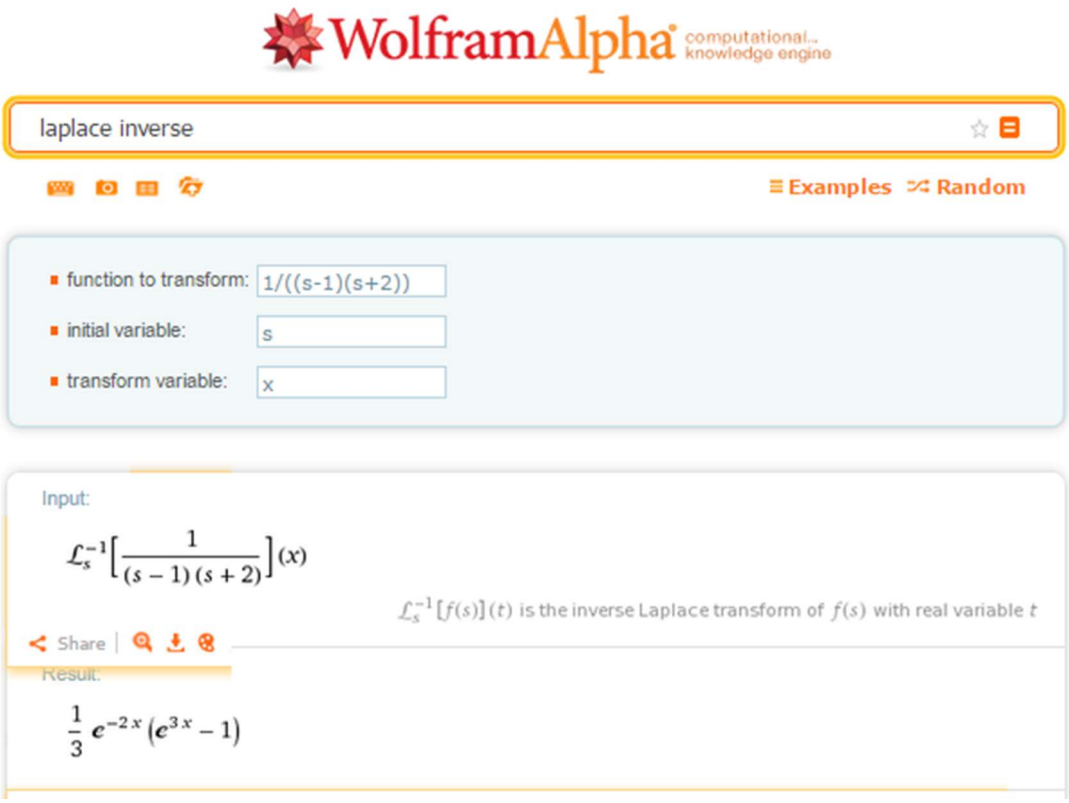
และ $$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\} = \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} - \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

$$= \frac{1}{3}e^{x} - \frac{1}{3}e^{-2x}$$

$$= \frac{1}{3}(e^{x} - e^{-2x})$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\} = \frac{1}{3}(e^{x} - e^{-2x})$

ใช้ Wolfram Alpha เพื่อหา $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}$ ดังภาพประกอบที่ 7.18



ภาพประกอบที่ 7.18 ผลเฉลยของ $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 7.34 จงหา $L^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}\right\}$

วิธีทำ โดยการแยกเศษส่วนย่อยจะได้ว่า

$$\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{(s-2)^3}$$

$$5s^2-15s+7=\left[\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s-2}+\frac{C}{(s-2)^2}+\frac{D}{(s-2)^3}\right]\left[(s+1)(s-2)^3\right]$$

$$5s^2-15s+7=A(s-2)^3+B(s-2)^2+C(s-2)+D$$

หาค่า A,B,C และ D โดยการแทนค่า s ที่เหมาะสมดังต่อไปนี้

ให้ $s=-1$

$$5(1)-15(-1)+7=A(-27)$$

$$A=-1$$

ให้ $s=2$

$$5(4)-15(2)+7=D(3)$$

$$D=-1$$

ให้ $s=0$

$$7=-8A+4B-2C+D$$

$$-2=4B-2C$$

ให้ $s=-1$

$$5-15+7=-A+2B-2C+2D$$

$$-2=2B-2C$$

แก้สมการได้ $B=1$ และ $C=2$

นั่นคือ $$\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}=\frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s-2}+\frac{2}{(s-2)^2}+\frac{1}{(s-2)^3}$$

