แผนบริหารการสอนประจำบท
บทที่ 8 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

เนื้อหาประจำบท

1. สมการโคชี – ออยเลอร์
2. การลดอันดับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n
3. ผลเฉลยแบบอนุกรมของสมการเชิงเส้น

   3.1 จุดสามัญและจุดเอกฐาน

   3.2 ผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญ

   3.3 ผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดเอกฐาน

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนศึกษาบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายบทนิยาม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสมการโคชี – ออยเลอร์ได้
2. หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ด้วยวิธีการลดอันดับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n ได้
3. หาผลผลเฉลยแบบอนุกรมของสมการเชิงเส้นได้
4. อธิบายบทนิยาม ทฤษฎีบทเกี่ยวกับจุดสามัญและจุดเอกฐานได้
5. หาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญได้
6. หาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดเอกฐานได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายถึงทฤษฎีบท บทนิยาม และวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร มีการตั้งคำถาม ตอบคำถามระหว่างผู้สอนและผู้เรียน
2. แสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญด้วยวิธีผลการแปลงลาปลาซ
3. ตรวจสอบการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรโดยใช้โปรแกรม Wolfram Alpha
4. ให้ผู้เรียนทำใบกิจกรรม
5. สืบค้นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรทางอินเทอร์เน็ตเพิ่มเติม

6. อภิปราย สรุปประเด็นสำคัญที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร
7. สรุป และซักถามความเข้าใจท้ายบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เครื่องคอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต
2. เพาเวอร์พอยต์ เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร
3. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์
4. โปรแกรม Wolfram Alpha
5. ใบกิจกรรม

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายโต้ตอบ ซักถาม และการแสดงความคิดเห็น
3. สังเกตพฤติกรรมความกระตือรือร้นในการร่วมกิจกรรมและคุณภาพของงานที่มอบหมาย
4. ผลจากการลงมือปฏิบัติด้วยโปรแกรม Wolfram Alpha
5. ตรวจใบกิจกรรม
6. ตรวจแบบฝึกหัด
7. ประเมินผลจากแบบทดสอบ

บทที่ 8
สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร

ในบทที่ผ่านมานั้นเราได้หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ และไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์ประสิทธ์เป็นค่าคงตัวไปแล้วนั้น สำหรับในบทนี้จะเป็นการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร โดยเริ่มจากสมการโคชี – ออยเลอร์ ซึ่งเป็นสมการที่มีรูปแบบเฉพาะ สามารถแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้ แต่ถ้าสมการไม่ได้อยู่ในรูปแบบเฉพาะแล้ว อาจจะใช้วิธีการลดอันดับของสมการลงทีละหนึ่งเพื่อให้ได้ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ออกมาได้เช่นกัน หรือบางครั้งถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ไม่สามารถหาผลเฉลยในรูปของ ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลัง หรือฟังก์ชันลอการิทึม เพราะฉะนั้นจึงมีวิธีการหาผลเฉลยแบบอนุกรม นั่นคือ การหาผลเฉลยรอบจุดสามัญ และผลเฉลยรอบจุดเอกฐาน

ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปรโดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันมูลฐานของแคลคูลัส และใช้อนุกรมกำลังเป็นเครื่องมือหลักในการแสดงฟังก์ชันที่กำหนดให้ ซึ่งมีแนวคิด พื้นฐานคล้ายกับวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ และเราสันนิษฐานว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้มีการกระจายอนุกรมกำลังแล้วใช้พิจารณาค่าสัมประสิทธิ์ที่มีความสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น ๆ

สมการโคชี – ออยเลอร์

ดำรง ทิพย์โยธา (2541 : 475-476) กล่าวว่าสมการโคชี-ออยเลอร์ เป็นสมการที่อยู่ในรูป

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=F(x) \quad \text{..............(1)}$$

โดยที่ $a_0, a_1, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัว

แก้สมการ (1) โดยการแปลง $x=e^t$ ซึ่งจะเปลี่ยนสมการ (1) ให้เป็นสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวได้ ดังจะแสดงการพิสูจน์เมื่อ $n=2$ สำหรับกรณีที่ $n>2$ การพิสูจน์ก็จะเป็นทำนองเดียวกัน

$$a_0x^2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1x\frac{dy}{dx}+a_2y=F(x) \quad \text{..(2)}$$

ให้ $x=e^t$ ซึ่ง $x>0$ ดังนั้น $t=\ln x$ และ $\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt} \quad \text{..........}(3)$$

และ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{1}{x}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}$$

$$=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]$$

หรือ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right] \quad \text{..........}(4)$$

แทนสมการ (3) และ (4) ในสมการ (2) จะได้

$$a_0\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]+a_1\frac{dy}{dt}+a_2y=F(e^t)$$

หรือ

$$A\frac{d^2y}{dt^2}+B\frac{dy}{dt}+Cy=G(t) \quad \text{..........}(5)$$

เมื่อ $A=a_0, B=a_1-a_0, C=a_2$ และ $F(e^t)=G(t)$

ซึ่งสมการ (5) เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว

ข้อสังเกต 8.1

ในการแทนค่า $x = e^t$ เรากำหนดว่า $x > 0$ ถ้า $x < 0$ จะแทนค่า $x = -e^t$ ถ้าโจทย์ไม่กำหนดเงื่อนไขของ x ให้ถือว่า $x > 0$ สำหรับ $x = 0$ จะไม่พิจารณาเพราะว่าสมการที่กำหนดมาจะไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

ตัวอย่าง 8.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์ จะต้องเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้นให้ $x = e^t$ ซึ่ง $x > 0$ และ $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right] - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]
\end{aligned}$$

หรือ

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]$$

แทนสมการ $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}$ และ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left[\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right]$ ในสมการ $x^2y''-3xy'+3y=0$ จะได้

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]-3\frac{dy}{dt}+3y=e^{3t}$$

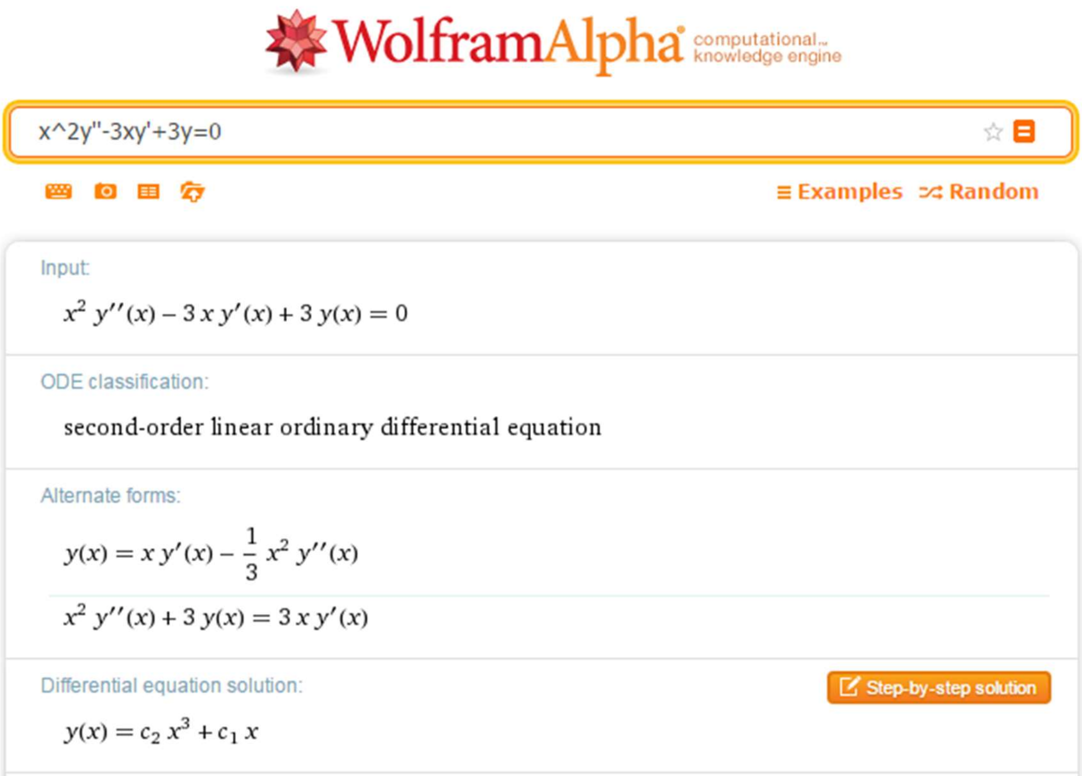
หรือ

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}+3y=0$$

สมการ $\dfrac{d^2y}{dt^2}-4\dfrac{dy}{dt}+3y=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มีผลเฉลย $y=c_1e^t+c_2e^{3t}$

