แผนบริหารการสอน
บทที่ 9 การประยุกต์ของสมการ
เชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

เนื้อหาประจำบท

1. การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง
2. การเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ
3. การเคลื่อนที่ที่มีแรงหน่วงแต่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ
4. การเคลื่อนที่ที่มีทั้งแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนศึกษาบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายบทนิยาม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริงได้
2. หาตำแหน่ง แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำได้
3. หาตำแหน่ง แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่ที่มีแรงหน่วงแต่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำได้
4. หาตำแหน่ง แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่ที่มีทั้งแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายถึงทฤษฎีบท บทนิยาม และขั้นตอนเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง มีการตั้งคำถาม ตอบคำถามระหว่างผู้สอนและผู้เรียน
2. แสดงตัวอย่างการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง
3. ตรวจสอบคำตอบการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริงโดยใช้โปรแกรม Wolfram Alpha
4. ให้ผู้เรียนทำใบกิจกรรม

5. สืบค้นวิธีการหาการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริงทางอินเทอร์เน็ต เพิ่มเติม
6. อภิปราย สรุปประเด็นสำคัญที่เกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง
7. สรุป และซักถามความเข้าใจท้ายบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เครื่องคอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต
2. เพาเวอร์พอยต์ เรื่องการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง
3. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์
4. โปรแกรม Wolfram Alpha
5. ใบกิจกรรม

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายโต้ตอบ ซักถาม และการแสดงความคิดเห็น
3. สังเกตพฤติกรรมความกระตือรือร้นในการร่วมกิจกรรมและคุณภาพของงานที่มอบหมาย
4. ผลจากการลงมือปฏิบัติด้วยโปรแกรม Wolfram Alpha
5. ตรวจใบกิจกรรม
6. ตรวจแบบฝึกหัด
7. ประเมินจากแบบทดสอบ

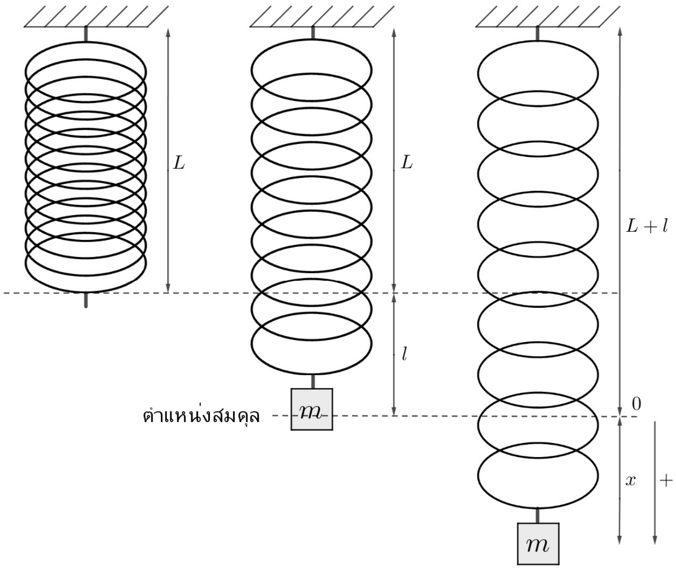
บทที่ 9
การประยุกต์ของสมการ
เชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ในบทนี้จะกล่าวถึงการประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวอันดับสอง ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ปรากฏในปัญหาทางฟิสิกส์หรือวิศวกรรมศาสตร์หลายเรื่อง ในบทจะกล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริงเท่านั้น

ปัจจุบันเราจะสังเกตเห็นว่าเครื่องอำนวยความสะดวกต่าง ๆ รวมไปถึงเครื่องมือทางการแพทย์ ทหาร ตำรวจ อุปกรณ์คอมพิวเตอร์ ฯลฯ ล้วนแล้วแต่เป็นสิ่งจำเป็นและสำคัญต่อมวลมนุษยชาติในยุคนี้ ถ้าเรามองให้ลึกลงไปแล้วกลไกที่สำคัญที่เป็นส่วนหนึ่งของเครื่องมือหรืออุปกรณ์เหล่านั้น คือสปริง การทำงานของสปริงนั้นจะเป็นการเคลื่อนที่ในลักษณะสั่นขึ้นลง หรือซ้ายขวา และเคลื่อนที่ได้หลากหลายลักษณะขึ้นอยู่กับการนำไปใช้งานที่ต่างกันออกไป ถ้าการนำไปใช้งานที่มีความละเอียดสูงเราอาจจะต้องมีการระบุการเคลื่อนที่ของลวดสปริงในเชิงตัวเลข และสามารถอธิบายการเคลื่อนที่ได้อย่างชัดเจน ซึ่งในบทนี้จะอธิบายการเคลื่อนของลวดสปริงที่ยึดติดแน่นกับกับเพดานในแนวดิ่ง และมีการควบคุมการเคลื่อนที่ด้วยแรงต่าง ๆ เช่น แรงหน่วง แรงจากภายนอกมากระทำต่อการเคลื่อนที่ เป็นต้น ซึ่งการเคลื่อนที่ของลวดสปริงที่กล่าวมาข้างต้น เราจะประยุกต์ใช้ความรู้เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวอันดับสอง มาช่วยในการวิเคราะห์การเคลื่อนที่ของลวดสปริง

การเคลื่อนที่ของลวดสปริง

พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ (2540 : 257-258) ได้กล่าวว่า นำลวดสปริงเส้นหนึ่งยาว L ฟุต แขวนในแนวดิ่งโดยปลายบนติดแน่นไม่เคลื่อนไหว เมื่อนำวัตถุหนัก w ปอนด์ ติดกับปลายด้านล่างของลวดสปริงจะทำให้ลวดสปริงยืดลงมา l ฟุต แล้วหยุดนิ่ง เรียกตำแหน่งนี้ว่า ตำแหน่งสมดุล (equilibrium position) ถ้าดึงวัตถุลงต่ำแล้วปล่อยด้วยความเร็วต้นในทิศทางขึ้นหรือลงล่างในแนวดิ่ง หรืออาจปล่อยด้วยความเร็วต้นเท่ากับศูนย์ วัตถุนั้นจะเคลื่อนที่ในลักษณะสั่นขึ้นลงในแนวดิ่งโดยผ่านตำแหน่งสมดุล อันเนื่องจากแรงคืนตัวของลวดสปริงและน้ำหนักของวัตถุ โดยมีกฎของฮุค (Hooke’s law) กล่าวว่า “แรงคืนตัวของลวดสปริงที่จะดึงให้วัตถุกลับไปอยู่ในตำแหน่งสมดุลเป็นสัดส่วนกับระยะทางที่วัตถุนั้นห่างจากตำแหน่งสมดุล” หรือ “ขนาดของแรงเป็นสัดส่วนกับความยาวของลวดสปริงที่เปลี่ยนไป” ดังภาพประกอบที่ 9.1



ภาพประกอบที่ 9.1 การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง
ที่มา : พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ (2540 : 259)

สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 264-265) ได้กล่าวว่า ถ้าให้ l เป็นความยาวเพิ่มขึ้นของลวดสปริง เมื่อมีวัตถุหนัก w แขวน (ขณะที่วัตถุอยู่ตำแหน่งสมดุล) โดยกฎของฮุด ถ้าให้ F เป็นแรงคืนตัวของลวดสปริง (ซึ่งมีขนาดเท่ากับขนาดของแรงที่กระทำต่อเส้นลวดสปริงเมื่อวัตถุอยู่ที่ตำแหน่งสมดุล) จะได้

$$\left|F\right| \propto l \text{ หรือ } \left|F\right| = kl$$

เมื่อ $k > 0$ เป็นค่าคงตัว เรียกว่า ค่าคงตัวของลวดสปริง (spring constant) ซึ่งจะมีค่ามากหรือน้อยขึ้นอยู่กับความแข็งแรงของลวดสปริง

ถ้ากำหนดความยาว (ระยะทาง) เป็นลบในทิศทางขึ้น และเป็นบวกในทิศทางลง ดังนั้นเมื่อคำนึงถึงเครื่องหมาย จะได้กฎของฮุดเป็น

$$F = -kl$$

เมื่อดึงวัตถุหนัก w ลงไปอีกจากตำแหน่งสมดุลแล้วปล่อย วัตถุจะเคลื่อนที่ขึ้นลงผ่านตำแหน่งสมดุล ในการเคลื่อนที่นี้จะมีแรงมากระทำ ดังนี้

1. F_1 เป็นแรงโน้มถ่วงของโลก คือน้ำหนักของวัตถุ $w = mg$ หรือ $F_1 = mg$ เมื่อ m คือมวลของวัตถุและ g คือแรงโน้มถ่วงของโลก

