แผนบริหารการสอนประจำบท
บทที่ 4 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n

เนื้อหาประจำบท

1. ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์
2. สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์
3. ทฤษฎีการมีผลเฉลยและการมีผลเฉลยเดียวเท่านั้น
4. ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนศึกษาบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. บอกได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นเซตอิสระเชิงเส้นหรือเป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น
2. อธิบายทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและความเป็นไปได้อย่างเดียวของผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้
3. หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์ได้
4. หาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ได้
5. หาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์ได้
6. อธิบายบทนิยามและทฤษฎีบทเกี่ยวกับตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายถึงทฤษฎีบท บทนิยาม และวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n มีการตั้งคำถาม ตอบคำถามระหว่างผู้สอนและผู้เรียน
2. แสดงตัวอย่างการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n
3. ให้ผู้เรียนทำใบกิจกรรม
4. สืบค้นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n ทางอินเทอร์เน็ตเพิ่มเติม
5. อภิปราย สรุปประเด็นสำคัญที่เกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n
6. สรุป และซักถามความเข้าใจท้ายบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เครื่องคอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต
2. เพาเวอร์พอยต์ เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n
3. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์
4. โปรแกรม Wolfram Alpha
5. ใบกิจกรรม

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายโต้ตอบ ซักถาม และการแสดงความคิดเห็น
3. สังเกตพฤติกรรมความกระตือรือร้นในการร่วมกิจกรรมและคุณภาพของงานที่มอบหมาย
4. ผลจากการลงมือปฏิบัติด้วยโปรแกรม Wolfram Alpha
5. ตรวจใบกิจกรรม
6. ตรวจแบบฝึกหัด
7. ประเมินจากแบบทดสอบ

บทที่ 4
สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n หรือในบางครั้งมักจะเรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์อันดับสูงกว่าหนึ่ง ในบทนี้จะกล่าวถึงรายละเอียดการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับสองขึ้นไป และเป็นสมการที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ซึ่งจะได้พิจารณาถึงบทนิยาม ทฤษฎีบท และวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นเป็นส่วนใหญ่ และในตอนท้ายของบทนี้จะกล่าวถึงสมการไม่เชิงเส้นอันดับสูงกว่าหนึ่ง เราได้ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งมาแล้วในบทที่ 2 ซึ่งมี สมการแบบแยกตัวแปรได้ สมการแบบเอกพันธุ์ สมการแบบแม่นตรง และสมการแบบเชิงเส้น แม้ว่าผลเฉลยของสมการเหล่านี้จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันอิงตัวแปรเสริมเพียงตัวเดียวก็ตาม แต่ก็ยังมีผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์บางสมการไม่สามารถเขียนอยู่ในรูปผลเฉลยทั่วไปได้ ในเฉพาะกรณีสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง มีผลเฉลยทั่วไปอยู่บนเงื่อนไขของความต่อเนื่อง เราจะเรียกวงศ์ของผลเฉลยที่หาค่าได้บนช่วง I ว่า ผลเฉลยทั่วไป ซึ่งผลเฉลยนี้จะเป็นตัวแทนผลเฉลยทั้งหมดของสมการเชิงอนุพันธ์ที่นิยามได้บนช่วง I ในบทนี้จะศึกษารูปแบบและตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ และสมบัติบางประการของตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากการที่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n เพื่อเป็นประโยชน์ในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ในรูปแบบต่าง ๆ ต่อไป

ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n มีรูปทั่วไปเป็นดังนี้ (ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. 2549 : 2)

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

เมื่อ $f(x), a_i(x), i = 0,1,2,...,n$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซตย่อย I ของ R และ $a_0(x) \neq 0$ ต่อไปเราจะใช้สัญลักษณ์ D แทนสัญลักษณ์ $\frac{d}{dx}$ นั้นคือ $Df(x)$ หมายถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f เทียบกับตัวแปร x เพราะฉะนั้น $\frac{df(x)}{dx}$ แทนด้วย $Df(x)$