แทนค่า $x=e^t$ ในสมการ $y=c_1e^t+c_2e^{3t}$ จะได้ $y=c_1x+c_2x^3$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2y''-3xy'+3y=0$ คือ $y=c_1x+c_2x^3$



ภาพประกอบที่ 8.1 ผลเฉลยของสมการ $x^2y''-3xy'+3y=0$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 8.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^3$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์ จะต้องเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงเส้นแบบไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้นให้ $x=e^t$ ซึ่ง $x>0$ และ $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)\\&=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right]-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}\\&=\frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right]\end{aligned}$$

หรือ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left[\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right]$

แทนสมการ $x\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dt}$ และ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left[\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right]$ ในสมการ

$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}+2y=x^3$ จะได้ $\left[\dfrac{d^2y}{dt^2}-\dfrac{dy}{dt}\right]-2\dfrac{dy}{dt}+2y=e^{3t}$

หรือ $\dfrac{d^2y}{dt^2}-3\dfrac{dy}{dt}+2y=e^{3t}$

สมการ $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มีผลเฉลย $y_c = c_1e^t + c_2e^{2t}$ และ $y_p = c_3e^{3t}$

ดังนั้น $y_p' = 3c_3e^{3t}$ และ $y_p'' = 9c_3e^{3t}$ นำไปแทนในสมการ $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$

จะได้ $9c_3e^{3t} - 3(3c_3e^{3t}) + 2c_3e^{3t} = e^{3t}$

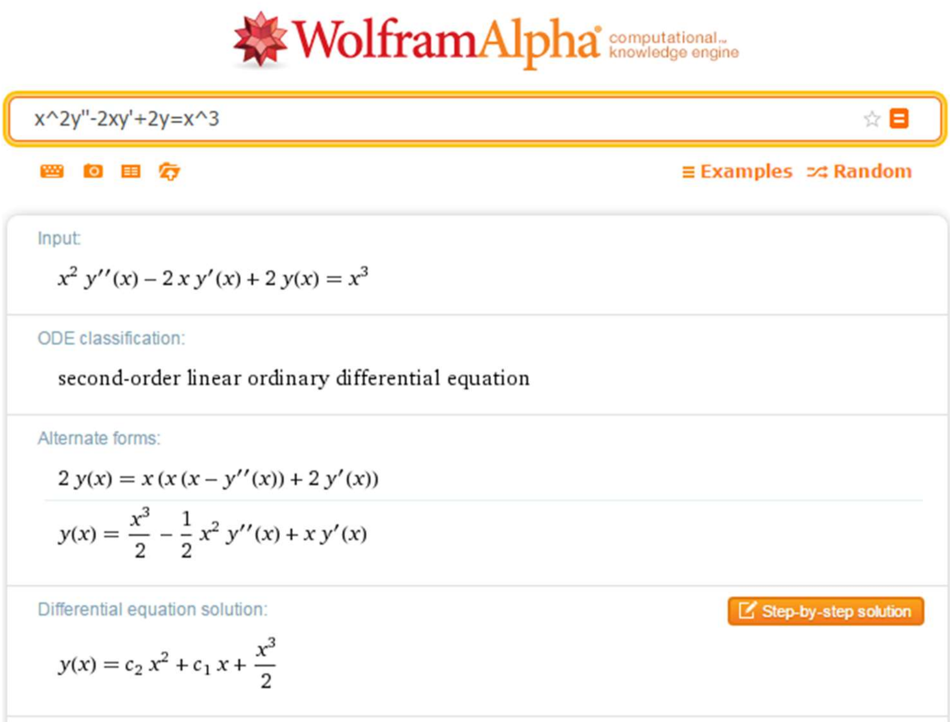
นำ $c_3 = \frac{1}{2}$ แทนในสมการ $y_p = c_3e^{3t}$ จะได้ $y_p = \frac{1}{2}e^{3t}$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = e^{3t}$ คือ

$$y = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

แทนค่า $x = e^t$ ในสมการ $y = c_1e^t + c_2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$ จะได้ $y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$ คือ $y = c_1x + c_2x^2 + \frac{1}{2}x^3$



ภาพประกอบที่ 8.2 ผลเฉลยของสมการ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

ตัวอย่าง 8.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการ $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1) = 0\,,\ y'(1) = 2$

วิธีทำ สมการที่กำหนดมาเป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์ จะต้องเปลี่ยนให้เป็นสมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ดังนั้นให้ $x = e^t$ ซึ่ง $x > 0$ และ $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}$ โดยกฎลูกโซ่จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

หรือ

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}$$

และ

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \\
&= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) + \frac{dy}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx}\right] - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} \\
&= \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]
\end{aligned}$$

หรือ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left[\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right]$

แทนสมการ $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}$ และ $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left[\dfrac{d^2y}{dt^2} - \dfrac{dy}{dt}\right]$ ในสมการ $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$ จะได้

$$\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right] + 4\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

หรือ $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}-2y=0$

สมการ $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}-2y=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ที่มีผลเฉลยทั่วไป คือ $y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$

แทนค่า $x=e^t$ ในสมการ $y=c_1e^{-t}+c_2e^{-2t}$ จะได้ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2y''+4xy'+2y=0$ คือ $y=c_1x^{-1}+c_2x^{-2}$ และจะได้ $y'=-c_1x^{-1}-2c_2x^{-2}$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=0\,,\ y'(1)=2$ ในสมการ $y=c_1x^{-1}+c_2x^{-2}$ และสมการ $y'=-c_1x^{-1}-2c_2x^{-2}$ ได้

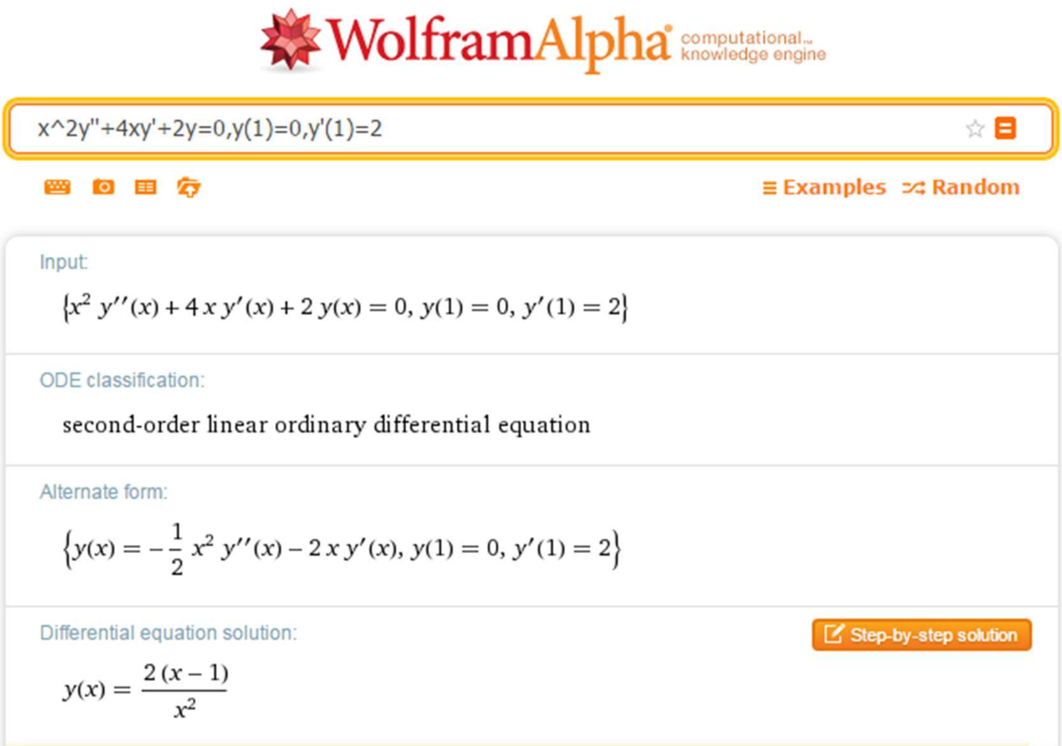
$$c_1+c_2=0$$

$$-c_1-2c_2=0$$

จะได้ $c_1=2, c_2=-2$

แทนค่า $c_1=2, c_2=-2$ ในสมการ $y=c_1x^{-1}+c_2x^{-2}$ จะได้ $y=\dfrac{2x-1}{x^2}$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $x^2y''+4xy'+2y=0$ คือ $y=\dfrac{2x-1}{x^2}$