2. F_2 เป็นแรงคืนตัวของลวดสปริงที่จะดึงวัตถุกลับไปอยู่ในตำแหน่งสมดุล โดยกฎของฮุด ขณะเวลาใด ๆ (ขณะที่ลวดสปริงมีความยาวต่างไปจากเดิมเป็นระยะ $x + 1$) จะได้

$$F_2 = -k(x + l) = -kx - kl$$

แรงนี้ขณะที่วัตถุอยู่ในตำแหน่งสมดุล $(x = 0)$ จะเท่ากับ $F_2 = -kl$ และในขณะนั้นแรงนี้จะเท่ากับน้ำหนัก $w = mg$ ของวัตถุ แต่มีทิศทางตรงข้าม จึงได้ $F_2 = -w$ หรือ $kl = mg$ ดังนั้นขณะเวลาใด ๆ แรง F_2 จะเท่ากับ

$$F_2 = -kx - mg$$

3. F_3 เป็นแรงด้านทานของการเคลื่อนที่เรียกว่า แรงหน่วง (damping force) ค่าของแรงหน่วงจะเป็นลัดส่วนกับความเร็วของการเคลื่อนที่โดยประมาณ นั้นคือ

$$\left|F_3\right| = c\left|\frac{dx}{dt}\right|$$

เมื่อ $c > 0$ เป็นค่าคงตัว เรียกว่า ค่าคงตัวของแรงหน่วง (damping constant) และ $\dfrac{dx}{dt}$ เป็นความเร็วของการเคลื่อนที่มีค่าเป็นบวกหรือลบตามค่าของ x และแรง F_3 จะมีทิศทางตรงข้ามกับการเคลื่อนที่เสมอ ดังนั้น จะได้

$$F_3 = -c\frac{dx}{dt}$$

เมื่อ $c > 0$

4. F_4 เป็นแรงกระทำจากภายนอก ซึ่งเป็นฟังก์ชันของเวลา นั้นคือ

$$F_4 = F(t)$$

ดังนั้น แรงทั้งหมดที่กระทำต่อการเคลื่อนที่ นั้นคือ

$$\begin{aligned} F &= F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \\ &= mg - kx - mg - c\frac{dx}{dt} + F(t) \\ &= -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t) \end{aligned}$$

โดยกฎการเคลื่อนที่ของนิวตัน $F = ma = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ ดังนั้น

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

หรือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \quad \text{.................................(1)}$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองของการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดปลายลวดสปริง การเคลื่อนที่ตามสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (1) แยกพิจารณา ดังนี้

1. การเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ

2. การเคลื่อนที่ที่มีแรงหน่วงแต่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

3. การเคลื่อนที่มีแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ

การเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ

การเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ เป็นการเคลื่อนที่เมื่อ $c = 0$ และ $F(t) = 0$ ดังนั้นสมการ (1) จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธ์อันดับสอง

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

เมื่อ $m > 0$ เป็นมวลของวัตถุ และ $k > 0$ เป็นค่าคงตัวของลวดสปริง

จากสมการ $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ เมื่อ m หารตลอด และให้ $\frac{k}{m} = b^2$ จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2} + b^2x = 0$$

สมการช่วยของสมการ $\frac{d^2x}{dt^2} + b^2x = 0$ คือ

$$r^2 + b^2 = 0$$

จะมีรากเป็น $r = \pm bi$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{d^2x}{dt^2} + b^2x = 0$ คือ

$$x = C_1 \sin bt + C_2 \cos bt$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

สมมติเงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(0) = x_0$$

$$x'(0) = v_0$$

ในสมการ $x = C_1 \sin bt + C_2 \cos bt$ หาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร t จะได้

$$\frac{dx}{dt} = C_1 b \cos bt - C_2 b \sin bt$$

แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้นใน $x = C_1 \sin bt + C_2 \cos bt$ และ $\frac{dx}{dt} = C_1 b \cos bt - C_2 b \sin bt$ จะได้

$$C_2 = x_0$$

$$C_1 = \frac{v_0}{b}$$

แทนค่า C_1 และ C_2 ในสมการ $x = C_1 \sin bt + C_2 \cos bt$ จะได้

$$x = \frac{v_0}{b} \sin bt + x_0 \cos bt$$

จากสมการ $x = \frac{v_0}{b} \sin bt + x_0 \cos bt$ จะได้

$$x = A\left(\frac{v_0 / b}{A} \sin bt + \frac{x_0}{A} \cos bt\right)$$

เมื่อ

$$A=\sqrt{\left(\frac{v_0}{b}\right)^2+x_0^2}>0$$

$$\frac{\left(v_0 / b\right)}{A}=-\sin\phi$$

$$\frac{x_0}{A}=\cos\phi$$

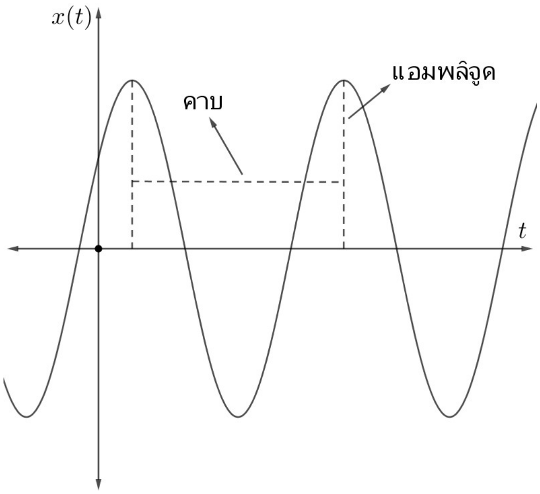
ดังนั้นสมการ $x=A\left(\frac{v_0 / b}{A}\sin bt+\frac{x_0}{A}\cos bt\right)$ เขียนใหม่ จะได้

$$x=A(-\sin\phi\sin bt+\cos\phi\cos bt)$$

นั่นคือ

$$x=A\cos(bt+\phi)$$

เมื่อ A คือค่าที่กำหนดในสมการ $A=\sqrt{\left(\frac{v_0}{b}\right)^2+x_0^2}$ และ ϕ หาได้จาก $\frac{\left(v_0 / b\right)}{A}=-\sin\phi$ และ $\frac{x_0}{A}=\cos\phi$ เนื่องจาก $b=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ดังนั้น สมการ $x=A\cos(bt+\phi)$ เขียนใหม่ จะได้เป็น $x=A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi\right)$ ซึ่งเป็นสมการ การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคเชิงเดียว (simple harmonic motion) ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ลักษณะแกว่งกวัดที่มีค่าคงตัว A เรียกว่า แอมพลิจูด (amplitude) ของการเคลื่อนที่ ซึ่งเป็นระยะเคลื่อนที่ไกลที่สุดจากตำแหน่งสมดุล การเคลื่อนที่นี้เป็นการเคลื่อนที่เป็นคาบ (periodic motion) วัตถุจะเคลื่อนที่แกว่งกวัดไปกลับระหว่าง $x=A$ และ $x=-A$ จะได้ว่า การเคลื่อนที่ไปได้ระยะไกลสุดทางบวก $x=A$ ก็ต่อเมื่อ $\sqrt{\frac{k}{m}}t+\phi=\pm 2n\pi$ เมื่อ $n=0,1,2,\ldots$ และ $t>0$ ดังนั้น ระยะทางมากที่สุด ก็ต่อเมื่อ $t=\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\pm 2n\pi-\phi\right)>0$ เมื่อ $n=0,1,2,\ldots$ ช่วงเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ไกลที่สุดทางเดียวกัน 2 ครั้งติดกัน เรียกว่า คาบ (period) ของการ เคลื่อนที่ จากสมการ $t=\sqrt{\frac{k}{m}}\left(\pm 2n\pi-\phi\right)$ จะได้คาบของการเคลื่อนที่ T คือ $\frac{2\pi}{\sqrt{k / m}}=\frac{2\pi}{b}$ ส่วนกลับของคาบ คือ $\frac{b}{2\pi}$ เรียกว่า ความถี่ (frequency) คือจำนวนรอบต่อ 1 หน่วยเวลา หรือเรียกว่า ความถี่ธรรมชาติ (natural frequency) ค่า ϕ เรียกว่า ระยะทิ้งช่วง (phase constant) หรือ มุมทิ้งช่วง (phase angle) (สุพจน์ ไวท์ยางกูร, 2550 : 265-267)



ภาพประกอบที่ 9.2 การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคเชิงเดียว
ที่มา : สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 267)

ตัวอย่างที่ 9.1.1 ลวดสปริงแขวนในแนวดิ่งปลายบนติดแน่นกับเพดาน ส่วนปลายล่างผูกวัตถุหนัก 8 ปอนด์ ทำให้ลวดยืดออกเป็นระยะ 6 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 3 นิ้ว แล้วดึงลงด้วยความเร็ว 1 ฟุตต่อวินาที จงหาแอมพลิจูด คาบ และ ความถี่ ของการเคลื่อนที่ เมื่อการเคลื่อนที่นี้ไม่มีแรงหน่วงและไม่มีแรงภายนอกกระทำต่อการเคลื่อนที่

วิธีทำ สมการการเคลื่อนที่ คือ $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$

เนื่องจากวัตถุมีน้ำหนัก 8 ปอนด์ ทำให้ลวดสปริงยืดออกไปจากเดิม 6 นิ้ว ดังนั้น โดยกฎของฮุด จะได้ $8=k\left(\dfrac{6}{12}\right)$ หรือ $k=16$

และจะได้

$$m=\frac{w}{g}=\frac{8}{32}=\frac{1}{4}$$

เพราะฉะนั้น สมการการเคลื่อนที่นี้ คือ

$$\frac{1}{4}\frac{d^2x}{dt^2}+16x=0$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+64x=0$$