และ $\quad \frac{dy}{dx} \quad$ แทนด้วย $\quad D_y$

นอกจากนั้น $\quad \frac{d^2y}{dx^2} \quad$ แทนด้วย $\quad D^2y$

$\dfrac{d^n y}{dx^n}$ แทนด้วย $D^n y$

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอยู่ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

สามารถเขียนได้เป็น

$$\begin{aligned} a_0(x)D^n y + a_1(x)D^{n-1}y + \cdots + a_{n-1}(x)Dy + a_n(x)y &= f(x) \\ \Big(a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)\Big)y &= f(x) \\ P(D)y &= f(x) \end{aligned}$$

เมื่อ $P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$

จากการที่เราแทนสัญลักษณ์ $\dfrac{d}{dx}$ ด้วย D จะเห็นได้ว่า D มีลักษณะเหมือนกับฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และเรจน์เป็นเซตของฟังก์ชัน

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์ (2549 : 2) ได้กล่าวถึงบทนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.1 A และ B เป็นเซตของฟังก์ชัน ฟังก์ชันค่าจริง $L : A \to B$ เรียกตัวดำเนินการ และถ้า L มีคุณสมบัติว่าทุกฟังก์ชัน f, g และทุกค่าคงตัว a,b จะได้ว่า

$$L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$$

แล้วเรียก L ว่าเป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

นอกจากนี้โดยสมบัติของอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่า ทุกฟังก์ชัน f, g และทุกค่าคงตัว a,b จะได้ว่า

$$L(af + bg) = D\Big(af(x) + bg(x)\Big) = aDf(x) + bDg(x) = aL(f) + bL(f)$$

เพราะฉะนั้น L เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นนั่นคือ D เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นด้วยให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก สำหรับเซตของฟังก์ชัน A ที่กล่าวถึงจะหมายถึงเซตของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ n เพราะว่า D^n ส่งฟังก์ชัน y ไปยังฟังก์ชัน $\dfrac{d^n}{dx^n}y$ เพราะฉะนั้น D^n เป็นตัวดำเนินการโดยสมบัติของอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่า

$$D^n(af + bg) = aD^n f + bD^n g$$

ทุกฟังก์ชัน f, g และทุกค่าคงตัว a,b ดังนั้น D^n เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น ต่อไปจะใช้ประโยชน์และคุณสมบัติของตัวดำเนินการเชิงเส้น $D, D^2, D^3, \ldots, D^n$ ช่วยในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

บทนิยาม 4.2 กำหนดให้ $L : B \to C$ และ $T : A \to B$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ถ้า L และ T เป็นตัวดำเนินการ

การบวก

$$(L+T)(f) = L(f) + T(f)$$

การคูณ

$$(LT)(f) = L(T(f))$$

การคูณด้วยค่าคงตัว k

$$(kL)(f) = L(kf)$$

ทฤษฎีบท 4.1 กำหนดให้ $L : B \to C$ และ $T : A \to B$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ถ้า L และ T เป็นตัวดำเนินการ ถ้า L และ T เป็นตัวดำเนินการ k เป็นค่าคงตัว แล้ว $L+T,\ kL$ และ LT เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ $L_1 : B \to C\, , L_2 : A \to B$ และ $L_3 : C \to A$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ถ้า L_1, L_2 และ L_3 เป็นตัวดำเนินการ จะได้ว่า

1. $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$
2. $(L_1 + L_2) + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3)$
3. $(L_1 L_2) L_3 = L_1 (L_2 L_3)$
4. $L_1 (L_2 + L_3) = L_1 L_2 + L_1 L_3$

บทนิยาม 4.3 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก $p(x)$ เป็นพหุนามในพจน์ของ x ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง เราให้นิยามการคูณของ $p(x)$ กับ D^n โดย $\Big(p(x)D^n\Big)f = p(x)\Big(D^n(f)\Big)$ โดยที่

$$D^0 f = f$$

เนื่องจาก
$$\begin{aligned} p(x)D^n(af+bg) &= p(x)\Big(D^n(af+bg)\Big) \\ &= p(x)\Big(aD^n(f) + bD^n(g)\Big) \\ &= a\Big(p(x)D^n(f)\Big) + b\Big(p(x)D^n(g)\Big) \end{aligned}$$