และ $$L^{-1}\left\{\frac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}+\frac{1}{s-2}+\frac{2}{(s-2)^2}+\frac{1}{(s-2)^3}\right\}$$

$$=L^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{2}{(s-2)^2}\right\}$$

$$+L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3}\right\}$$

$$=-e^{-x}+e^{2x}+2xe^{2x}-\frac{1}{2}x^2e^{2x}$$

ดังนั้น $L^{-1}\left\{\dfrac{5s^2-15s+7}{(s+1)(s-2)^3}\right\}=-e^{-x}+e^{2x}+2xe^{2x}-\dfrac{1}{2}x^2e^{2x}$

การหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นด้วยผลการแปลงลาปลาซ

จากที่ได้กล่าวมาแล้วในตอนต้นว่าการแปลงลาปลาซสามารถนำมาประยุกต์ใช้กับการหาผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้นได้ และยังมีทฤษฎีบทที่สำคัญที่ในการนำไปแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับปัญหาค่าเริ่มต้นได้เป็นอย่างดี คือผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์ ดังนี้ (ดำรง ทิพย์โยธา (2541 : 233-234)

ทฤษฎีบท 7.6 ถ้า $f(x), f'(x), f''(x), ..., f^{(n-1)}(x)$ ต่อเนื่องบนช่วง $[0,\infty)$ และถ้า $f^{(n)}(x)$ มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[0,\infty)$ จะได้ว่า

$$L\left\{f^{(n)}(x)\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

โดยที่ $F(s) = L\{f(x)\}$

สำหรับการหาผลเฉลยของปัญหาเงื่อนไขค่าเริ่มต้นนั้นมีหลักการดังต่อไปนี้

1. จากสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้าง โดยใช้ทฤษฎีบท 7.6 ที่ได้กล่าวมาข้างต้น
2. จากเงื่อนไขค่าเริ่มต้น หาผลการแปลงปลาปลาซของฟังก์ชันในเทอม $F(s)$
3. หาผลการแปลงปลาปลาซของฟังก์ชัน $F(s)$ ในเทอมของฟังก์ชัน $f(x)$

ตัวอย่าง 7.35 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y' - 3y = 0$, $y(0) = 5$

วิธีทำ เนื่องจาก $y = f(x), y(0) = 5$ และ $L\{y\} = F(s)$

จากสมการ $y' - 3y = 0$ หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างจะได้

$$L\left\{y' - 3y\right\} = L\{0\}$$
$$L\left\{y'\right\} - 3L\left\{y\right\} = 0$$

จากทฤษฎีบท 8.6 ได้ว่า $L\left\{y'\right\} = sF(s) - y(0)$

ให้ $L\{y\} = F(s)$

จะได้ $sF(s) - y(0) - 3F(s) = 0$

$$(s-3)F(s) - 5 = 0$$
$$F(s) = \frac{5}{s-3}$$

หาผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s)$ จะได้ว่า

$$y = L^{-1}\{F(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{5}{s-3}\right\} = 5L^{-1}\left\{\frac{1}{s-3}\right\} = 5e^{3x}$$

ดังนั้น ผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้นของ $y' - 3y = 0,\ y(0) = 5$ คือ $y = 5e^{3x}$

ตัวอย่าง 7.36 จงแก้ปัญหาค่าเริ่มต้น $y'' - y' - 2y = 4x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$

วิธีทำ จากสมการ หาผลการแปลงลาปลาซทั้งสองข้างจะได้

$$L\left\{y'' - y' - 2y\right\} = L\left\{4x^2\right\}$$

$$L\left\{y''\right\} - L\left\{y'\right\} - 2L\left\{y\right\} = 4L\{x^2\}$$

เนื่องจาก $y = f(x), y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ และ $L\{y\} = F(s)$