เนื่องจากเริ่มต้นด้วยการดึงวัตถุลงล่าง 3 นิ้ว แล้วผลักลงด้วยความเร็ว 1 ฟุตต่อวินาที ดังนั้น จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$x(0) = \frac{1}{4}$$

$$x'(0) = \frac{1}{4}$$

เพราะฉะนั้น สมการช่วยของสมการ $\frac{d^2x}{dt^2} + 64x = 0$ คือ

$$r^2 + 64 = 0$$

ซึ่งมีราก คือ $r = \pm 8i$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$x = C_1 \sin 8t + C_2 \cos 8t$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = \frac{1}{4}$ ในสมการ $x = C_1 \sin 8t + C_2 \cos 8t$ จะได้

$$\frac{1}{4} = C_1 \sin 8(0) + C_2 \cos 8(0)$$

$$C_2 = \frac{1}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร t ในสมการ $x = C_1 \sin 8t + C_2 \cos 8t$ จะได้

$$\frac{dx}{dt} = 8C_1 \cos 8t - 8C_2 \sin 8t$$

เมื่อแทนเงื่อนไขเริ่มต้น $x'(0) = 1$ ในสมการ $\frac{dx}{dt} = 8C_1 \cos 8t - 8C_2 \sin 8t$ จะได้

$$1 = 8C_1 \cos(0) - 8C_2 \sin 8(0)$$

$$C_1 = \frac{1}{8}$$

ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่ คือ $x = \frac{1}{8}\sin 8t + \frac{1}{4}\cos 8t$

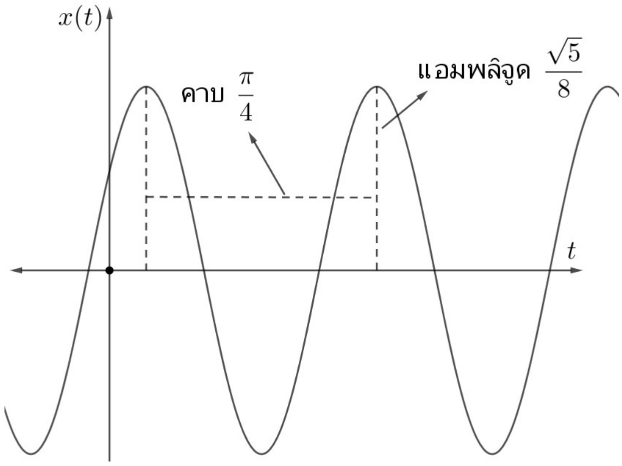
จากสมการ $A = \sqrt{\left(\frac{v_0}{b}\right)^2 + x_0^2}$ จะได้

$$A = \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{8}$$

แอมพลิจูดของการเคลื่อนที่ คือ $\frac{\sqrt{5}}{8}$ ฟุต

คาบของการเคลื่อนที่ คือ $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ วินาที

ความถี่ของการเคลื่อนที่ คือ $\frac{\pi}{4}$ รอบต่อวินาที



ภาพประกอบที่ 9.3 กราฟของฟังก์ชันการเคลื่อนที่สำหรับตัวอย่าง 9.1
ที่มา : สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 269)

ตัวอย่างที่ 9.1.2 ลวดสปริงแขวนในแนวดิ่งปลายบนติดแน่นกับเพดาน ส่วนปลายล่างผูกวัตถุหนัก 24 ปอนด์ ทำให้ลวดยืดออกเป็นระยะ 4 นิ้ว ถ้าออกแรงดันวัตถุเข้าหาลวดสปริงให้วัตถุอยู่เหนือตำแหน่งสมดุล 3 นิ้ว แล้วแล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ จงหา ตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลาต่าง ๆ กัน แอมพลิจูด คาบ และ ความถี่ ของการเคลื่อนที่

วิธีทำ สมการการเคลื่อนที่ คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

เนื่องจากวัตถุมีน้ำหนัก 24 ปอนด์ ทำให้ลวดสปริงยืดออกไปจากเดิม 4 นิ้ว ดังนั้น โดยกฎของฮุด จะได้

$$24 = k\left(\frac{4}{12}\right)$$

หรือ

$$k = 72$$

และ

$$m = \frac{w}{g} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$$

เพราะฉะนั้น สมการการเคลื่อนที่นี้ คือ

$$\frac{3}{4}\frac{d^2x}{dt^2} + 72x = 0$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+96x=0$$

เนื่องจากเริ่มต้นด้วยการดันวัตถุเข้าหาลวดสปริงให้วัตถุอยู่เหนือตำแหน่งสมดุล 3 นิ้ว ซึ่งไม่ได้ระบุความเร็วต้น ดังนั้น จึงให้ความเร็วต้นเป็นศูนย์ จะได้เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$x(0)=-\frac{1}{4}$$

$$x'(0)=0$$

เพราะฉะนั้น สมการช่วยของสมการ $\dfrac{d^2x}{dt^2}+96x=0$ คือ

$$r^2+96=0$$

ซึ่งมีราก คือ $r=\pm4\sqrt{6}i$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$x=C_1\sin 4\sqrt{6}t+C_2\cos 4\sqrt{6}t$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

เมื่อแทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)=-\dfrac{1}{4}$ ในสมการ $x=C_1\sin 4\sqrt{6}t+C_2\cos 4\sqrt{6}t$ จะได้

$$-\frac{1}{4}=C_1\sin 4\sqrt{6}(0)+C_2\cos 4\sqrt{6}(0)$$

$$C_2=-\frac{1}{4}$$

เมื่อหาอนุพันธ์เทียบกับตัวแปร t ในสมการ $x=C_1\sin 4\sqrt{6}t+C_2\cos 4\sqrt{6}t$ จะได้

$$\frac{dx}{dt}=4\sqrt{6}C_1\cos 4\sqrt{6}t-4\sqrt{6}C_2\sin 4\sqrt{6}t$$

เมื่อแทนเงื่อนไขเริ่มต้น $x'(0)=0$ ใน $\dfrac{dx}{dt}=4\sqrt{6}C_1\cos 4\sqrt{6}t-4\sqrt{6}C_2\sin 4\sqrt{6}t$ จะได้

$$0=4\sqrt{6}C_1\cos 4\sqrt{6}(0)-4\sqrt{6}C_2\sin 4\sqrt{6}(0)$$

$$0=4\sqrt{6}C_1$$

$$C_1=0$$

ดังนั้น สมการของการเคลื่อนที่ คือ $x=-\dfrac{1}{4}\cos 4\sqrt{6}t$

จากสมการ $A=\sqrt{\left(\dfrac{v_0}{b}\right)^2+x_0^2}$ จะได้

$$A = \sqrt{0^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

แอมพลิจูดของการเคลื่อนที่ คือ $\frac{1}{4}$ ฟุต

คาบของการเคลื่อนที่ คือ $\frac{2\pi}{4\sqrt{6}} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ วินาที

ความถี่ของการเคลื่อนที่ คือ $\frac{2\sqrt{6}}{\pi}$ รอบต่อวินาที

การเคลื่อนที่ที่มีแรงหน่วงแต่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ (2540 : 269) ได้กล่าวว่า การเคลื่อนที่กรณีนี้จะคำนึงถึงแรงหน่วงของการเคลื่อนที่ นั่นคือ ในสมการ (1)
เมื่อ $c \neq 0$ แต่ไม่มีแรงจากภายนอกมากระทำนั่นคือ $F(t) = 0$ ดังนั้นสมการ (1) จะได้เป็น

$$m\frac{d^2}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{.......................................}(2)$$

จากสมการ (2) หารด้วย m ตลอด และให้ $\frac{k}{m} = \lambda^2$ และ $\frac{c}{m} = 2b$ ดังนั้น จะได้

$$\frac{d^2}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \lambda^2 x = 0 \quad \text{.......................................}(3)$$

เนื่องจาก c เป็นจำนวนบวก จะได้ว่า b เป็นจำนวนบวกด้วย และสมการช่วยของสมการ (3) คือ

$$r^2 + 2br + \lambda^2 = 0$$

ซึ่งมีรากคือ

$$r = -b \pm \sqrt{b^2 - \lambda^2}$$

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (3) สามารถแบ่งเป็นเป็น 2 กรณี

กรณี 1 ถ้า $b < \lambda$ แล้วรากใน $r = -b \pm \sqrt{b^2 - \lambda^2}$ จะเป็นจำนวนเชิงซ้อน นั่นคือ

$$r = -b \pm \sqrt{b^2 - \lambda^2}\,i$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (3) คือ

$$x = e^{-bt}\left(C_1 \sin\sqrt{\lambda^2 - b^2 t} + C_2 \cos\sqrt{\lambda^2 - b^2 t}\right)$$

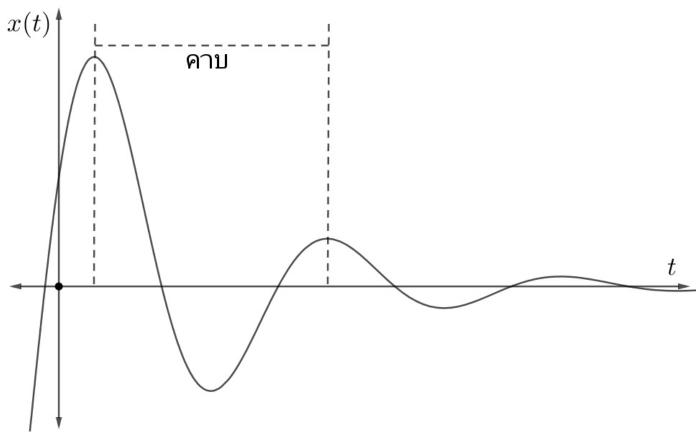
เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

ผลเฉลย $x = e^{-bt}\left(C_1 \sin\sqrt{\lambda^2 - b^2 t} + C_2 \cos\sqrt{\lambda^2 - b^2 t}\right)$ เขียนในรูปมุมทิ้งช่วง จะได้เป็น

$$x = Ae^{-bt}\cos\left(\sqrt{\lambda^2 - b^2 t} + \phi\right)$$

เมื่อ $A = \sqrt{C_1^{\,2} + C_2^{\,2}}$ และ ϕ หาได้จาก $\dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = -\sin\phi,\ \dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} = \cos\phi$