ภาพประกอบที่ 8.3 ผลเฉลยของสมการ $x^2y''+4xy'+2y=0$

ที่มา : Wolfram Alpha LLC (2017 : online)

การลดอันดับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นอันดับ n โดยการลดอันดับของสมการลงทีละหนึ่ง โดยมีทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้ (วารี เกตรอ. 2542 : 122-124)

ทฤษฎีบท 8.1 ให้ $f(x) \neq 0$ และเป็นผลเฉลยของสมการอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่ n ต่อไปนี้

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = 0 \quad ....(1)$$

เมื่อแทน $y = f(x)v$ ในสมการแล้วสมการ (1) จะเปลี่ยนสมการเชิงเส้นอันดับ $n-1$ ของตัวแปรตาม $w = \dfrac{dv}{dx}$

จากทฤษฎีบท 8.1 พิจารณาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ 2 ได้ดังต่อไปนี้

กำหนดให้ $a_0(x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\dfrac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0$ ....(2)

ที่มี $f(x)$ ที่ $f(x) \neq 0$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2) แทน $y = f(x)v$ ในสมการ (2) ได้

$$a_0(x)\frac{d^2}{dx^2}\big[f(x)v\big] + a_1(x)\frac{d}{dx}\big[f(x)v\big] + a_2(x)\big[f(x)v\big] = 0$$

หรือ

$$a_0(x)f(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) + \left[2a_0(x)\frac{d}{dx}\big[f(x)\big] + a_1(x)f(x)\right]\left(\frac{dv}{dx}\right) = 0 \quad ....(3)$$

และให้ $w = \dfrac{dv}{dx}$ แทนในสมการ (3) จะได้

$$a_0(x)f(x)\frac{dw}{dx} + \left[2a_0(x)\frac{d}{dx}\big[f(x)\big] + a_1(x)f(x)\right]w = 0 \quad ....(4)$$

จะได้ว่าผลเฉลยเฉพาะผลเฉลยหนึ่งของสมการ (4) คือ

$$w = \frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}\,dx\right]}{\big[f(x)\big]^2} \quad ....(5)$$

ให้ $g(x) = f(x)v(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2) ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกับ $f(x)$ เมื่อ $v(x) = \displaystyle\int w(x)\,dx$

เนื่องจาก $f(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ (2) จึงได้ว่า

$$a_0(x)f''(x) + a_1(x)f'(x) + a_2(x)f(x) = 0$$

จากสมการ (4) จัดรูปสมการใหม่ได้

$$\frac{dw}{dx}+\frac{\left[2a_0(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]+a_1(x)f(x)\right]w}{a_0(x)f(x)}=0 \quad \text{..................................(6)}$$

สมการ (6) เป็นสมการเชิงเส้น ที่มีตัวประกอบปริพันธ์ คือ

$$\begin{aligned}\exp\left[\int\frac{2a_0(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]+a_1(x)f(x)}{a_0(x)f(x)}dx\right]&=\exp\left[2\int\frac{df(x)}{f(x)}dx+\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]\\&=\exp\left[\ln\left(f(x)\right)^2\right]\exp\left[\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]\\&=\left[f(x)\right]^2\exp\left[\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]\end{aligned}$$

นำตัวประกอบปริพันธ์คูณตลอดสมการ (6) ได้

$$\left[f(x)\right]^2\exp\left[\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]\left(\frac{dw}{dx}+\frac{\left[2a_0(x)\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]+a_1(x)f(x)\right]w}{a_0(x)f(x)}\right)=0$$

หรือ $d\left(w\left[f(x)\right]^2\exp\left[\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]\right)=0$ ....(7)

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (7) ได้

$$w\left[f(x)\right]^2\exp\left[\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]=c$$

หรือ

$$w=\frac{c\exp\left[-\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}{\left[f(x)\right]^2}$$

ถ้าเลือก $c=1$ จะได้ w มีค่าเท่ากับสมการ (5)

ตรวจสอบ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่โดยการใช้รอนสเกียนดังนี้

$$W(x:f(x),g(x))=\begin{vmatrix}f(x) & f(x)v\\ f_1'(x) & f(x)v'+f'(x)v\end{vmatrix}$$

$$W(x) = f(x)\Big[f(x)v' + f'(x)v\Big] - f_1'(x)\ f(x)v$$
$$= \Big[f(x)\Big]^2 v'$$
$$= \Big[f(x)\Big]^2 w$$
$$= \Big[f(x)\Big]^2 \left(\frac{\exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right]}{\Big[f(x)\Big]^2} \right)$$
$$= \exp\left[-\int \frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx\right] \neq 0$$

ดังนั้น $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันของสมการ (2)

ตัวอย่าง 8.4 กำหนดให้ $y = x$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ จงหาอีกผลเฉลยหนึ่งที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันโดยวิธีการลดอันดับ

วิธีทำ $y = x$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ และ

กำหนดให้ $y = g(x)$ เป็นอีกผลเฉลยหนึ่งของสมการ $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$

ให้ $y = vx$ ดังนั้น

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}$$

แทนค่า $\frac{dy}{dx}$ และ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ในสมการ $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$ จะได้

$$(x^2+1)\left[x\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx}\right] - 2x\left[x\frac{dv}{dx} + v\right] + 2vx = 0$$

หรือ

$$x(x^2+1)\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} = 0$$

ให้ $w = \frac{dv}{dx}$ แทนในสมการ $x(x^2+1)\frac{d^2v}{dx^2} + 2\frac{dv}{dx} = 0$ จะได้

$$x(x^2+1)\frac{dw}{dx} + 2w = 0$$

จัดสมการ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{w}dw = \frac{2}{x(x^2+1)}dx$$

ทำสมการ $\frac{1}{w}dw = \frac{2}{x(x^2+1)}dx$ เป็นเศษส่วนย่อย จะได้

$$\frac{1}{w}dw = \left[-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right]dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\frac{1}{w}dw = \left[-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right]dx$ จะได้

$$\int \frac{1}{w}dw = \int \left[-\frac{2}{x} + \frac{2x}{x^2+1}\right]dx$$

$$\ln w = -2\ln x + \ln(x^2+1) + \ln c_1$$

$$\ln w = \ln x^{-2}(x^2+1)c_2$$

$$w = \frac{(x^2+1)c}{x^2}$$

ถ้าเลือก $c = 1$ จะได้

$$w = \frac{x^2+1}{x^2}$$

หรือ

$$\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+1}{x^2}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\frac{dv}{dx} = \frac{x^2+1}{x^2}$ จะได้

$$v = x - \frac{1}{x}$$

จาก $g(x) = vx$ ดังนั้น $g(x) = x\left(x - \frac{1}{x}\right)$

หรือ $g(x) = x^2 - 1$

ตรวจสอบ $f(x)$ และ $g(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่โดยการใช้รอนสเกียนดังนี้

$$W(x : f(x), g(x)) = \begin{vmatrix} x & x^2-1 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \neq 0$$