จากทฤษฎีบท 8.6 ได้ว่า

$$L\left\{y''\right\} = s^2F(s) - sy(0) - y'(0) = s^2F(s) - s - 4$$

$$L\left\{y'\right\} = sF(s) - y(0) = sF(s) - 1$$

$$L\left\{y\right\} = F(s)$$

จะได้

$$\left[s^2F(s) - s - 4\right] - \left[sF(s) - 1\right] - 2F(s) = 4L\left\{x^2\right\}$$

$$s^2F(s) - s - 4 - sF(s) + 1 - 2F(s) = 4\left(\frac{2}{s^3}\right)$$

$$s^2F(s) - (s+2)F(s) - s - 3 = \frac{8}{s^3}$$

$$\left[s^2 - (s+2)\right]F(s) - s - 3 = \frac{8}{s^3}$$

$$F(s) = \frac{1}{s^2 - (s+2)}\left[\frac{8}{s^3} + s + 3\right] = \frac{s+3}{s^2 - s - 2} + \frac{8}{s^3(s^2 - s - 2)}$$

เนื่องจาก $y = L^{-1}\left\{F(s)\right\} = L^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{s^2 - s - 2} + \dfrac{8}{s^3(s^2 - s - 2)}\right\}$

$$= L^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s-2)(s+1)} + \frac{8}{s^3(s-2)(s+1)}\right\}$$

พิจารณา $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}$ โดยการแยกเศษส่วนย่อยดังต่อไปนี้

$$\frac{s+3}{(s-2)(s+1)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s+1}$$

$$s + 3 = A(s+1) + B(s-2)$$

หาคา A และ B โดยการแทนค่า s ที่เหมาะสมดังต่อไปนี้

ให้ $s = -1$ จะได้

$$2 = -3B$$

$$B = -\frac{2}{3}$$

ให้ $s = 2$ จะได้

$$5 = 3A$$

$$A = \frac{5}{3}$$

นั่นคือ $\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)} = \dfrac{5}{3(s-2)} - \dfrac{2}{3(s+1)}$

และในทำนองเดียวกัน พิจารณา $\dfrac{8}{s^3(s-2)(s+1)}$ โดยการแยกเศษส่วนย่อย

ได้ดังนี้ $\dfrac{8}{s^3(s-2)(s+1)} = \dfrac{C}{s} + \dfrac{D}{s^2} + \dfrac{E}{s^3} + \dfrac{F}{s-2} + \dfrac{G}{s+1}$

หรือ

$$8 = Cs^2(s-2)(s+1) + Ds(s-2)(s+1) + E(s-2)(s+1) + F(s+1) + G(s+1)$$

จากการแก้ระบบสมการเพื่อหาค่า D, D, E, F และ G ได้ดังนี้

$$D = -3, D = 2, E = -4, F = \frac{1}{3} \text{ และ } G = \frac{8}{3}$$

นั่นคือ $\dfrac{8}{s^3(s-2)(s+1)} = -\dfrac{3}{s} + \dfrac{2}{s^2} - \dfrac{4}{s^3} + \dfrac{1}{3(s-2)} + \dfrac{8}{3(s+1)}$ ได้

$$\begin{aligned}
y &= L^{-1}\left\{F(s)\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{s+3}{s^2-s-2} + \frac{8}{s^3(s^2-s-2)}\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{5}{3(s-2)} - \frac{2}{3(s+1)} - \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2} - \frac{4}{s^3} + \frac{1}{3(s-2)} + \frac{8}{3(s+1)}\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{5}{3(s-2)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{2}{3(s+1)}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{3}{s}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{4}{s^3}\right\} \\
&\quad + L^{-1}\left\{\frac{1}{3(s-2)}\right\} + L^{-1}\left\{\frac{8}{3(s+1)}\right\} \\
&= \frac{5}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - \frac{2}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - 3L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} + 2L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} - 4L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \\
&\quad + \frac{1}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + \frac{8}{3}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} \\
&= \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยปัญหาค่าเริ่มต้นของ $y'' - y' - 2y = 4x^2$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 4$ คือ