ผลเฉลยในสมการ $x = e^{-bt}\left(C_1 \sin\sqrt{\lambda^2 - b^2 t} + C_2 \cos\sqrt{\lambda^2 - b^2 t}\right)$ ประกอบด้วย 2 ตัวประกอบ คือ Ae^{-bt} และ $\cos\left(\sqrt{\lambda^2 - b^2 t} + \phi\right)$ จะเรียกตัวประกอบ Ae^{-bt} ว่า ตัวประกอบแรงหน่วง (damping factor) หรือแอมพลิจูดแปรค่าตามเวลา (time-varying amplitude) จะเห็นว่า Ae^{-bt} เป็นจำนวนบวก เนื่องจาก $A > 0$ และ $b > 0$ และ $\lim_{t\to\infty} Ae^{-bt} = 0$ นั่นคือ เมื่อเวลาผ่านไปเป็นเวลานาน ๆ วัตถุจะหยุดการเคลื่อนที่ ส่วนตัวประกอบ $\cos\left(\sqrt{\lambda^2 - b^2 t} + \phi\right)$ เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคเชิงเดียว ดังนั้นผลคูณ $Ae^{-bt}\cos\left(\sqrt{\lambda^2 - b^2 t} + \phi\right)$ จะเป็นการเคลื่อนที่ลักษณะการสั่น และแอมพลิจูดลดลง เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น และจะหยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุลในที่สุด เรียกการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้ว่า การเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่นภายใต้แรงหน่วง (damped oscillatatory) วัตถุเคลื่อนที่เป็นคาบและมีคาบเท่ากับ $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}}$ ซึ่งแสดงการเคลื่อนที่ดังภาพประกอบที่ 9.4



ภาพประกอบที่ 9.4 การเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่นภายใต้แรงหน่วง
ที่มา : พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ (2540 : 268)

เมื่อแทนค่า λ และ b ในสมการ $x = Ae^{-bt}\cos\left(\sqrt{\lambda^2 - b^2 t} + \phi\right)$ จะได้ผลเฉลยทั่วไป คือ

$$x = Ae^{-(c/2m)t}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{4m^2}} + \phi\right)$$

เนื่องจาก $b<\lambda$ จะได้ $\dfrac{c}{2m}<\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ หรือ $c<2\sqrt{km}$ ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า การเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่นภายใต้แรงหน่วงเกิดขึ้น เมื่อ $c<2\sqrt{km}$ และมีความถี่ของการเคลื่อนที่เท่ากับ $\dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}-\dfrac{c^2}{4m^2}}$

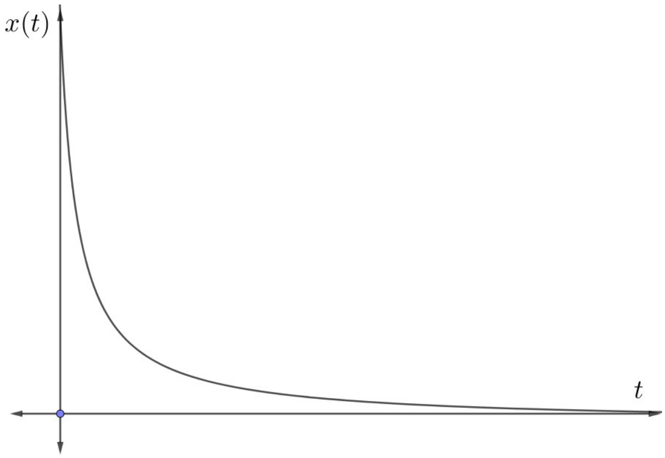
กรณี 2 ถ้า $b \geq \lambda$ จะได้ว่า $b^2-\lambda^2 \geq 0$ นั่นคือ รากของสมการ (3) จะเป็นจำนวนจริงหรือเป็นจำนวนจริงที่มีค่าเท่ากันทั้งสองค่าเท่ากับ $-b$ และผลเฉลยทั่วไปของสมการ $r=-b\pm\sqrt{b^2-\lambda^2}$ คือ

$$x=\left(C_1+C_2t\right)e^{-bt}$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

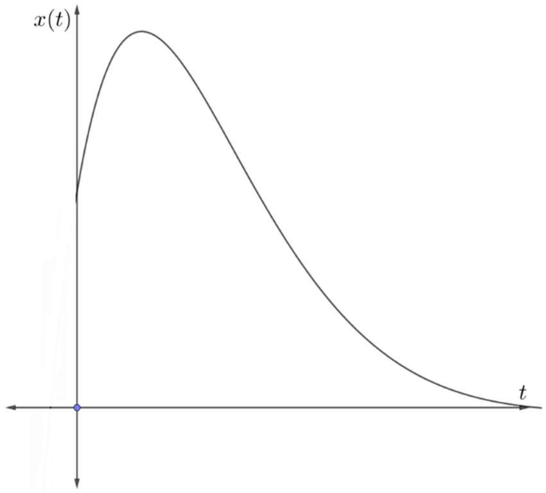
ผลเฉลย $x=\left(C_1+C_2t\right)e^{-bt}$ ไม่มีพจน์ของฟังก์ชัน $\sin$ หรือ $\cos$ ปรากฏอยู่ แสดงว่าการเคลื่อนที่นี้ไม่อยู่ในลักษณะการสั่น ทั้งนี้เนื่องจากแรงหน่วงมีค่ามากจึงต้านการเคลื่อนที่จนทำให้วัตถุค่อย ๆ เคลื่อนที่แล้วหยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุล เรียกการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้ว่า การเคลื่อนที่ภายใต้ค่าวิกฤตแรงหน่วง (critically damped motion) เนื่องจาก $\lim\limits_{t\to\infty}(C_1+C_2)e^{-bt}=0$ แสดงว่า วัตถุเคลื่อนที่ตรงเข้าหาตำแหน่งสมดุล เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น แล้วหยุดนิ่งเมื่อถึงตำแหน่งสมดุล แต่ลักษณะการเคลื่อนที่นี้ยังขึ้นอยู่กับเงื่อนไขเริ่มต้น โดยเฉพาะความเร็วต้นของวัตถุ ซึ่งเป็นไปได้ในแบบใดแบบหนึ่งดังต่อไปนี้ (สุพจน์ ไวท์ยางกูร, 2550 : 271-273)

1. วัตถุค่อย ๆ เคลื่อนที่จากตำแหน่งเริ่มต้น $(t=0)$ ตรงเข้าสู่ตำแหน่งสมดุล แล้วหยุดนิ่ง เมื่อถึงตำแหน่งสมดุล ดังภาพประกอบที่ 9.5



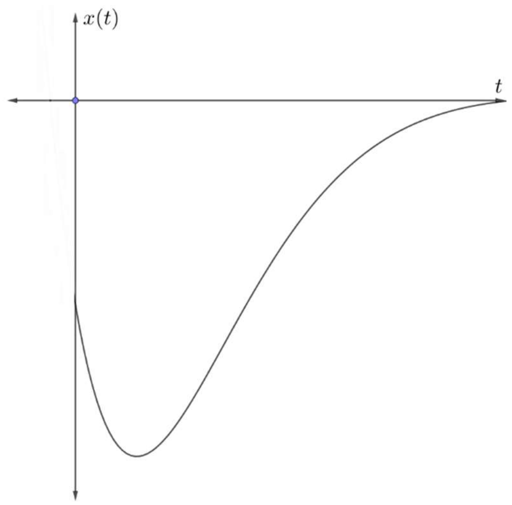
ภาพประกอบที่ 9.5 วัตถุเคลื่อนที่จากตำแหน่งเริ่มต้น ตรงเข้าสู่ตำแหน่งสมดุลแล้วหยุดนิ่ง
ที่มา : พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ (2540 : 269)

2. วัตถุเคลื่อนที่จากตำแหน่งเริ่มต้นไปทิศทางตรงข้ามกับตำแหน่งสมดุลจนได้ระยะไกลสุด เมื่อ $t = T_1 > 0$ แล้วเคลื่อนที่กลับสู่ตำแหน่งสมดุล แล้วหยุดนิ่งเมื่อถึงตำแหน่งสมดุล (พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์, 2540 : 269) ดังภาพประกอบที่ 9.6



ภาพประกอบที่ 9.6 วัตถุเคลื่อนที่จากตำแหน่งเริ่มต้นไปทิศทางตรงข้ามกับตำแหน่งสมดุล
ที่มา : พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ (2540 : 269)

3. วัตถุเคลื่อนที่ตรงเข้าสู่ตำแหน่งสมดุล ถึงตำแหน่งสมดุลเมื่อ $t = T_3 > 0$ แล้วเคลื่อนที่เลยไปจนได้ระยะทางไกลสุด เมื่อเวลา $t = T_3 > T_2$ จากนั้น เคลื่อนที่ตรงกลับไปสู่ตำแหน่งสมดุล แล้ว หยุดนิ่งเมื่อถึงตำแหน่งสมดุล (พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์, 2540 : 269) ดังภาพประกอบที่ 9.7



ภาพประกอบที่ 9.7 วัตถุเคลื่อนที่ตรงเข้าสู่ตำแหน่งสมดุล
ที่มา : พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ (2540 : 269)