ดังนั้น $g(x) = x^2 - 1$ เป็นอีกผลเฉลยหนึ่งของสมการ $(x^2+1)y'' - 2xy' + 2y = 0$

ผลเฉลยแบบอนุกรมของสมการเชิงเส้น

การหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร นอกจากที่กล่าวในเรื่องของสมการโคชี – ออยเลอร์ แล้วยังมีสมการเชิงอนุพันธ์บางรูปแบบที่ไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการได้โดยวิธีที่ได้ศึกษามาแล้วในหัวข้อที่ผ่านมา และสมการเชิงอนุพันธ์นั้นบางสมการนั้นเราทราบจากทฤษฎีบทของการมีผลเฉลยแล้วว่าสมการนั้นมีผลเฉลย แต่ไม่สามารถหาผลเฉลยในรูปของ ฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลัง หรือฟังก์ชันลอกาลิทึมได้ เพราะฉะนั้นจึงมีวิธีการหาผลเฉลยแบบอนุกรม ซึ่งการหาผลเฉลยแบบอนุกรมนี้จะเป็นวิธีที่ดีที่สุดในการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร (ศิริพร พัสดร. 2552 : 209)

จุดสามัญ และจุดเอกฐาน

ก่อนที่จะไปหาผลเฉลยในวิธีการนี้นั้นจะกล่าวถึงบทนิยามต่าง ๆ ที่สำคัญ และเป็นประโยชน์สำหรับการหาผลเฉลย ดังต่อไปนี้ (วารี เกตรอ. 2542 : 133- 134)

บทนิยาม 8.1 อนุกรมกำลัง คืออนุกรมที่อยู่ในรูป $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$ สำหรับทุกค่าจริง x และ a_n เป็นค่าคงตัวสำหรับทุก ๆ n และเรียก a_n ว่าสัมประสิทธิ์ และเรียกอนุกรมกำลังที่อยู่ในรูป $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$ ว่า อนุกรมกำลังรอบจุด x_0 โดยที่ x_0 ค่าคงตัวและเรียก x_0 ว่า จุดศูนย์กลางของการกระจาย

บทนิยาม 8.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับ ณ จุด x_0
เรียกอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ ว่าอนุกรมเทเลอร์ ของฟังก์ชัน f ณ จุด x_0
และถ้า $x_0 = 0$ เรียกอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ ว่าอนุกรมแมคคลอรีน

บทนิยาม 8.3 อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ จะลู่เข้าสู่ x ถ้า $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ มีจริงสำหรับ x นั้น ๆ แต่การลู่เข้าของอนุกรม ขณะ $x = x_0$ นั้นอาจลู่เข้าสำหรับทุกค่า x หรืออาจลู่เข้าสำหรับบางค่าของ x หรือไม่มีการลู่เข้า

บทนิยาม 8.4 f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ x_0 ถ้าอนุกรมเทเลอร์รอบจุด x_0 มีอยู่และลู่เข้าสู่ $f(x)$ สำหรับทุก x ในบางช่วงเปิดที่บรรจุ x_0

ตัวอย่างของฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ทุกจุดได้แก่ พหุนาม $e^x, \sin x, \cos x$ สำหรับฟังก์ชันตรรกยะของฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ที่จุดทุกจุดจะยังเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ยกเว้นที่จุดซึ่งส่วนเป็นศูนย์ เช่น ฟังก์ชัน $\dfrac{1}{x^2-4x+3}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกจุดยกเว้นที่จุด $x=1$ และ $x=3$

พิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ 2 ต่อไปนี้

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

คูณ $\dfrac{1}{a_0(x)}$ ตลอดสมการ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ จะได้

$$y'' + \frac{a_1(x)}{a_0(x)}y' + \frac{a_2(x)}{a_0(x)}y = 0$$

หรือ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

เมื่อ $\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} = P(x)$ และ $\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)} = Q(x)$

บทนิยาม 8.5 จะกล่าวว่า จุด x_0 เป็นจุดสามัญของสมการ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ถ้าฟังก์ชัน P และ Q ในสมการ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ ต่างก็วิเคราะห์ได้ที่ x_0 แต่ถ้าฟังก์ชันใดฟังก์ชันหนึ่งหรือทั้งสองฟังก์ชัน ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ x_0 จะกล่าวว่า x_0 เป็นจุดเอกฐาน ของสมการ $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$

ตัวอย่าง 8.5 พิจารณาสมการ $y'' + xy' + (x^2+2)y = 0$

วิธีทำ จากสมการ (47) $P(x) = x$ และ $Q(x) = x^2 + 2$

เนื่องจาก P และ Q เป็นพหุนาม ดังนั้น P และ Q วิเคราะห์ได้ทุกจุดที่เป็นจำนวนจริง เพราะฉะนั้นจำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจุดสามัญของสมการ $y'' + xy' + (x^2+2)y = 0$

ตัวอย่าง 8.6 พิจารณาสมการ $(x-1)y'' + xy' + \dfrac{1}{x}y = 0$ ....(1)

วิธีทำ คูณ $\dfrac{1}{x-1}$ ตลอดสมการ (1) ได้

$$y'' + \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0 \quad \text{................(2)}$$

จากสมการ (2) $P(x) = \dfrac{x}{x-1}$ และ $Q(x) = \dfrac{1}{x(x-1)}$

ฟังก์ชัน P วิเคราะห์ได้ทุกจุด ยกเว้นที่ $x=1$

ฟังก์ชัน Q วิเคราะห์ได้ทุกจุด ยกเว้นที่ $x=0$ และ $x=1$

ดังนั้น $x=0$ และ $x=1$ เป็นจุดเอกฐาน และจุดอื่น ๆ เป็นจุดสามัญของสมการ (1)

ผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญ

ในหัวข้อ 1 ที่ผ่านมานั้นได้ ให้นิยาม อนุกรมต่าง ๆ รวมทั้งบทนิยามของจุดสามัญ และจุดเอกฐาน พร้อมทั้งตัวอย่างการหาจุดสามัญและจุดเอกฐานของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเอกพันธุ์อันดับ 2 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ไปแล้วนั้น สำหรับในหัวข้อนี้จะเป็นการหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญ โดยมีทฤษฎีดังนี้ (ศิริพร พัสดร. 2552 : 211-212)

ทฤษฎีบท 8.2 ถ้า x_0 เป็นจุดสามัญของสมการ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ แล้วสมการ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ จะมีผลเฉลยซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นกันในรูป $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ แล้วอนุกรมนี้ลู่เข้าในช่วง $\left|x - x_0\right| < R$ สำหรับบางค่าของ R เรียกผลเฉลย $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ ว่าผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด x_0

สำหรับการหาผลเฉลยแบบอนุกรมในรูปสมการ $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ นั้นเมื่อกำหนด

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \cdots \quad \text{.....................(1)}$$

หาค่า y' และ y'' โดยใช้ความรู้เกี่ยวกับอนุกรมกำลังได้ดังต่อไปนี้

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n (x - x_0)^{n-1} = c_1 + 2c_2(x - x_0) + 3c_2(x - x_0)^2 + \cdots \quad \text{..........(2)}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n (x - x_0)^{n-2} = 2c_2 + 6c_3(x - x_0) + 12c_4(x - x_0)^2 + \cdots \text{..(3)}$$

แทนค่าสมการ $(1),(2)$ และ (3) ลงในสมการ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ แล้วจัดรูปสมการ

$$k_0 + k_1(x - x_0) + k_2(x - x_0)^2 + \cdots = 0 \quad \text{.......................................(4)}$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ k_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ เป็นฟังก์ชันของสัมประสิทธิ์ c_n เงื่อนไขที่ทำให้สมการ (4) เป็นจริงสำหรับทุก x ในช่วงของการลู่เข้า $\left|x - x_0\right| < R$ คือ $k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = 0$ ดังนั้นจะหาค่าสัมประสิทธิ์ c_n ได้และทำให้ได้ผลเฉลย y ของสมการ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$

ตัวอย่าง 8.7 จงหาผลเฉลยที่เป็นอนุกรมกำลังของ x ของสมการ $y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่าจำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจุดสามัญของสมการ $y'' + xy' + (x^2 + 2)y = 0$ ในที่นี้ให้ $x_0 = 0$ จะได้

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ จะได้

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ จะได้

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

แทนค่าสมการ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ $, y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$ และ $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$ ลงในสมการ $y'' + xy' + (x^2+2)y = 0$ จะได้

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + (x^2+2)\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

หรือ

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + x\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0 \quad ..(1)$$

จัดรูปสมการทางซ้ายข้องสมการ (1) เพื่อเปลี่ยนให้เลขชี้กำลังของ x ให้มีค่าเท่ากับ n ทั้งหมดดังต่อไปนี้