ทุกค่าคงตัว a, b และทุกฟังก์ชัน f และ g เพราะฉะนั้น $p(x)D^n$ เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นผลจากทฤษฎีบท 4.2 จะได้ว่า

$$L = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$$

เป็นตัวดำเนินการเชิงเส้นเราเรียก L ว่า ตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n

และ $a_0(x), a_1(x), ..., a_{n-1}(x), a_n(x)$ เรียกว่าสัมประสิทธิ์ของตัวดำเนินการ $D^n, D^{n-1}, ..., D$ และ D^0 ตามลำดับ

ตัวอย่าง 4.1 กำหนดให้ $L = xD - 2$ และ $T = D + x$ จงแสดงว่า $(LT)e^x \neq (TL)e^x$

วิธีทำ จะได้ $LT = (xD-2)(D+x)$ และ $TL = (D+x)(xD-2)$

$$\begin{aligned}
(LT)e^x &= \left[(xD-2)(D+x)\right]e^x \\
&= (xD-2)(De^x + xe^x) \\
&= (xD-2)(e^x + xe^x) \\
&= xD(e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) \\
&= x(De^x + D(xe^x)) - 2(e^x + xe^x) \\
&= x(e^x + xe^x + e^x) - 2e^x - 2xe^x \\
&= x(xe^x + 2e^x) - 2e^x - 2xe^x \\
&= x^2e^x + 2xe^x - 2e^x - 2xe^x \\
&= x^2e^x - 2e^x \\
&= (x^2 - 2)e^x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(TL)e^x &= \left[(D+x)(xD-2)\right]e^x \\
&= (D+x)(xDe^x - 2e^x) \\
&= (D+x)(xe^x - 2e^x) \\
&= D(xe^x - 2e^x) + x(xe^x - 2e^x) \\
&= Dxe^x - D2e^x + x^2e^x - 2xe^x \\
&= xe^x + e^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x \\
&= x^2e^x - e^x - xe^x
\end{aligned}$$

ดังนั้น จะเห็นว่า $(LT)e^x \neq (TL)e^x$

บทนิยาม 4.4 กำหนดให้ $L_1 : B \to C$ และ $L_2 : A \to B$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ให้ L_1 และ L_2 เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n $L_1 = L_2$ ก็ต่อเมื่อ $L_1(f) = L_2(f)$ ทุกฟังก์ชัน f ที่หาอนุพันธ์ได้จนถึงอันดับที่ n

ตัวอย่าง 4.2 กำหนดให้ $L_1 = (D+1)(D+2)$ และ $L_1 = D^2 + 3D + 2$ จงแสดงว่า $L_1(y) = L_2(y)$

วิธีทำ เนื่องจาก $y = y(x)$

จะได้ $L_1(y) = (D+1)(D+2)(y)$

$$
\begin{aligned}
L_1(y) &= (D+1)(Dy+2y) \\
&= D^2y + D(2y) + Dy + 2y \\
&= D^2y + 3Dy + 2y \\
&= (D^2 + 3D + 2)y \\
&= L_2(y)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $L_1(y) = L_2(y)$

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ $L_1 : B \to C$ และ $L_2 : A \to B$ โดยที่ A, B และ C เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริง ให้ L_1 และ L_2 เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$L_1L_2 = L_2L_1$$

ผลจากทฤษฎีบท 4.3 นั้นเราสามารถนำไปใช้ประโยชน์ได้เช่น

$$
\begin{aligned}
(D+4)(D+2)^2 &= (D+2)^2(D+4) \\
&= (D^2 + 4D + 4)(D+4) \\
&= D^3 + 8D^2 + 20D + 16
\end{aligned}
$$

หมายเหตุ 4.1

ถ้า L_1 และ L_2 เป็นตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่มีสัมประสิทธิ์ไม่ใช่ค่าคงตัวทั้งหมดแล้ว L_1L_2 และ L_2L_1 อาจจะไม่เท่ากัน