ตัวอย่างที่ 9.2.1 ลวดสปริงแขวนในแนวดิ่งติดกับเพดาน โดยปลายล่างผูกวัตถุหนัก 32 ปอนด์ ทำให้ลวดยืดออกถึงตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ 2 ฟุต ดึงวัตถุต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 6 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิด การเคลื่อนที่โดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำต่อการเคลื่อนที่ แต่มีแรงหน่วงมีค่าเป็นตัวเลข (เป็นปอนด์) เท่ากับ 4 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้

วิธีทำ โดยกฎของฮุค จะได้ $k=\dfrac{32}{2}=16$ ปอนด์ต่อฟุต ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุหนัก 32 ปอนด์ $\left(m=\dfrac{w}{g}=\dfrac{32}{32}=1\right)$ คือ

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4\frac{dx}{dt}+16x=0$$

เงื่อนไขเริ่มต้น

$$x(0)=\frac{1}{2}$$

$$x'(0)=0$$

สมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+16x=0$ คือ

$$r^2+4r+16=0$$

จะมีราก คือ

$$r=-2\pm 2\sqrt{3}i$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\dfrac{d^2x}{dt^2}+4\dfrac{dx}{dt}+16x=0$ คือ

$$x=e^{-2t}\left(C_1\sin 2\sqrt{3}t+C_2\cos 2\sqrt{3}t\right) \quad ....(1)$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างในสมการ (1) จะได้

$$\frac{dx}{dt}=e^{-2t}\left[\left(-2C_1-2\sqrt{3}C_2\right)\sin 2\sqrt{3}t+\left(2\sqrt{3}C_1-2C_2\right)\cos 2\sqrt{3}t\right] \quad ....(2)$$

แทนค่าเงื่อนไข $x(0)=\dfrac{1}{2}$ และ $x'(0)=0$ ในสมการ (1) และ (2) ตามลำดับ จะได้

$$C_1=\frac{\sqrt{3}}{6} \text{ และ } C_2=\frac{1}{2}$$

แทนค่า $C_1=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ และ $C_2=\dfrac{1}{2}$ ในสมการ (1) จะได้

$$x=e^{-2t}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\cos 2\sqrt{3}t\right)$$

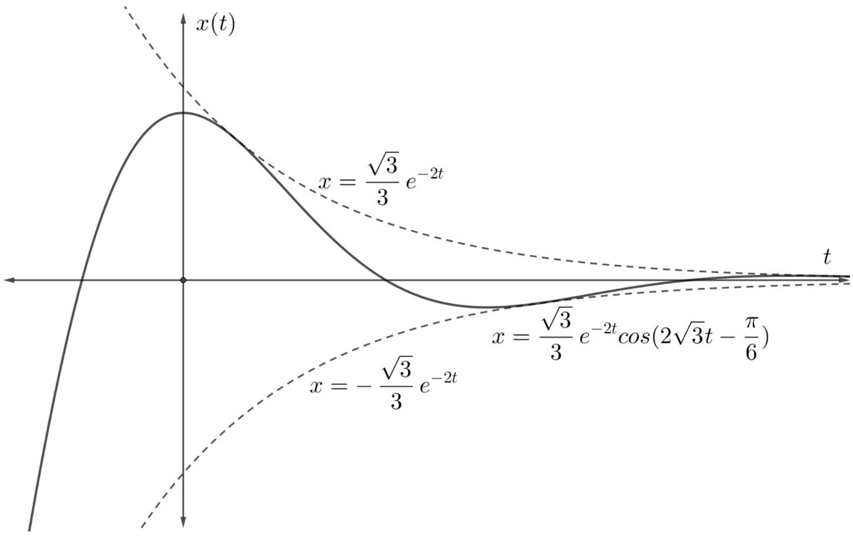
เนื่องจาก

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\cos 2\sqrt{3}t=\frac{\sqrt{3}}{3}\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\sin 2\sqrt{3}t+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{3}}\cos 2\sqrt{3}t\right]$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\cos 2\sqrt{3}t\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\sin\frac{\pi}{6}\sin 2\sqrt{3}t+\cos\frac{\pi}{6}\cos 2\sqrt{3}t\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\left(2\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$$

ดังนั้น ผลเฉลย $x=e^{-2t}\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\sin 2\sqrt{3}t+\frac{1}{2}\cos 2\sqrt{3}t\right)$ จะเขียนในรูปมุมทิ้งช่วง จะได้

$$x=\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}\cos\left(2\sqrt{3}t-\frac{\pi}{6}\right)$$

แสดงว่า วัตถุนี้เคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงตามกรณี 1 โดยมีตัวประกอบแรงหน่วงเท่า กับ $\frac{\sqrt{3}}{3}e^{-2t}$ และการเคลื่อนที่เป็นลักษณะการสั่นมีคาบเท่ากับ $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ ดังดังภาพประกอบที่ 9.8



ภาพประกอบที่ 9.8 การเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่นภายใต้แรงหน่วงของตัวอย่าง 9.2.1
ที่มา : สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 275)

ตัวอย่างที่ 9.2.2 จากตัวอย่าง 9.2.1 แต่เปลี่ยนแรงหน่วงเป็น 8 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุจะคล้ายกับสมการ 9.2.1 แต่เปลี่ยนค่าคงตัวของแรงหน่วย $c = 8$ จะได้สมการเป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x$$

เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$x(0) = \frac{1}{2}$$
$$x'(0) = 0$$

สมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x$ คือ

$$r^2 + 4r + 16 = 0$$

ซึ่งมีรากเป็น $r = -4, -4$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x$ คือ

$$x = \left(C_1 + C_2\right)e^{-4t}$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างในสมการ $x = \left(C_1 + C_2\right)e^{-4t}$ จะได้

$$\frac{dx}{dt} = \left(C_2 - 4C_1 - 4C_2\right)e^{-4t}$$

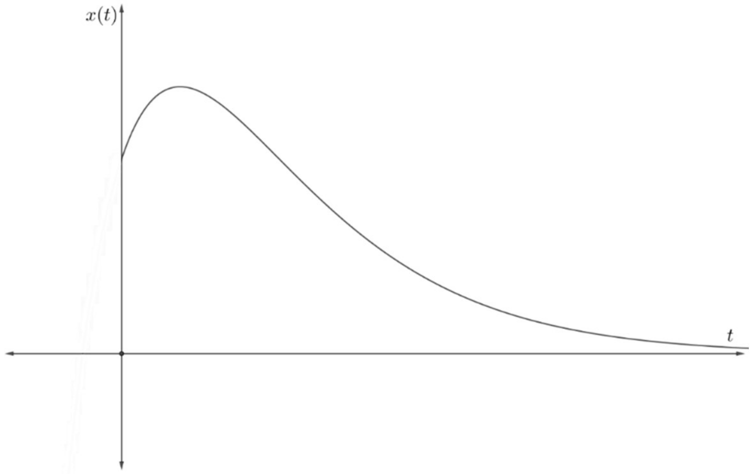
แทนค่าเงื่อนไข $x(0) = \frac{1}{2}$ และ $x'(0) = 0$ ในสมการ $x = \left(C_1 + C_2\right)e^{-4t}$ และ $\frac{dx}{dt} = \left(C_2 - 4C_1 - 4C_2\right)e^{-4t}$ ตามลำดับ จะได้

$$C_1 = \frac{1}{2}$$
$$C_2 - 4C_1 = 0$$

แก้ระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น จะได้ $C_1 = \frac{1}{2}$ และ $C_2 = 2$

เพราะฉะนั้น ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 16x$ ภายใต้เงื่อนไข $x(0) = \frac{1}{2},\ x'(0) = 0$ คือ $x = \left(\frac{1}{2} + 2t\right)e^{-4t}$

จากผลเฉลย $x=\left(\frac{1}{2}+2t\right)e^{-4t}$ แสดงว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุภายใต้แรงหน่วง จะเห็นว่า $x\neq 0$ เมื่อ $t>0$ และ $\frac{dx}{dt}=-8te^{-4t}<0$ เมื่อ $t>0$ ซึ่งแสดงว่าการเคลื่อนที่ไม่ผ่านตำแหน่งสมดุล กล่าวคือ วัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $\frac{1}{2}$ ฟุต ใต้ตำแหน่งสมดุลตรงเข้าสู่ตำแหน่งสมดุลแล้วหยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุล การเคลื่อนที่แสดงด้วยกราฟ ดังภาพประกอบที่ 9.9



ภาพประกอบที่ 9.9 การเคลื่อนที่ของวัตถุในตัวอย่าง 9.2.2
ที่มา : สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 274)

ตัวอย่างที่ 9.2.3 จากตัวอย่าง 9.2.1 แต่เปลี่ยนแรงหน่วงเป็น 10 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุ

วิธีทำ สมการการเคลื่อนที่เป็นเช่นเดียวกับตัวอย่าง 9.2.2 แต่เปลี่ยนค่า’คงตัวของแรงหน่วงเป็น $c=10$ เพราะฉะนั้น จะได้สมการการเคลื่อนที่เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2}+10\frac{dx}{dt}+16x=0$$

เงื่อนไขเริ่มต้น $x(0)=\frac{1}{2},\ x'(0)=0$

สมการช่วยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\frac{d^2x}{dt^2}+10\frac{dx}{dt}+16x=0$ คือ

$$r^2+4r+16=0$$

ซึ่งมีรากเป็น $r=-2,-8$ ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\frac{d^2x}{dt^2}+10\frac{dx}{dt}+16x=0$ คือ $x=C_1e^{-2t}+C_2e^{-8t}$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ทั้งสองข้างในสมการ $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}$ จะได้

$$\frac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t}$$

แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = \frac{1}{2},\ x'(0) = 0$ ในสมการ $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-8t}$ และสมการ $\frac{dx}{dt} = -2C_1 e^{-2t} - 8C_2 e^{-8t}$ จะได้