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

ให้ $m = n-2$ จะได้ $n = m+2$ แทนค่าในอนุกรม $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$ จะได้

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} &= \sum_{m=2}^{\infty} (m+2)\left[(m+2)-1\right] c_{m+2} x^{(m+2)-2} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) c_{m+2} x^m\end{aligned}$$

เมื่อแทน m ด้วย n จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$$

ในทำนองเดียวกัน $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2}$

แทนด้วย $\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$

ดังนั้นเมื่อแทน $\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n$ และ $\sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n$ ในสมการ (1) จะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^n + \sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n = 0$$

หรือ

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big[(n+1)(n+2)c_{n+2}x^n + (n+2)c_n + c_{n-2}x^n\Big]x^n +$$
$$+ (2c_0 + 2c_2) + (3c_1 + 6c_3)x = 0 \quad ....(2)$$

จะเป็นจริงสำหรับทุก x ในช่วงของการลู่เข้า $\left|x\right| < R$ ดังนั้นสมการ (2) สัมประสิทธิ์ทุกพจน์ต้องเป็นศูนย์ จะได้

$$(2c_0 + 2c_2) = 0$$
$$(3c_1 + 6c_3) = 0$$
$$(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+2)c_n + c_{n-2} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

จากสมการ $(2c_0 + 2c_2) = 0$ จะได้ $c_2 = -c_0$

จากสมการ $(3c_1 + 6c_3) = 0$ จะได้ $c_3 = -\dfrac{1}{2}c_1$

จากสมการ $(n+1)(n+2)c_{n+2} + (n+2)c_n + c_{n-2} = 0$ จะได้

$$c_{n+2} = -\frac{(n+2)c_n + c_{n-2}x^n}{(n+1)(n+2)x^n} \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

แทนค่า $n = 2$ ในสมการ $c_{n+2} = -\dfrac{(n+2)c_n + c_{n-2}x^n}{(n+1)(n+2)x^n}$ จะได้

$$c_4 = -\frac{2c_2 + c_0}{12} = -\frac{1}{4}c_0$$

แทนค่า $n = 3$ ในสมการ $c_{n+2} = -\dfrac{(n+2)c_n + c_{n-2}x^n}{(n+1)(n+2)x^n}$ จะได้

$$c_5 = -\frac{5c_3 + c_1}{20} = \frac{3}{40}c_1$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ $c_6, c_7, c_8, \ldots$ จะหาได้ในทำนองเดียวกัน

นำค่า $c_0, c_1, c_2, \ldots$ แทนในสมการ $y = \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ จะได้

$$y = c_0 + c_1x - c_0x^2 + \frac{1}{2}c_1x^3 - \frac{1}{4}c_0x^4 + \frac{3}{40}c_1x^5 + \cdots$$

ดังนั้น ผลเฉลยที่เป็นอนุกรมกำลังของ x ของสมการ $y'' + xy' + (x^2+2)y = 0$ คือ

$$y = c_0\left(1 - x^2 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots\right)$$

ตัวอย่าง 8.8 จงหาผลเฉลยเฉพาะแบบอนุกรมกำลังของสมการ $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=4\,,\ y'(0)=6$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่าทุกจุด $x_0 \neq \pm 1$ เป็นจุดสามัญของสมการ $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$ ดังนั้นจะมีผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด x_0 ใด ๆ เมื่อ $x_0 \neq \pm 1$ แต่เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดเป็นค่าที่จุด 0 ดังนั้นเราจะหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0

ในที่นี้ให้ $x_0 = 0$ จะได้ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ จะได้

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$$

แทนค่าสมการ $y=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $y'=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ และ $y''=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2}$ ลงในสมการ $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$ จะได้

$$(x^2-1)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3x\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

หรือ

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+1} = 0 \quad ......(1)$$

จัดรูปสมการทางซ้ายของสมการ (1) เพื่อเปลี่ยนให้เลขชี้กำลังของ x ให้มีค่าเท่ากับ n ทั้งหมดได้ดังนี้

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + 3\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n + $$
$$+\sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

หรือ

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 2c_2 - 6c_3 x - \sum_{n=2}^{\infty} (n+1)(n+2)c_{n+2} x^n + $$
$$+3c_1 x + 3\sum_{n=2}^{\infty} nc_n x^n + c_0 x + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-1} x^n = 0$$

หรือ

$$\sum_{n=2}^{\infty}\Big[-(n+2)(n+1)c_{n+2}+n(n+2)c_n+c_{n-1}\Big]x^n \ +$$
$$-2c_2-(c_0+3c_1-6c_3)x=0 \ \ ....(2)$$

จะเป็นจริงสำหรับทุก x ในช่วงของการลู่เข้า $\left|x\right|<R$ ดังนั้นสมการ (2) สัมประสิทธิ์ทุกพจน์ต้องเป็นศูนย์ จะได้

$$-2c_2=0$$
$$3c_0+3c_1-6c_3=0$$
$$-(n+2)(n+1)c_{n+2}+n(n+2)c_n+c_{n-1}=0 \text{ สำหรับ } n\geq 2$$

จากสมการ $-2c_2=0$ จะได้ $c_2=0$

จากสมการ $3c_0+3c_1-6c_3=0$ จะได้ $c_3=\dfrac{1}{6}c_0+\dfrac{1}{2}c_1$

จากสมการ $-(n+2)(n+1)c_{n+2}+n(n+2)c_n+c_{n-1}=0$ จะได้

$$c_{n+2}=\frac{n(n+2)c_n+c_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \text{ สำหรับ } n\geq 2$$

จะได้

$$c_4=\frac{8c_2+c_1}{12}=\frac{1}{12}c_1$$
$$c_5=\frac{15c_3+c_2}{20}=\frac{1}{8}c_0+\frac{3}{8}c_1$$

สำหรับสัมประสิทธิ์ $c_6,c_7,c_8,\ldots$ จะหาได้ในทำนองเดียวกัน

นำค่า $c_0,c_1,c_2,\ldots$ แทนในสมการ $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$ จะได้

$$y=c_0+c_1x-c_0x^2+\left(\frac{c_0}{6}+\frac{c_1}{2}\right)x^3+\frac{c_1}{12}x^4+\left(\frac{c_0}{8}+\frac{3c_1}{8}\right)x^5+\cdots$$

หรือ

$$y=c_0\left(1+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{8}x^5+\cdots\right)+c_1\left(x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{12}x^4+\frac{3}{8}x^5+\cdots\right) \ \ ......(3)$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(x^2-1)y''+3xy'+xy=0$ คือ (3)

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=4$ ในสมการ (3)

$$4=c_0\left(1+\frac{1}{6}(0)^3+\frac{1}{8}(0)^5+\cdots\right)+c_1\left((0)+\frac{1}{2}(0)^3+\frac{1}{12}(0)^4+\frac{3}{8}(0)^5+\cdots\right)$$

หรือ $c_0=4$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (3) จะได้

$$y' = c_0\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{8}x^4 + \cdots\right) + c_1\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{15}{8}x^4 + \cdots\right) \quad ....(4)$$

แทนเงื่อนไขเริ่มต้น เงื่อนไขเริ่มต้น $y'(0) = 6$ ในสมการ (4) จะได้

$$6 = c_0\left(\frac{1}{2}(0)^2 + \frac{5}{8}(0)^4 + \cdots\right) + c_1\left(1 + \frac{3}{2}(0)^2 + \frac{1}{3}(0)^3 + \frac{15}{8}(0)^4 + \cdots\right)$$

หรือ $c_1 = 6$

แทนค่า $c_0 = 4$ และ $c_1 = 6$ ในผลเฉลยทั่วไป (3) จะได้

$$y = 4\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right) + 6\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \cdots\right)$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะที่เป็นอนุกรมกำลังของ x ของสมการ $(x^2 - 1)y'' + 3xy' + xy = 0$ คือ

$$y = 4\left(1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{8}x^5 + \cdots\right) + 6\left(x + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{8}x^5 + \cdots\right)$$

ผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดเอกฐาน

จากบทนิยาม 8.4 นั้นได้กล่าวถึง จุดสามัญ และจุดเอกฐาน ของสมการเชิงอนุพันธ์ไปแล้วนั้น และในหัวข้อ 2 การหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญไปแล้วนั้นสำหรับหัวข้อนี้จะเป็นการหาผลเฉลยรอบจุดเอกฐาน ดังนี้ (ดำรง ทิพย์โยธา. 2541 : 505-506)

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

เมื่อเราทราบว่า x_0 เป็นจุดสามัญ ในกรณีนี้เราไม่ทราบว่า

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

จะเป็นผลเฉลยสมการ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ หรือไม่ แต่ถ้า x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติ ซึ่งจะได้ให้บทนิยามต่อไป เราจะได้ว่าสมการ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ มีผลเฉลยในรูป

$$y = \left|x - x_0\right|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

บทนิยาม 8.6 จากสมการ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ กำหนดให้ $P(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$ และ $Q(x) = \dfrac{a_2(x)}{a_0(x)}$ กล่าวว่าจุด x_0 เป็น**จุดเอกฐานปกติ**ของ $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ ถ้า

$(x-x_0)P(x)$ และ $(x-x_0)^2Q(x)$ วิเคราะห์ได้ที่ x_0 ถ้าไม่เป็นเช่นนี้กล่าวว่า x_0 เป็นจุดเอกฐานไม่ปกติ ของสมการ $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$

ตัวอย่าง 8.9 พิจารณาสมการ

$$2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$$

วิธทำ สมการ $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$ สามารถจัดได้ในรูป

$$y''-\frac{x}{2x^2}y'+\frac{x-5}{2x^2}y=0$$

$$P(x)=-\frac{x}{2x^2} \text{ และ } Q(x)=\frac{x-5}{2x^2}$$

จะได้ $xP(x)=-\dfrac{1}{2}$ และ $x^2Q(x)=\dfrac{x-5}{2}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ที่ $x=0$

ดังนั้น $x=0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ $2x^2y''-xy'+(x-5)y=0$

ตัวอย่าง 8.10 พิจารณาสมการ

$$x^2(x-2)^2y''+2(x-2)y'+(x+1)y=0$$

วิธทำ สมการ $x^2(x-2)^2y''+2(x-2)y'+(x+1)y=0$ สามารถจัดได้ในรูป

$$y''+\frac{2}{x^2(x-2)^2}y'+\frac{x+1}{x^2(x-2)^2}y=0$$

$$P(x)=\frac{2}{x^2(x-2)^2} \text{ และ } Q(x)=\frac{x+1}{x^2(x-2)^2}$$

จะได้ $xP(x)=\dfrac{2}{x(x-2)^2}$ และ $x^2Q(x)=\dfrac{x+1}{(x-2)^2}$

จะเห็นว่า $x^2Q(x)$ วิเคราะห์ได้ที่ $x=0$ แต่ $xP(x)$ ไม่วิเคราะห์ได้ที่ $x=0$

ดังนั้น $x=0$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปกติของสมการ (98) แต่ $x=2$ เป็นจุดเอกฐานไม่ปกติของสมการ $x^2(x-2)^2y''+2(x-2)y'+(x+1)y=0$ เพราะว่า $(x-2)P(x)$ และ $(x-2)^2Q(x)$ ต่างก็วิเคราะห์ได้ที่ $x=2$

ทฤษฎีบท 8.3 ถ้า x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ แล้วจะได้ว่าสมการ $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ มีอย่างน้อยหนึ่งผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์ซึ่งอยู่ในรูป

$$y=\left|x-x_0\right|^r\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^n$$

เมื่อ r เป็นค่าคงตัวที่จะหาค่าได้ และผลเฉลย $y = \left|x - x_0\right|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ เป็นจริง ในช่วง $0 = \left|x - x_0\right|^r < R$ สำหรับบางค่า $R > 0$

การหาผลเฉลย $y = \left|x - x_0\right|^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ นี้วิธีการคล้ายกับการหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุดสามัญที่เราได้ศึกษาในหัวข้อที่ผ่านมา คือต้องหาสัมประสิทธิ์ c_n แต่ที่เพิ่มมาสำหรับการหาผลรอบจุดเอกฐานปกติคือต้องหา r ซึ่งเรียกวิธีนี้ว่า วิธีของโฟรเบนิอุส เพื่อเป็นเกียรติประวัติกับผู้คิดค้น ซึ่งจะมีวิธีการหาตามขั้นตอนดังต่อไปนี้ (วารี เกรอต. 2542 : 141-145)

ขั้นที่ 1 ให้ x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

และสมมติว่าผลเฉลยในรูป $a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ คือ

$$y = (x - x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เป็นจริงในช่วง $0 < x - x_0 < R$ เมื่อ $c_0 \neq 0$ เขียนผลเฉลยโดยรวมเทอม $(x - x_0)$ จะได้

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

ขั้นที่ 2 หาอนุพันธ์สมการ (1) เทียบกับ x จะได้

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r) c_n (x - x_0)^{n+r-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

และหาอนุพันธ์สมการ (2) เทียบกับ x จะได้

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n + r)(n + r - 1) c_n (x - x_0)^{n+r-2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

นำค่า y, y' และ y'' ในสมการ (2), (3) และ (4) แทนในสมการ (1)

ขั้นที่ 3 จากขั้นที่ 2 ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายจะได้อนุกรมในรูปต่อไปนี้

$$k_0 (x - x_0)^{r+k} + k_1 (x - x_0)^{r+k+1} + k_2 (x - x_0)^{r+k+2} + \cdots = 0 \quad \ldots\ldots\ldots(5)$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มที่แน่นอนซึ่งทำให้ $r + k$ เป็นกำลังที่น้อยที่สุดของอนุกรมที่ได้ในขั้นที่ 2 และ k_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) เป็นฟังก์ชันของ r และสัมประสิทธิ์ c_n

ขั้นที่ 4 เพื่อให้สมการ (5) เป็นจริงทุก x ในช่วง $0 < x - x_0 < R$ จะได้

$$k_0 = k_1 = k_2 = \cdots = 0$$

ขั้นที่ 5 จากสมการ $k_0 = 0$ จะได้สมการกำลังสองของ r ซึ่งจะเรียกว่าสมการช่วย สมมติให้รากสมการช่วยคือ r_1 และ r_2 (อาจเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้) และให้ $\mathrm{Re}(r_1) > \mathrm{Re}(r_2)$ และราก r_1, r_2 เรียกว่าเลขชี้กำลัง

ขั้นที่ 6 แก้สมการ k_n ($n = 0,1,2,\ldots$) จะได้เซตของเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่า r และสัมประสิทธิ์ c_n

ขั้นที่ 7 แทนค่าราก r_1 สำหรับ r ในเงื่อนไขที่ได้ในขั้นที่ 6 จะได้ค่าของ c_n ซึ่งเมื่อนำไปแทนใน (2) และแทนค่า r ใน (2)) ด้วย r_1 ผลที่ได้จะเป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (1)

ตัวอย่าง 8.11 จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลยของ $2x^2y'' - 2xy' + (x-5)y = 0$..(1) ในช่วง $0 < x < R$ สำหรับบางค่า R

วิธีทำ เนื่องจาก $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (1) ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 8.3 สมการจะมีผลเฉลยในรูป $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r}$ ....(2)

เมื่อ $c_n \neq 0$ แล้วจะได้ว่า
$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n (x-x_0)^{n+r-1} \quad \text{..........................(3)}$$
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)c_n (x-x_0)^{n+r-2} \quad \text{............(4)}$$

นำค่า y, y' และ y'' ในสมการ (2), (3) และ (4) แทนในสมการ (1) จะได้

$$2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n(x-x_0)^{n+r-2} - 2x\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n(x-x_0)^{n+r-1} +$$
$$+(x-5)\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-x_0)^{n+r} = 0$$

ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) - 5\Big]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}x^{n+r} = 0$$
$$\Big[2r(r-1) - r - 5\Big]c_0 x^r +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\Big[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) - 5\Big]c_n + c_{n-1}\Big)x^{n+r} = 0$$