สมบัติบางประการของตัวดำเนินการที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัวจากการที่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับที่ n เช่น $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 5y = \sin x$ สามารถเขียนได้เป็น $(D^3 + 4D^2 - 4D + 5)y = \sin x$ หรือ $P(D)y = \sin x$ เมื่อ $P(D) = D^3 + 4D^2 - 4D + 5$

ดังนั้นการศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับตัวดำเนินการ D^n จะเป็นประโยชน์อย่างมากในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ (ดำรง ทิพย์โยธา. 2541 : 70-73)

ทฤษฎีบท 4.4 $D^n e^{mx} = m^n e^{mx}$ ทุกจำนวนเต็มบวก n และทุกค่าคงตัว m

ผลจากทฤษฎีบท 4.4 เราสามารถนำประโยชน์ไปใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3 จงหาค่าของ $(D^3 + 4D^2 + D - 4)e^{8x}$

วิธีทำ $(D^3 + 4D^2 + D - 4)e^{8x} = D^3 e^{8x} + 4D^2 e^{8x} + De^{8x} - 4e^{8x}$

$$= D^3 e^{8x} + 4D^2 e^{8x} + De^{8x} - 4e^{8x}$$
$$= 8^3 e^{8x} + 4(8^2)e^{8x} + 8e^{8x} - 4e^{8x}$$
$$= 778e^{8x}$$

ดังนั้น $L_1(y) = L_2(y)$

ทฤษฎีบท 4.5 ให้ m เป็นค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า $P(D)e^{mx} = e^{mx}P(m)$ เมื่อ $P(m) = a_0 m^n + a_1 m^{n-1} + \cdots + a_{n-1}m + a_n$

ผลจากทฤษฎีบท 4.5 เราสามารถนำประโยชน์ไปใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.4 จงหาค่าของ $(D^3 + 4D^2 + 4D + 5)e^x$ และ $(D^4 - D^2 + 3D + 10)e^{-2x}$

วิธีทำ กำหนดให้ $P(D) = D^3 + 4D^2 + 4D + 5$

ดังนั้น $P(D)e^x = (D^3 + 4D^2 + 4D + 5)e^x$

$$= (1^3 + 4(1)^2 + 4(1) + 5)e^x$$
$$= 14e^x$$

และให้ $P(D) = D^4 - D^2 + 3D + 10$

ดังนั้น $P(D)e^x = (D^4 - D^2 + 3D + 10)e^{-2x}$

$$= \left((-2)^4 - (-2)^2 + 3(-2) + 10\right)e^{-2x}$$
$$= 16e^x$$

ทฤษฎีบท 4.6 ให้ m เป็นค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกจะได้ว่า

$(D - m)^n(e^{mx}y) = e^{mx}D^n y$ และ $D^n(e^{mx}y) = e^{mx}(D + m)^n y$

เมื่อ $y = y(x)$ หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ n

และผลจากทฤษฎีบท 4.6 เราสามารถนำประโยชน์ไปใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.5 จงหาค่าของ $(D-5)^4(e^{5x}\sin x)$

$$\begin{aligned}(D-5)^4(e^{5x}\sin x) &= e^{5x}D^4(\sin x)\\ &= e^{5x}D^3(\cos x)\\ &= -e^{5x}D^2(\sin x)\\ &= -e^{5x}D(\cos x)\\ &= e^{5x}\sin x\end{aligned}$$

ดังนั้น $(D-5)^4(e^{5x}\sin x) = e^{5x}\sin x$

ตัวอย่าง 4.6 จงหาค่าของ $D^3(e^{2x}x^2)$

$$\begin{aligned}D^3(e^{2x}x^2) &= e^{3x}(D+2)^3x^2\\ &= e^{3x}(D^3+4D^2+8D+8)x^2\\ &= e^{3x}(D^3x^2+4D^2x^2+8Dx^2+8x^2)\\ &= e^{3x}(D^2(2x)+4D(2x)+8(2x)+8x^2)\\ &= e^{3x}(D(2)+4(2)+8(2x)+8x^2)\\ &= e^{3x}(8+16x+8x^2)\end{aligned}$$