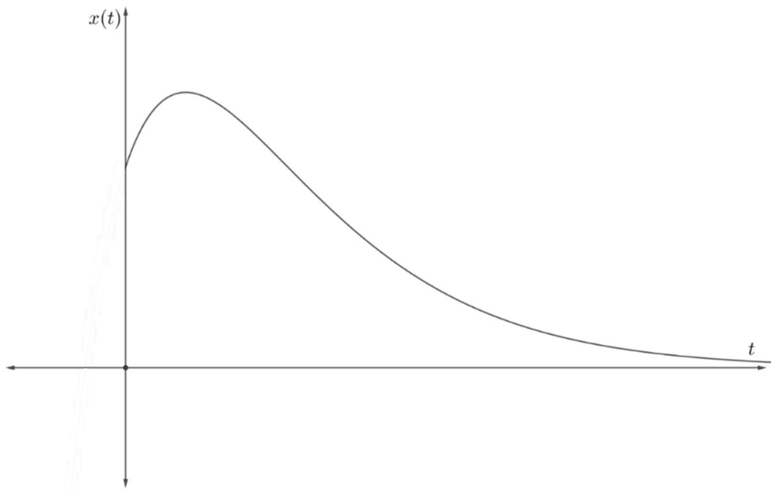
$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2}$$

$$-2C_1 - 8C_2 = 0$$

แก้ระบบสมการพีชคณิตเส้น จะได้ $C_1 = \frac{2}{3}$ และ $C_2 = -\frac{1}{6}$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหา คือ $x = \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-8t}$

จากผลเฉลย $x = \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-8t}$ แสดงว่าวัตถุเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงที่มากเกิน จะเห็นว่า $x \neq 0$ เมื่อ $t > 0$ และ $\frac{dx}{dt} = \frac{4}{3}e^{-2t}\left(e^{-6t} - 1\right)$ เมื่อ $t > 0$ แสดงว่าวัตถุเริ่มเคลื่อนที่จากตำแหน่ง $\frac{1}{2}$ ฟุตใต้ตำแหน่งสมดุล เข้าสู่ตำแหน่งสมดุลโดยตรงแล้วหยุดนิ่งที่ตำแหน่งสมดุล เช่นเดียวกับตัวอย่าง 9.2.2 แต่เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ถึงตำแหน่งสมดุลมากกว่า เพราะว่าขนาดของแรงหน่วงมากกว่า การเคลื่อนที่นี้แสดงด้วยกราฟ ดังภาพประกอบที่ 9.10



ภาพประกอบที่ 9.10 การเคลื่อนที่ของวัตถุในตัวอย่าง 9.2.3

ที่มา : สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 274)

การเคลื่อนที่ที่มีทั้งแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ

สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 279-281) ได้กล่าวว่า การเคลื่อนที่กรณีนี้จะมีสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวของแรงหน่วง k เป็นค่าคงตัวของลวดสปริงและ $F(t)$ เป็นแรงภายนอกที่กระทำต่อการเคลื่อนที่ ในที่นี้จะพิจารณาแรงภายนอกในรูปแรงเป็นคาบ นั่นคือ

$$F(t)=F_1\cos wt$$

เมื่อ F_1 และ w เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น สมการการเคลื่อนที่ จะได้เป็น

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F_1\cos wt$$

จากสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F_1\cos wt$ หารด้วย m ตลอด จะได้

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_1}{m}\cos wt$$

ให้ $\frac{c}{m}=2b,\frac{k}{m}=\lambda^2$ และ $\frac{F_1}{m}=E_1$ ดังนั้นสมการ $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{c}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x=\frac{F_1}{m}\cos wt$ เขียนใหม่จะได้เป็น

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2x=E_1\cos wt$$

เพื่อให้การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นลักษณะการสั่น ให้ $6<\lambda$ และเนื่องจาก

$\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2x=E_1\cos wt$ เป็นสมการไม่เอกพันธุ์ ดังนั้น จะได้ฟังก์ชันเติมเต็มของสมการ $\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2x=F_1\cos wt$ คือ

$$x_c=Ce^{-bt}\cos\left(\sqrt{\lambda^2-b^2}t+\phi\right)$$

และสามารถหาปริพันธ์เฉพาะของสมการ $\frac{d^2x}{dt^2}+2b\frac{dx}{dt}+\lambda^2x=E_1\cos wt$ โดยการเทียบสัมประสิทธิ์ โดยให้

$$x_p=A\cos wt+B\sin wt$$

แล้ว

$$\frac{dx}{dt}=-wA\sin wt+wB\cos wt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2A\cos wt - w^2B\sin wt$$

แทนค่า $\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{d^2x}{dt^2}$ ในสมการ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2b\dfrac{dx}{dt} + \lambda^2 x = E_1\cos wt$ จะได้

$$-w^2A\cos wt - w^2B\sin wt + 2b(-wA\sin wt + wB\cos wt) +$$
$$+\lambda^2(A\cos wt + B\sin wt) = E_1\cos wt$$
$$\left[-2bwA + (\lambda^2 - w^2)B\right]\sin wt + \left[(\lambda^2 - w^2)A + 2bwB\right]\cos wt = E_1\cos wt$$

ดังนั้น จะได้

$$-2bwA + (\lambda^2 - w^2)B = 0$$
$$(\lambda^2 - w^2)A + 2bwB = E_1$$

หาผลเฉลยของระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น $-2bwA + (\lambda^2 - w^2)B = 0$, $(\lambda^2 - w^2)A + 2bwB = E_1$ จะได้

$$A = \frac{E_1(\lambda^2 - w^2)}{(\lambda^2 - w^2) + 4b^2w^2}$$
$$B = \frac{2bwE_1}{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}$$

แทนค่า A และ B ในสมการ $x_p = A\cos wt + B\sin wt$ จะได้ปริพันธ์เฉพาะในรูปแบบต่อไปนี้

$$x_p = \frac{E_1}{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\left[(\lambda^2 - w^2)\cos wt + 2bw\sin wt\right]$$

เนื่องจาก

$$(\lambda^2 - w^2)\cos wt + 2bw\sin wt$$
$$= \sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\left[\frac{(\lambda^2 - w^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2}}\cos wt + \frac{2bw}{\sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2 + +4b^2w^2}}\sin wt\right]$$
$$= \sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\left[\cos\theta\cos w + \sin\theta\sin wt\right]$$
$$= \sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\cos\left(wt - \theta\right)$$

เมื่อ

$$\cos\theta = \frac{(\lambda^2 - w^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}}$$
$$\sin\theta = \frac{2bw}{\sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}}$$

ดังนั้น ปริพันธ์เฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$x_p = \dfrac{E_1}{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\Big[(\lambda^2 - w^2)\cos wt + 2bw\sin wt\Big]$ สามารถเขียนได้เป็น

$$x_p = \frac{E_1}{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\cos\Big(wt - \theta\Big)$$

เมื่อ θ หาได้จากสมการ

$$\cos\theta = \frac{(\lambda^2 - w^2)}{\sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{2bw}{\sqrt{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2b\dfrac{dx}{dt} + \lambda^2 x = E_1\cos wt$ คือ

$$x = Ce^{-bt}\cos\Big(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t + \phi\Big) + \frac{E_1}{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\cos\Big(wt - \theta\Big)$$

จะพบว่าผลเฉลยทั่วไป $x = Ce^{-bt}\cos\Big(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t + \phi\Big) + \dfrac{E_1}{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\cos\Big(wt - \theta\Big)$ เป็นผลบวกของสองพจน์ โดยพจน์แรก คือ $Ce^{-bt}\cos\Big(\sqrt{\lambda^2 - b^2}\,t + \phi\Big)$ เป็นการเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่น ดังนั้น ถ้าไม่มีแรงภายนอก $F_1\cos wt$ การเคลื่อนที่ของวัตถุจะอธิบายได้ด้วยพจน์นี้ ส่วนพจน์ที่สองคือ $\dfrac{E_1}{(\lambda^2 - w^2)^2 + 4b^2w^2}\cos\Big(wt - \theta\Big)$ เป็นผลจากแรงภายนอก $F_1\cos wt$ มากระทำต่อการเคลื่อนที่ทำให้เกิดการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคเชิงเดียวที่มีคาบเท่ากับ $\dfrac{2\pi}{w}$ ในขณะเดียวกัน พจน์แรกที่มีตัวประกอบแรงหน่วง Ce^{-bt} จะทำให้พจน์แรกมีค่าลดลงเมื่อ t มีค่ามากขึ้น จนกระทั่งไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุ ดังนั้นเมื่อเวลาผ่านไปนานพอสมควร การเคลื่อนที่ของวัตถุจะอยู่ในลักษณะการสั่นจากพจน์ที่สองโดยมีแอมพลิจูดคงตัว และมีคาบเท่ากับคาบของแรงภายนอก คือ $\dfrac{2\pi}{w}$ จึงเรียกพจน์แรกว่า พจน์ชั่วคราว (transiant term) และพจน์ที่สองว่า พจน์สถานะคงตัว (steady-state term)