$$y = \frac{5}{3}e^{2x} - \frac{2}{3}e^{-x} - 3 + 2x - 2x^2$$

สรุปท้ายบท

ผลการแปลงลาปลาซ เป็นการส่งค่าที่เป็นฟังก์ชันไปเป็นฟังก์ชันโดยใช้สัญลักษณ์แทนผลการแปลงลาปลาซของ f แทนด้วย $L\left\{f\right\}$ หรือ $L\left\{f(x)\right\}$ หมายความว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าได้บนช่วง $[0,\infty)$ แล้ว $L\left\{f(x)\right\}=\int\limits_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$ ผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันพื้นฐานสามารถนำไปใช้ได้โดยการแทนค่าได้ แต่ถ้า f ไม่อยู่ในรูปแบบที่สามารถใช้ฟังก์ชันพื้นฐานดังกล่าวได้ เราสามารถใช้คุณสมบัติต่าง ๆ เพื่อทำให้อยู่ในฟังก์ชันพื้นฐานโดยใช้ สมบัติเชิงเส้นของผลการแปลงลาปลาซ นั่นคือ

$L\left\{af(x)+bg(x)\right\}=aL\left\{f(x)\right\}+bL\left\{g(x)\right\}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงตัว

สมบัติผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันที่คูณด้วยตัวแปรอิสระ

ถ้ากำหนดให้ $L\{f(x)\}=F(s)$ แล้วจะได้ว่า $L\left\{x^n f(x)\right\}=(-1)^n\dfrac{d^n}{dx^n}F(s)$

สมบัติการเลื่อนขนานของผลการแปลงลาปลาซ

ถ้า $L\{f(x)\}=F(s)$ แล้วจะได้ว่า $L\left\{e^{ax}f(x)\right\}=F(s-a)$

และผลการแปลงลาปลาซกับฟังก์ชันแกมมา ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต นำไปสู่หาผลการแปลงลาปลาซได้ เพราะ ฟังก์ชันแกมมา คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\Gamma(p)$ สำหรับจำนวนจริงบวก p ใด ๆ นั่นคือ $\Gamma(p)=\int\limits_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ ซึ่งจะเห็นว่าอยู่ในรูปของการหาปริพันธ์ไม่ตรงแบบคล้ายกับผลการแปลงลาปลาซ

ผลการแปลงลาปลาซผกผันของ $F(s)$ แทนด้วยสัญลักษณ์ $L^{-1}\left\{F(s)\right\}$ และ $L^{-1}\left\{F(s)\right\}=f(x)$ ถ้า $L\left\{f(x)\right\}=F(s)$ สำหรับการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันนั้นถ้า $F(s)$ อยู่ในรูปฟังก์ชันพื้นฐานก็สามารถหา $L^{-1}\left\{F(s)\right\}$ โดยการแทนค่าได้แต่ถ้า $F(s)$ ไม่อยู่ในรูปฟังก์ชันพื้นฐาน แล้วเราสามารถหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ หรือการหาผลการแปลงลาปลาซผกผันโดยการแยกเศษส่วนย่อย ขึ้นอยู่กับ $F(s)$ ว่าควรจะใช้วิธีการใด และผลการแปลงลาปลาซนี้ นำไปแก้ปัญหาสมการเชิงอนุพันธ์ที่เกี่ยวกับปัญหาค่าเริ่มต้นได้เป็นอย่างดี โดยใช้ผลการแปลงลาปลาซของอนุพันธ์

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 7

1. จงหาค่าต่อไปนี้

   1.1 $L\{e^{-6x}\}$

   1.2 $L\{xe^{3x}\}$

   1.3 $L\{\sin 5x\}$

   1.4 $L\{e^{-6x}\cos 3x\}$

   1.5 $L\{e^{2x}x^3\}$

   1.6 $L\{3x^5e^x\}$

   1.7 $L\{e^x \sin x\}$

2. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = \begin{cases} 5, & 0 < x < 3 \\ 0, & 3 < x \end{cases}$

   2.2 $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & 0 < x < 1 \\ x, & 1 < x < 5 \\ 0, & 5 < x \end{cases}$