ดังนั้น $D^3(e^{2x}x^2) = e^{3x}(8x^2+16x+8)x^2$

ตัวอย่าง 4.7 จงหาค่าของ $D^2(e^{3x}\cos x)$

$$\begin{aligned}D^2(e^{3x}\cos x) &= e^{3x}(D+3)^2\cos x\\ &= e^{3x}(D^2+6D+9)\cos x\\ &= e^{3x}(D^2\cos x+6D\cos x+9\cos x)\\ &= e^{3x}(-\cos x-6\sin x+9\cos x)\\ &= e^{3x}(8\cos x-6\sin x)\\ &= 2e^{3x}(4\cos x-3\sin x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $D^2(e^{3x}\cos x) = 2e^{3x}(4\cos x-3\sin x)$

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ m ค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $y=y(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ n แล้วจะได้ว่า

1. $e^{mx}P(D)y = P(D-m)(e^{mx}y)$
2. $P(D)e^{mx}y = e^{mx}P(D+m)y$
3. $(D-m)^n(x^ne^{mx}) = e^{mx}n!$

และผลจากทฤษฎี 4.7 เราสามารถนำประโยชน์ไปใช้ได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.8 จงหาค่าของ $(D^2+4D+5)(e^x\sin x)$

กำหนดให้ $P(D)=D^2+4D+5$

จะได้ $P(D)(e^x\sin x)=e^xP(D+1)(\sin x)$

$$
\begin{aligned}
&=(D^2+4D+5)(e^x\sin x)\\
&=e^x\left[(D+1)^2+4(D+1)+5)\right]\sin x\\
&=e^x(D^2+2D+1+4D+4+5)\sin x\\
&=e^x(D^2+6D+10)\sin x\\
&=e^x(D^2\sin x+6D\sin x+10\sin x)\\
&=e^x(-\sin x+6\cos x+10\sin x)\\
&=e^x(6\cos x+9\sin x)\\
&=3e^x(2\cos x+3\sin x)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(D)(e^x\sin x)=3e^x(2\cos x+3\sin x)$

ตัวอย่าง 4.9 จงหาค่าของ $(D^2+4D+6)x^2$

กำหนดให้ $P(D)=D^2+4D+6$

จะได้ $P(D)x^2=(D^2+4D+6)x^2$

$$
\begin{aligned}
&=(D^2+4D+6)x^2\\
&=D^2x^2+4Dx^2+6x^2\\
&=2!+8x+6x^2\\
&=2+8x+6x^2
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $(D^2+4D+6)x^2=2+8x+6x^2$

ตัวอย่าง 4.10 จงหาค่าของ $(D^2+1)x^3e^x$

กำหนดให้ $P(D)=D^2+1$

จะได้ $P(D)x^3e^x=e^x\left[P(D+1)\right]x^3$

$$
\begin{aligned}
&=e^x\left[(D+1)^2+1\right]x^3\\
&=e^x\left[(D^2+2D+1)+1\right]x^3\\
&=e^x(D^2+2D+2)x^3\\
&=e^x(D^2x^3+2Dx^3+2x^3)\\
&=e^x(6x+6x^2+2x^3)
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $P(D)x^3e^x=e^x(6x+6x^2+2x^3)$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์

สุวัฒน์ รอดผล (2548 : 49) ได้กล่าวว่า จากสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n คือ สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นที่มีอันดับสูงสุดของอนุพันธ์เป็นอันดับที่ n ซึ่งเขียนได้ในรูป

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

หรือ

$$P(D)y = f(x)$$

โดยที่ $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x หรือค่าคงตัวที่มีความต่อเนื่องบนช่วง I และ $a_0(x) \neq 0$ สำหรับการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นเอกพันธุ์และไม่เอกพันธุ์นั้นได้แสดงในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.5 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้น $P(D)y = f(x)$ เรียกว่า **สมการเอกพันธุ์** ถ้า $f(x) = 0$ และเรียกว่า **สมการไม่เอกพันธุ์** ถ้า $f(x) \neq 0$