ตัวอย่างที่ 9.3.1 วัตถุหนัก 16 ปอนด์ ผูกติดแน่นกับปลายล่างของลวดสปริงที่ปลายบนยึดติดแน่นกับเพดาน ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 10 ปอนด์ต่อฟุต ณ ตำแหน่งสมดุลมีแรงจากภายนอก $F(t) = 5\cos 2t$ กระทำต่อการเคลื่อนที่ ทำให้วัตถุเกิดการเคลื่อนที่ในลักษณะการสั่น ถ้าแรงหน่วงมีค่าเป็น 2 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงอธิบายการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้

วิธีทำ สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสำหรับการเคลื่อนที่นี้ คือ

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

เมื่อ $m = \frac{w}{g} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, c = 2, k = 10$ และ $F(t) = 5\cos 2t$

ดังนั้น สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$ จะได้

$$\frac{1}{2}\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 10x = 5\cos 2t$$

หรือ

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 10\cos 2t$$

เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$x(0) = 0$$

$$x'(0) = 0$$

สมการช่วยของสมการเอกพันธ์สัมพัทธ์ คือ

$$r^2 + 4r + 20 = 0$$

ซึ่งมีรากเป็น $r = -2 \pm 4i$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 10\cos 2t$ คือ

$$x_c = e^{-2t}\left(C_1 \sin 4t + C_2 \cos 4t\right)$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นตัวคงค่าไม่เจาะจง

การหาปริพันธ์เฉพาะใช้วิธีเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ โดยให้

$$x_p = A\cos 2t + B\sin 2t$$

จะได้

$$x_p' = -2A\sin 2t + 2B\cos 2t$$

$$x_p' = -4A\cos 2t + 4B\sin 2t$$

แทนค่า x_p, x_p' และ x_p'' ในสมการ $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 20x = 10\cos 2t$ จะได้

$$-4A\cos 2t - 4B\sin 2t + 4\left(-2\sin 2t + 2B\cos 2t\right) +$$
$$+ 20\left(A\cos 2t + B\sin 2t\right) = 10\cos 2t$$
$$\left(16A + 8B\right)\cos 2t + \left(-8A + 16B\right)\sin 2t = 10\cos 2t$$

ดังนั้น จะได้

$$16A + 8B = 10$$
$$-8A + 16B = 0$$

ผลเฉลยของระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น $16A + 8B = 10,\ -8A + 16B = 0$ จะได้

$$A = \frac{1}{2} \text{ และ } B = \frac{1}{4}$$

ดังนั้น ปริพันธ์เฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 20x = 10\cos 2t$ คือ

$$x_p = \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4\dfrac{dx}{dt} + 20x = 10\cos 2t$ คือ

$$x = x_c + x_p = e^{-2t}\left(C_1\sin 4t + C_2\cos 4t\right) + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t \quad \text{............(1)}$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ t ใน (1) จะได้

$$\frac{dx}{dt} = e^{-2t}\left[\left(-2C_1 - 4C_2\right)\sin 4t + \left(-2C_2 + 4C_1\right)\cos 4t\right] - \sin 2t + \frac{1}{2}\cos 2t \quad \text{..(2)}$$

แทนค่าเงื่อนไขเริ่มต้น $x\left(0\right) = 0$ และ $x'\left(0\right) = 0$ ในสมการ (1) และ (2) ตามลำดับ จะได้

$$C_2 + \frac{1}{2} = 0$$
$$4C_1 - 2C_2 + \frac{1}{2} = 0$$

ผลเฉลยของระบบสมการพีชคณิตเชิงเส้น $C_2 + \frac{1}{2} = 0,\ 4C_1 - 2C_2 + \frac{1}{2} = 0$ คือ

$$C_1 = -\frac{3}{8} \text{ และ } C_2 = -\frac{1}{2}$$

ดังนั้น ผลเฉลยของปัญหาค่าเริ่มต้น คือ

$$x = e^{-2t}\left(-\frac{3}{8}\sin 4t - \frac{1}{2}\cos 4t\right) + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\sin 2t \quad \text{........(3)}$$

เมื่อเขียนในรูปมุมทิ้งช่วง ทำได้โดย

$$3\sin 4t + 4\cos 4 = 5\left(\frac{3}{4}\sin 4t + \frac{4}{5}\right)$$
$$= 5\cos\left(4t - \phi\right)$$

เมื่อ $\cos\phi = \dfrac{4}{5}$ และ $\sin\phi = \dfrac{3}{5}$

$$2\cos 2t + \sin 2t = \sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2t + \frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2t\right)$$
$$= \sqrt{5}\cos\left(2t - \theta\right)$$

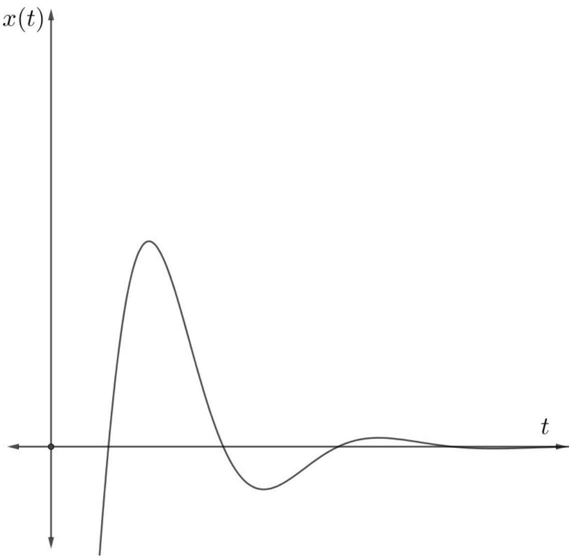
เมื่อ $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ และ $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

ดังนั้น ผลเฉลยในสมการ (1) สามารถเขียนในรูปมุมทิ้งช่วงได้ คือ

$$x = \frac{5}{8}e^{-2t}\cos\left(4t - \phi\right) + \frac{\sqrt{5}}{4}\cos\left(2t - \theta\right) \quad \text{..........................(4)}$$

เมื่อ $\cos\phi = \dfrac{4}{5},\ \sin\phi = \dfrac{3}{5},\ \cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ และ $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

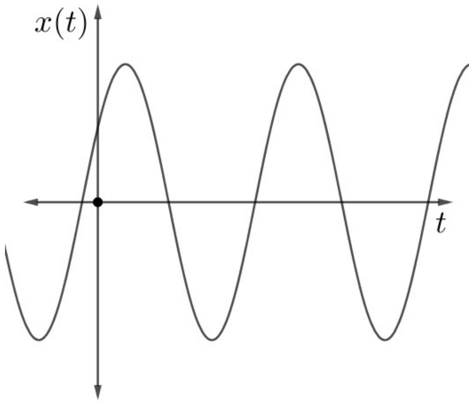
ผลเฉลยในสมการ (4) แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ โดยมีพจน์ชั่วคราวคือ $-\dfrac{5}{8}e^{-2t}\cos\left(4t - \phi\right)$ ซึ่งจะมีค่าลดลงทุกขณะเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้นจนไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ของวัตถุ การเคลื่อนที่นี้แสดงดังภาพประกอบที่ 9.11



ภาพประกอบที่ 9.11 แสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยมีพจน์ชั่วคราวคือ $-\dfrac{5}{8}e^{-2t}\cos\left(4t - \phi\right)$

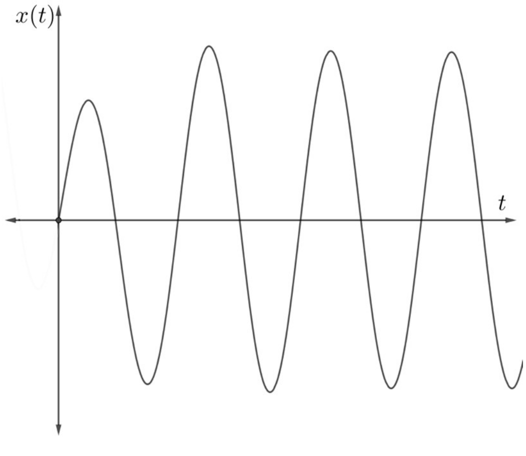
ที่มา : สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 291)

สำหรับพจน์สถานะคงตัว คือ $\frac{\sqrt{5}}{8}\cos\left(2t-\theta\right)$ เป็นการเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคเชิงเดียว ที่มีแอมพลิจูด $\frac{\sqrt{5}}{4}$ และมีคาบเท่ากับ π การเคลื่อนที่นี้แสดงดังภาพประกอบที่ 9.12



ภาพประกอบที่ 9.12 การเคลื่อนที่แบบฮาร์โมนิคเชิงเดียว ที่มีแอมพลิจูด $\frac{\sqrt{5}}{4}$ และมีคาบเท่ากับ π
ที่มา : พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์ (2540 : 281)

ดังนั้นการเคลื่อนที่ตามผลเฉลย (4) จะเป็นการรวมพจน์ชั่วคราวกับพจน์สถานะคงตัว แสดงดังภาพประกอบ 9.13 จะเห็นว่า พจน์ชั่วคราว มีผลต่อการเคลื่อนที่ สำหรับค่าของ t ในช่วงแรก ๆ เท่านั้น



ภาพประกอบที่ 9.13 การเคลื่อนที่สำหรับตัวอย่าง 9.3.1
ที่มา : สุพจน์ ไวท์ยางกูร (2550 : 291)