3. จงหาผลการแปลงลาปลาซของฟังก์ชันต่อไปนี้

   3.1 $f(x) = x^3 + e^{5x}$

   3.2 $f(x) = x^5 - xe^{5x} + 3\cos 5x$

   3.3 $f(x) = \cos 2x + 5e^{6x} + 12$

   3.4 $f(x) = x^3e^{5x} + 3e^{5x}\cos 5x$

4. จงหาค่าของ

   4.1 $\Gamma(3)$

   4.2 $\Gamma(10)$

   4.3 $\int\limits_0^\infty x^3e^{-x}\,dx$

   4.4 $\int\limits_0^\infty x^6e^{-3x}\,dx$

5. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันคาบและหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x)=\begin{cases}0, & 0<x<2\\ 1, & 2\le x<3\end{cases}$

6. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันคาบและหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x)=\begin{cases}x, & 0<x<1\\ 1, & 1<x<2\end{cases}$

7. จงหาค่าต่อไปนี้

7.1 $L^{-1}\left\{\dfrac{5}{s}\right\}$

7.2 $L^{-1}\left\{\dfrac{3}{s-5}\right\}$

7.3 $L^{-1}\left\{\dfrac{6}{s^2+4}\right\}$

7.4 $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+4}\right\}$

7.5 $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+5}{s^2+9}\right\}$

8. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันต่อไปนี้โดยการทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์และการเลื่อนขนาน

8.1 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+2s+1}\right\}$

8.2 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+4s+6}\right\}$

8.3 $L^{-1}\left\{\dfrac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\}$

8.4 $L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2-2s+3}\right\}$

9. จงหาผลการแปลงลาปลาซผกผันต่อไปนี้โดยการทำให้เป็นเศษส่วนย่อย

9.1 $L^{-1}\left\{\dfrac{s+3}{(s-2)(s+1)}\right\}$

9.2 $L^{-1}\left\{\dfrac{3s+7}{s^2-2s+3}\right\}$

9.3 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s(s^2-4)}\right\}$

9.4 $L^{-1}\left\{\dfrac{s^2-4}{(s-3)(s-2)(s+1)}\right\}$

10. จงหาผลเฉลยโดยใช้ผลการแปลงลาปลาซผกผันของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

10.1 $y' - 5y = 0$, $y(0) = 2$

10.2 $y' - 5y = e^{5x}$, $y(0) = 2$

10.3 $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 2$

10.4 $y'' + 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$

11. จงหาผลการแปลงลาปลาซของ $f(x) = -e^{5x}\sin 2x + 8e^{6x}\cos 5x$

12. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันคาบและหาผลการแปลงลาปลาซของของฟังก์ชันต่อไปนี้

12.1 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$

12.2 $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < 3 \\ 2x - 1, & 3 < x < 5 \\ 0, & 5 < x \end{cases}$

12.3 $f(x) = \begin{cases} e^{3x}, & 0 < x < 3 \\ \sin x, & 3 < x < 5 \\ x^2, & 5 < x \end{cases}$

13. จงหาผลเฉลยของสมการ $y'' - 4y = e^{-t}\cos t$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1\ y'(0) = 0$

เอกสารอ้างอิง

ก่อสุข วีระถาวร. (2539). **ผลการแปลงฟูริเยร์และลาปลาซ.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ดำรง ทิพย์โยธา. (2541). **การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์. (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** บุรีรัมย์ : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์.

อุบล กลองกระโทก. (2549). **คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 2.** กรุงเทพมหานคร : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2543). **สมการเชิงอนุพันธ์ 2 และการแปลงลาปลาซ.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพ ฯ : วงตะวัน.

George F. Simmons. (1991). **Differential Equations with Applications and Historical Notes.** Second Edition. McGraw-Hill.

William E. Boyce and Richaed C. Diprima. (2010). **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.** John Wiley & Son (Asia) Pte Ltd.

Wolfram Alpha LLC. **Wolframalpha** (online) Avaiable : http://www.wolframlpha.com

Wolfram, Stephen. (2017). **The Mathematica Book**. 5thed. Wolfram Media : Cambridge.