ตัวอย่างเช่น

$(D^2 + 4xD + 6)y = 0$	เป็นสมการเอกพันธุ์
$D^2y + x^2Dy = 6y$	เป็นสมการเอกพันธุ์
$(D^3 + 4D - 2)y = 2x$	ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์
$D^2y + x^2Dy - 6xy - x = 0$	ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์

โดยทั่วไปจะพบว่า $y(x) = 0$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $P(D)y = 0$ ดังนั้นเรื่องที่เราสนใจจะศึกษาต่อไปคือการหาผลเฉลยไม่เป็นศูนย์ของสมการ $P(D)y = 0$ และผลเฉลยของสมการ $P(D)y = f(x)$ เมื่อ $f(x) \neq 0$ จากตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์จะเห็นได้ว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจมีหลายผลเฉลยได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้ (ดำรง ทิพย์โยธา. 2541 : 75)

ตัวอย่าง 4.11 พิจารณาสมการต่อไปนี้

$(D-1)y = 0$ มีหลายผลเฉยเช่น

$y = e^x$ เป็นผลเฉลยเพราะว่า $(D-1)e^x = De^x - e^x = 0$

$y = 2e^x$ เป็นผลเฉลยเพราะว่า $(D-1)2e^x = D2e^x - 2e^x = 0$

$y = -3e^x$ เป็นผลเฉลยเพราะว่า $(D-1)(-3e^x) = D(-3e^x) - 2(-3e^x) = 0$

ดังนั้น จะเห็นว่า $y = e^x, y = 2e^x, y = -3e^x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $(D-1)y = 0$

จากตัวอย่าง 4.11 ที่กล่าวมาจะเห็นว่า $P(D)y=0$ อาจมีผลเฉลยได้หลายผลเฉลยและถ้า $y=f_1(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$ แล้ว $y=kf_1(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$ นอกจากนั้น $y=f_1(x)\,, y=f_2(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$ แล้ว $y=f_1(x)+f_2(x)$ เป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$ สิ่งที่จะศึกษาต่อไปคือลักษณะของฟังก์ชันที่เป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$ (สุพัฒนา เอื้อทวีเกียรติ มนตรี สวัสดิ์ศฤงฆาร เทียนชัย ประดิสถายน และลัญฉกร วุฒิสิทธิกุลกิจ. 2558 : 147-148)

บทนิยาม 4.6 ให้ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนเซต I การรวมเชิงเส้น ของ $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$ หมายถึง $c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3+\cdots+c_nf_n$ เมื่อ $c_1, c_2, c_3, \ldots c_n$ เป็นค่าคงตัวที่นิยามบนเซต I โดย $(c_1f_1+c_2f_2+\cdots+c_nf_n)(x)=c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)$

ตัวอย่างเช่น

$f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^3$ และ $f(x)=4x+2x^3$

เพราะฉะนั้น f เป็นการรวมเชิงเส้นของ f_1, f_2

$f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=e^{-2x},\ f_3(x)=e^{5x}$ และ $f(x)=4e^x+5e^{-2x}-3e^{5x}$

เพราะฉะนั้น f เป็นการรวมเชิงเส้นของ f_1, f_2, f_3

บทนิยาม 4.7 ให้ $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ เป็นเซตของฟังก์ชันค่าจริงที่นิยามบนเซต I เรากล่าวได้ว่าเซต $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ เป็น เซตไม่อิสระเชิงเส้น บนเซต I ก็ต่อเมื่อมี $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงตัวที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันที่ทำให้ $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\cdots+c_nf_n(x)=0$ ทุก x ใน I ในกรณีที่ $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้น เรากล่าวว่าฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ตัวอย่างเช่น $f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=e^{2x},\ f_3(x)=4e^x-5e^{2x}$

เพราะว่า $-4f_1(x)+5f_2(x)+f_3(x)=-4e^x+5e^{2x}+4e^x-5e^{2x}=0$ ทุกจำนวนจริง x เพราะฉะนั้น f_1, f_2, f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

ทฤษฎีบท 4.8 ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n : I \to R$ โดยที่ I เป็นสับเซตของ R แล้ว $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต I ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันอย่างน้อยหนึ่งตัวเป็นการรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันที่เหลือ