ถ้ามีค่า $k = 0$ ดังนั้นสมการช่วย คือ $2r(r-1) - r - 5 = 0$

หาค่าราก r_1, r_2 ของสมการนี้ได้ $r_1 = \dfrac{5}{2}$ และ $r_2 = -1$

แก้สมการ k_n ($n = 0,1,2,\ldots$) จะได้เซตของเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่า r และสัมประสิทธิ์ c_n ดังนี้

$$\Big[2(n+r)(n+r-1) - (n+r) - 5\Big]c_n + c_{n-1} = 0 \quad \text{......................(5)}$$

แทนค่า $r = r_1 = \dfrac{5}{2}$ ในสมการ (5) จะได้

$$\left[2(n+\frac{5}{2})(n+\frac{5}{2}-1) - (n+\frac{5}{2}) - 5\right]c_n + c_{n-1} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 1$$

หรือ

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n(2n+7)} \quad \text{สำหรับ } n \geq 1$$

จากสมการ $c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{n(2n+7)}$ หาค่าสัมประสิทธิ์ c_n ได้ดังนี้

$$c_1 = -\frac{c_0}{9}$$
$$c_2 = -\frac{c_1}{22} = \frac{c_0}{198}$$
$$c_3 = -\frac{c_2}{39} = -\frac{c_0}{7722}$$
$$\vdots$$

แทนค่า $r = r_1 = \dfrac{5}{2}$ และแทนค่า $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ในสมการ (2) จะได้

$$y = c_0\left(x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{9}x^{\frac{7}{2}} + \frac{1}{198}x^{\frac{9}{2}} - \frac{1}{7722}x^{\frac{11}{2}} + \cdots\right)$$
$$y = c_0x^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - \frac{1}{7722}x^3 + \cdots\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

ดังนั้นสมการ (6) เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ (1) จะได้

ถ้าแทนค่า $r = r_2 = -1$ ในสมการ (5) จะได้

$$\left[2(n-1)(n-1-1) - (n-1) - 5\right]c_n + c_{n-1} = 0 \quad \text{สำหรับ } n \geq 1$$

หรือ $c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{n(2n-7)}$ สำหรับ $n \geq 1$

จากสมการ $c_n = -\dfrac{c_{n-1}}{n(2n-7)}$ หาค่าสัมประสิทธิ์ c_n ได้ดังนี้

$$c_1 = \frac{c_0}{5}$$
$$c_2 = \frac{c_1}{6} = \frac{c_0}{30}$$
$$c_3 = \frac{c_2}{3} = \frac{c_0}{90}$$
$$\vdots$$

แทนค่า $r = r_2 = -1$ และแทนค่า $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ในสมการ (2) จะได้

$$y = c_0\left(x^{-1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{30}x + \frac{1}{90}x^2 + \cdots\right)$$
$$y = c_0x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + \cdots\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

และเนื่องจากผลเฉลย (6) และผลเฉลย (7) เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) คือ สำหรับ a_1, a_2 เป็นตัวคงค่า

$$y = a_1 x^{\frac{5}{2}}\left(1 - \frac{1}{9}x + \frac{1}{198}x^2 - \frac{1}{7722}x^3 + \cdots\right) + a_2 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{90}x^3 + \cdots\right)$$

ในกรณีที่รากของสมการช่วยมีค่าเท่ากัน เราจะได้เพียง 1 ผลเฉลยเท่านั้น หรือถึงแม้ว่ารากของสมการช่วยจะเป็นจำนวนจริงที่ต่างกัน แต่ถ้าผลเฉลยที่ได้จากรากทั้งคู่อาจจะไม่อิสระเชิงเส้นกันก็ได้ ดังนั้นจึงมีคำถามเกี่ยวกับผลเฉลยของสมการ

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0 \quad \text{..}(*)$$

1. ภายใต้เงื่อนไขอะไรจึงจะรับประกันได้ว่าสมการ (*) มี 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน
2. ถ้าสมการ (*) ไม่มี 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันแล้ว 2 ผลเฉลยที่เป็นอิสระกันจะเป็นรูปใด

ผลเฉลยของ 2 คำถามคือทฤษฎีบทต่อไปนี้ (วชิรารักษ์ โอรสรัมย์. 2558 : 269)

ทฤษฎีบท 8.4 กำหนดให้ x_0 เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ (*) ให้ r_1, r_2 $\left[\mathrm{Re}(r_1) > \mathrm{Re}(r_2)\right]$ เป็นรากของสมการช่วยที่จุด x_0

1. ถ้า $r_1 - r_2 \neq N$ เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบแล้วจะได้ว่าสมการ (*) มีผลเฉลย y_1, y_2 ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ซึ่งหาค่าได้ดังนี้

$$y_1(x) = \left|x - x_0\right|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$ และ

$$y_2(x) = \left|x - x_0\right|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$

2. ถ้า $r_1 - r_2 = N$ เมื่อ N เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วจะได้ว่าสมการ (*) มีผลเฉลย y_1, y_2 ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ซึ่งหาค่าได้ดังนี้

$$y_1(x) = \left|x - x_0\right|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$

$$y_2(x) = \left|x - x_0\right|^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n + C y_1(x) \ln\left|x - x_0\right|$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$ และ C เป็นค่าคงตัวซึ่งอาจเป็น 0 ได้

3. ถ้า $r_1 - r_2 = 0$ แล้วจะได้ว่าสมการ (*) มีผลเฉลยที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันคือ y_1, y_2 ซึ่งหาค่าได้ดังนี้

$$y_1(x) = \left|x - x_0\right|^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

เมื่อ $c_0 \neq 0$

$$y_2(x) = \left|x - x_0\right|^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n + y_1(x) \ln\left|x - x_0\right|$$

ผลเฉลยในข้อ 1 - 3 ในทฤษฎีบท 8.4 นั้นจะเป็นจริงในช่วง $0 < \left|x - x_0\right| < R$ สำหรับบางค่า $R > 0$

ตัวอย่าง 8.12 จงใช้วิธีของโฟรเบนิอุสหาผลเฉลยของสมการ $2x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)y = 0$ (1) ในช่วง $0 < x < R$ สำหรับบางค่า R

วิธีทำ เนื่องจาก $x = 0$ เป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ $2x^2y'' + xy' + (x^2 - 3)y = 0$ ดังนั้น หาผลเฉลยสำหรับ $0 < x < R$ โดยกำหนดให้

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} \quad \text{..}(2)$$

เมื่อ $c_n \neq 0$ แล้วจะได้ว่า

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n (x - x_0)^{n+r-1} \quad \text{..}(3)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n (x - x_0)^{n+r-2} \quad \text{..............................}(4)$$

นำค่า y, y' และ y'' ในสมการ (2), (3) และ (4) แทนในสมการ (1) จะได้

$$2x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n (x - x_0)^{n+r-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n (x - x_0)^{n+r-1} +$$

$$+ (x^2 - 3) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^{n+r} = 0$$

ทำให้เป็นรูปอย่างง่ายจะได้

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[2(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 3\right] c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} = 0$$

$$\left[2r(r-1)\right] c_0 x^r + \left[2(r+1)r + (r+1) - 3\right] c_1 x^{r+1} +$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\left[2(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 3\right] c_n - c_{n-2} \right) x^{n+r} = 0 \quad \text{..........}(5)$$

เมื่อเทียบสัมประสิทธิ์ของ x กำลังน้อยสุดในสมการ (5) ให้เท่ากับศูนย์จะได้สมการช่วย

$$2r(r-1) + r - 3 = 0$$

หาค่าราก r_1, r_2 ของสมการนี้ได้ $r_1 = \dfrac{3}{2}$ และ $r_2 = -1$

เนื่องจากผลต่าง $r_1 - r_2 = \frac{5}{2}$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 8.4 จะได้ว่าสมการ (1) มี 2 ผลเฉลย ที่เป็นอิสระเชิงเส้นกันในรูป (2) โดยแทนค่า $r = r_1$ และ $r = r_2$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x ที่มีกำลังมากกว่า r เป็น 0 จะได้

$$\left[2(r-1)r + (r+1) - 3\right]c_1 = 0 \quad \text{...(6)}$$

ได้เซตของเงื่อนไขที่เกี่ยวข้องกับค่า r และสัมประสิทธิ์ c_n ดังนี้

$$\left[2(n+r)(n+r-1) + (n+r) - 3\right]c_n + c_{n-2} = 0 \quad \text{.......................(7)}$$