สรุปท้ายบท

การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวอันดับสอง ซึ่งอยู่ในรูปแบบ $a\dfrac{d^2x}{dt^2}+\dfrac{dx}{dt}+cx=F(t)$ เมื่อ a,b และ c เป็นค่าคงตัว ซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญที่ปรากฏในปัญหาทางฟิสิกส์หรือวิศวกรรมศาสตร์หลายเรื่อง ในบทนี้ได้กล่าวถึงการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดแน่นกับปลายลวดสปริง โดยการนำลวดสปริงเส้นหนึ่งยาว L ฟุต แขวนในแนวดิ่งโดยปลายบนติดแน่นไม่เคลื่อนไหว เมื่อนำวัตถุหนัก w ปอนด์ ติดกับปลายด้านล่างของลวดสปริงจะทำให้ลวดสปริงยืดลงมา l ฟุต แล้วหยุดนิ่ง เรียกตำแหน่งนี้ว่า ตำแหน่งสมดุล ถ้าดึงวัตถุลงต่ำแล้วปล่อยด้วยความเร็วต้นในทิศทางขึ้นหรือลงล่างในแนวดิ่ง หรืออาจปล่อยด้วยความเร็วต้นเท่ากับศูนย์ วัตถุนั้นจะเคลื่อนที่ในลักษณะสั่นขึ้นลงในแนวดิ่งโดยผ่านตำแหน่งสมดุล อันเนื่องจากแรงคืนตัวของลวดสปริงและน้ำหนักของวัตถุ โดยใช้กฎของฮุด กล่าวว่า “ขนาดของแรงเป็นสัดส่วนกับความยาวของลวดสปริงที่เปลี่ยนไป”

สมการ $m\dfrac{d^2x}{dt^2}+c\dfrac{dx}{dt}+kx=F(t)$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับสองของการเคลื่อนที่ของวัตถุที่ติดปลายลวดสปริง การเคลื่อนที่ตามสมการนี้แยกพิจารณา ดังนี้

1. การเคลื่อนที่ที่ไม่มีแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ มีสมการดังนี้

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=0$$

เมื่อ m เป็นมวลของวัตถุ

k เป็นค่าคงตัวของลวดสปริง

2. การเคลื่อนที่ที่มีแรงหน่วงแต่ไม่มีแรงภายนอกมากระทำ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=0$$

เมื่อ m เป็นมวลของวัตถุ

k เป็นค่าคงตัวของลวดสปริง

c เป็นแรงหน่วงของความเร็วในการเคลื่อนที่

3. การเคลื่อนที่มีแรงหน่วงและแรงภายนอกมากระทำ

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+c\frac{dx}{dt}+kx=F(t)$$

เมื่อ m เป็นมวลของวัตถุ

k เป็นค่าคงตัวของลวดสปริง

c เป็นแรงหน่วงของความเร็วในการเคลื่อนที่

$F(t)$ เป็นแรงภายนอกมากระทำต่อการเคลื่อนที่

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 9

1. ลวดสปริงแขวนในแนวดิ่งติดกับเพดาน ปลายล่างผูกวัตถุหนัก 6 ปอนด์ ทำให้ลวดสปริงยืดออกถึงตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ 6 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุต่ำลงอีก 4 นิ้ว แล้วผลักลงด้วยความเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที จงหาแอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่นี้

2. วัตถุหนัก 2 ปอนด์ยืดลวดสปริงได้ 1.5 นิ้ว ถ้าวัตถุนั้นถูกดึงลงไปจากตำแหน่งสมดุลอีก 3 นิ้ว แล้วปล่อย

   2.1) จงหาตำแหน่งและความเร็วของวัตถุในพจน์ของเวลา

   2.2) จงหาแอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่

   2.3) จงหาตำแหน่ง ความเร็ว และความเร่งขณะเวลา $\frac{\pi}{64}$ วินาทีหลังจากปล่อยวัตถุเคลื่อนที่

3. ลวดสปริงแขวนในแนวดิ่งปลายบนติดกับเพดาน ปลายล่างผูกวัตถุหนัก 12 ปอนด์ ซึ่งทำให้ลวดยืดออกถึงตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ 1.5 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุต่ำลงอีก 2 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ จงหาตำแหน่งของวัตถุในรูปฟังก์ชันของเวลา และจงหาแอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่

4. ลวดสปริงมีค่าคงตัวของลวดสปริง 12 ปอนด์ต่อฟุต มีวัตถุหนัก 8 ปอนด์ แขวนที่ปลายล่างของลวดสปริงแขวนในแนวดิ่ง ถ้ายกวัตถุสูงขึ้น 5 นิ้วจากตำแหน่งสมดุลแล้วปล่อย จงหาตำแหน่ง ของวัตถุในรูปฟังก์ชันของเวลา และจงหาแอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่

5. วัตถุหนัก 3 ปอนด์ ยืดลวดสปริง 8 นิ้ว วัตถุเริ่มเคลื่อนที่ลงด้วยความเร็ว 2 ฟุตต่อวินาที จาก ตำแหน่งสมดุล จงหา

   5.1) ตำแหน่งและความเร็วขณะเวลา t วินาที

   5.2) แอมพลิจูด คาบ และความถี่ของการเคลื่อนที่

   5.3) ความเร็ว และความเร่งขณะที่วัตถุอยู่เหนือตำแหน่งสมดุล 1 นิ้ว และกำลังเคลื่อนที่ขึ้น

6. วัตถุหนัก 4 ปอนด์ติดปลายลวดสปริงทำให้ลวดสปริงยืดออกไป 3 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุนี้ลงไป 6 นิ้ว จาก ตำแหน่งสมดุล แล้วปล่อย ถ้าการเคลื่อนที่นี้มีแรงหน่วงเป็น 2 เท่าของความเร็วของการเคลื่อนที่ จงหาตำแหน่งของวัตถุขณะเวลาใด ๆ

7. วัตถุหนัก 8 ปอนด์ ผูกติดแน่นกับลวดสปริงซึ่งปลายบนยึดติดแน่นกับเพดาน ทำให้ลวดสปริงยืดจากเดิมจนถึงตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ 6 นิ้ว ดึงวัตถุให้ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 9 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ภายใต้แรงหน่วงเป็น 4 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่ จงหาตำแหน่งของ วัตถุในรูปฟังก์ชันของเวลา

8. ยึดปลายข้างหนึ่งของลวดสปริงกับเพดาน ส่วนปลายอีกข้างหนึ่งผูกกับวัตถุหนัก 64 ปอนด์ ทำให้ลวดสปริงยาวออกจากเดิม 6.4 ฟุต ทำการดึงวัตถุลงมาจากตำแหน่งสมดุล 6 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ โดยไม่มีแรงภายนอกมากระทำ นอกจากแรงหน่วงมีขนาดเป็น 4 เท่าของความเร็วขณะที่เคลื่อนที่ จงหาฟังก์ชันแสดงการเคลื่อนที่ของวัตถุ

9. ลวดสปริงเส้นหนึ่งทำให้ยืดยาวกว่าเดิม 6 นิ้ว ต้องใช้วัตถุหนัก 20 ปอนด์ ลวดสปริงเส้นนี้แขวนติดแน่นในแนวดิ่ง ปลายล่างผูกติดแน่นด้วยวัตถุหนัก 4 ปอนด์ การเคลื่อนที่นี้มีแรงหน่วงเป็น 2 เท่าของความเร็วในขณะเคลื่อนที่

9.1) จงหาตำแหน่งของวัตถุในรูปฟังก์ชันของเวลา

9.2) จงหาคาบของการเคลื่อนที่

9.3) จงหาเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ผ่านตำแหน่งสมดุล ครั้งแรกหลังจากปล่อยวัตถุให้เกิดการเคลื่อนที่

10. วัตถุหนัก 4 ปอนด์ ผูกติดแน่นกับปลายล่างของลวดสปริงที่ปลายบนยึดติดแน่นกับเพดานในแนวดิ่ง ทำให้ลวดสปริงยืดออกไปจากเดิมจนถึงตำแหน่งสมดุลเป็นระยะ 6 นิ้ว ถ้าดึงวัตถุให้ต่ำกว่าตำแหน่งสมดุล 3 นิ้ว แล้วปล่อยให้เกิดการเคลื่อนที่ซึ่งมีแรงหน่วงเป็น c เท่าของความเร็ว ใน ขณะเคลื่อนที่ $(c > 0)$

10.1) จงหาค่า c ที่ทำให้การเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นแบบการเคลื่อนที่ภายใต้ค่าวิกฤตของแรงหน่วง และจงหาตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลาต่าง ๆ กันตามค่าของ c ที่หาได้

10.2) จงหาตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลาต่าง ๆ กัน ถ้า c มีค่าเท่ากับครึ่งหนึ่งของค่าในข้อ 10.1)

11. วัตถุหนัก 6 ปอนด์ ผูกติดแน่นกับปลายล่างของลวดสปริงที่ปลายบนแขวงติดแน่นกับเพดาน ค่าคงตัวของลวดสปริงเท่ากับ 27 ปอนด์ต่อฟุต เริ่มต้นที่ตำแหน่งสมดุล มีแรงภายนอก $F\left(t\right) = 12\cos 20t$ กระทำต่อการเคลื่อนที่ เมื่อเวลา $t = 0$ จงหาตำแหน่งของวัตถุ ณ เวลาต่าง ๆ กันโดยไม่คิดแรงหน่วง

เอกสารอ้างอิง

พินิจ เพิ่มพงศ์พันธ์. (2540). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ห้างหุ้นส่วนจำกัด นำอักษรการพิมพ์.

วารี เกรอต. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

ศิริพร พัสดร. (2552). **สมการเชิงอนุพันธ์** อุดรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี.

สุพจน์ ไวท์ยางกูร .(2550). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** ขอนแก่น : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.