แทนค่า $r = r_1 = \frac{3}{2}$ ใน (6) จะได้ $c_1 = 0$

ดังนั้นแทนค่า $c_1 = 0$ และ $r = r_1 = \frac{3}{2}$ ในสมการ (7) จะได้

$$n(2n+5)c_n + c_{n-2} = 0 \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

หรือ

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(2n+5)} \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

แทนค่า $n = 2, 3, 4, \ldots$ ในสมการ $c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(2n+5)}$

$$\begin{aligned} c_2 &= -\frac{c_0}{18} \\ c_3 &= -\frac{c_1}{33} = 0 \\ c_4 &= -\frac{c_2}{52} = \frac{c_0}{96} \\ &\vdots \end{aligned}$$

นั่นคือสัมประสิทธิ์ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ เป็นศูนย์ทั้งหมด จะได้ผลเฉลย $y = y_1(x)$ สำหรับราก r_1 ดังนี้

$$y_1(x) = c_0 x^{\frac{3}{2}}\left(1 - \frac{1}{18}x^2 + \frac{1}{936}x^4 - \cdots\right) \quad \text{.....................................(8)}$$

ต่อไปแทนค่าถ้าแทนค่า $r = r_2 = -1$ ในสมการ (6) จะได้ $c_1 = 0$

ดังนั้นแทนค่า $c_1 = 0$ และ $r = r_2 = -1$ ในสมการ (7) จะได้

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(2n-5)} \text{ สำหรับ } n \geq 2$$

แทนค่า $n = 2, 3, 4, \ldots$ ในสมการ $c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(2n-5)}$

$$c_2 = \frac{c_0}{2}$$
$$c_3 = -\frac{c_1}{3} = 0$$
$$c_4 = -\frac{c_2}{12} = -\frac{c_0}{24}$$
$$\vdots$$

กรณีนี้สัมประสิทธิ์ $c_1, c_2, c_3, \ldots$ เป็นศูนย์ทั้งหมด จะได้ผลเฉลย $y = y_2(x)$ สำหรับราก r_2 ดังนี้

$$y_2(x) = c_0 x^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + \cdots\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

และเนื่องจากผลเฉลย (8) และผลเฉลย (9) เป็นอิสระเชิงเส้นกัน

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ (1) คือ

$$y = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x)$$

เมื่อ a_1, a_2 เป็นตัวคงค่า

สรุปท้ายบท

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นตัวแปร ถ้าสมการเชิงเส้นนั้นอยู่ในรูปแบบ

$$a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = F(x)$$

จะเรียกสมการนี้ว่าสมการ โคชี – ออยเลอร์ ซึ่งเป็นสมการที่มีรูปแบบเฉพาะ และสามารถหาผลเฉลยโดยการแปลงเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวแล้วหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้นที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แต่ถ้าสมการอยู่ในรูปแบบ

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x) y = 0$$

ซึ่งสมการนี้ไม่เป็นสมการ โคชี – ออยเลอร์แล้วเราจะใช้การลดอันดับของสมการลงที่ละหนึ่งโดยแทน $y = f(x)v$ ในสมการแล้วสมการดังกล่าว แล้วสมการนั้นจะเปลี่ยนสมการเชิงเส้นอันดับ $n-1$ ของตัวแปรตาม $w = \dfrac{dv}{dx}$ ทำให้สามารถหาผลเฉลยของสมการในรูปแบบดังกล่าวได้ แต่ยังมีสมการเชิงอนุพันธ์ในบางรูปแบบที่ไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการได้โดยวิธีก่อนหน้า และถ้าทราบจากทฤษฎีบทของการมีผลเฉลยแล้วว่าสมการนั้นมีผลเฉลยแต่ไม่สามารถหาผลเฉลยในรูปของฟังก์ชันพีชคณิต ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน ฟังก์ชันชี้กำลัง หรือฟังก์ชันลอกาลิทึมได้ ดังนั้นผลเฉลยจะอยู่ในรูปแบบอนุกรมซึ่งมีวิธีการหาผลเฉยรอบจุดสามัญ และผลเฉลยรอบจุดเอกฐาน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 8

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

   1.1 $x^2y'' + xy' + 3y = 0$

   1.2 $x^2y'' - 2xy' + y = 0$

   1.3 $2x^2y'' - xy' + 3y = 0$

   1.4 $-x^2y'' + 2xy' - y = 0$

2. กำหนดผลเฉลย y_1 ของสมการเชิงอนุพันธ์ให้จงหาอีกผลเฉลยหนึ่งที่เป็นอิสระเชิงเส้นกับ y_1

   2.1 $(1-2x-x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0$, $y_1 = x+1$

   2.2 $(1+2x)y'' + 4xy' - 4y = 0$, $y_1 = e^{-2x}$

   2.3 $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y_1 = x^2 + x^3$

   2.4 $y'' + 3\tan xy' - 4y = 0$, $y_1 = 1$

3. จงหาจุดเอกฐานทั้งหมดของสมกาเชิงอนุพันธ์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   3.1 $(1-x)y'' + \dfrac{3x}{x+2}y' + \dfrac{(1-x)^2}{x+3}y = 0$

   3.2 $(x^2+x)y'' + \dfrac{x^3}{x-1}y' + \dfrac{x^4+3x}{x+2}y = 0$

   3.3 $\dfrac{1}{x}y'' + \dfrac{3x^3}{x-1}y' + \dfrac{2x}{x+2}y = 0$

   3.4 $e^xy'' + \dfrac{3x+4}{x+4}y' + \dfrac{x}{x-4}y = 0$

4. จงหาจุดเอกฐานทั้งหมดและตรวจสอบว่าจุดใดเป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ

   $$x^2(x^2-1)y'' + \frac{x(x+1)}{x-4}y' + \frac{3(x-1)}{x^2-16}y = 0$$

5. จงหาจุดเอกฐานทั้งหมดและตรวจสอบว่าจุดใดเป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ

   $$x(x^2-3x+10)y'' + \frac{x+4}{x-2}y' + 16y = 0$$

6. จงหาจุดเอกฐานทั้งหมดและตรวจสอบว่าจุดใดเป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ

   $$x(x-1)y'' + \frac{x+1}{x-4}y' + \frac{1}{x+2}y = 0$$

7. จงหาจุดเอกฐานทั้งหมดและตรวจสอบว่าจุดใดเป็นจุดเอกฐานปกติของสมการ

$$e^x y'' + 3xy' + \frac{1}{1-e^x}y = 0$$

8. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 ของสมการ $y'' + xy' + (3x+2)y = 0$

9. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 ของสมการ $y'' + xy' + (2x^2+1)y = 0$

10. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมของ $y'' + xy' + y = 0$ เมื่อกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น $y(0) = 1, y'(0) = 0$

11. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมของ $x^2y'' + y' + 2y = 0$ เมื่อกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น $y(1) = 0, y'(1) = 1$

12. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมของ $y'' + xy' + 2xy = 0$ เมื่อกำหนดปัญหาค่าเริ่มต้น $y(0) = 2, y'(0) = 3$

13. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 โฟรเบนิอุสของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xy'' - \left(x - \frac{1}{2}\right)y' - \frac{1}{2}y = 0$$

14. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 โฟรเบนิอุสของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2x^2y'' + 5xy' + (2x^2 - 1)y = 0$$

15. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 โฟรเบนิอุสของสมการ $2xy'' + (1+x)y' - 2y = 0$

16. จงหาผลเฉลยแบบอนุกรมรอบจุด 0 โฟรเบนิอุสของสมการ $xy'' + y' + y = 0$

17. กำหนดผลเฉลย y_1 ของสมการ $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$ เมื่อ $y_1 = x^3 \ln x$ จงหาอีกผลเฉลยหนึ่งที่เป็นอิสระเชิงเส้นกับ y_1

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา. (2541). **การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์ (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** บุรีรัมย์ : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์

วารี เกรอต. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร

ศิริพร พัสดร. (2552). **สมการเชิงอนุพันธ์** อุดรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี.

Wolfram Alpha LLC. **Wolframalpha** (online) Avaiable : http://www.wolframlpha.com

Wolfram, Stephen. (2017). **The Mathematica Book**. 5thed. Wolfram Media : Cambridge.