ตัวอย่างเช่น $f_1(x)=e^x,\ f_2(x)=e^{2x},\ f_3(x)=4e^x-5e^{2x}$

เพราะว่า $f_3(x)=4f_1(x)-5f_2(x)$ ทุกจำนวนจริง x เพราะฉะนั้น f_1, f_2, f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น

บทนิยาม 4.8 ให้ $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ เป็น เซตอิสระเชิงเส้น บนเซต I ถ้า $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ ไม่เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต I

เพราะฉะนั้นจากคำจำกัดความของ $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ เป็นเซตไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต จะได้ว่า $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นเซตอิสระเชิงเส้นบนเซต I ก็ต่อเมื่อ $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$ ทุก x ใน I แล้ว $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 4.12 $f_1(x) = 2x^2 + 1,\ f_2(x) = 1 - 3x^2$ ทุกค่า $x \in R$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ c_1, c_2 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ ทุกจำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น $c_1(2x^2 + 1) + c_2(1 - 3x^2) = 0$

$$2c_1x^2 + c_1 + c_2 - 3c_2x^2 = 0$$

$$2c_1x^2 - 3c_2x^2 + c_1 + c_2 = 0$$

$$(2c_1 - 3c_2)x^2 + (c_1 + c_2) = 0$$

จะได้ว่า $(2c_1 - 3c_2) = 0$ และ $c_1 + c_2 = 0$ ผลที่ตามมาคือ $c_1 = c_2 = 0$

ดังนั้น f_1, f_2 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่าง 4.13 $f_1(x) = 2x + 3,\ f_2(x) = 4x - 5,\ f_3(x) = x + 8$ ทุกค่า $x \in R$ จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + c_3 f_3(x) = 0$ ทุกจำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น $c_1(2x + 3) + c_2(4x - 3) + c_3(x + 8) = 0$

$$2c_1x + 3c_1 + 4c_2x - 3c_2 + c_3x + 8c_3 = 0$$

$$2c_1x + 4c_2x + c_3x + 3c_1 - 3c_2 + 8c_3 = 0$$

$$(2c_1 + 4c_2 + c_3)x + (3c_1 - 3c_2 + 8c_3) = 0$$

จะได้ว่า $2c_1 + 4c_2 + c_3 = 0$ และ $3c_1 - 3c_2 + 8c_3 = 0$

มีผลเฉลยที่ไม่เป็นศูนย์คือ $c_1 = 1,\ c_2 = -\dfrac{13}{37}$ และ $c_3 = -\dfrac{126}{37}$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ข้อสังเกต 4.1

ค่า c_1, c_2 และ c_3 ในตัวอย่าง 4.12 ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันที่ทำให้ $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)=0$ มีได้หลายค่า เช่น $c_1=37,\ c_2=-13$ และ $c_3=-126$ หรือ $c_1=-37,\ c_2=13$ และ $c_3=126$

ตัวอย่าง 4.14 จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน

$$f_1(x)=x+e^x,\ f_2(x)=1-x+4e^x,\ f_3(x)=1+3x-2e^x \text{ ทุกค่า } x\in R$$

จงพิจารณาว่า f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

วิธีทำ ให้ c_1, c_2, c_3 เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+c_3f_3(x)=0$ ทุกจำนวนจริง x

เพราะฉะนั้น $c_1(x+e^x)+c_2(1-x+4e^x)+c_3(1+3x-2e^x)=0$

$$c_1x+c_1e^x+c_2-c_2x+4c_2e^x+c_3+3c_3x-2c_3e^x=0$$

$$4c_2+c_3+c_1x-c_2x+3c_3x+c_1e^x+4c_2e^x-2c_3e^x=0$$

$$(c_2+c_3)+(c_1x-c_2x+3c_3x)+(c_1e^x+4c_2e^x-2c_3e^x)=0$$

$$(c_2+c_3)+(c_1-c_2+3c_3)x+(c_1+4c_2-2c_3)e^x=0$$

จะได้ว่า

$$c_2+c_3=0$$

$$c_1-c_2+3c_3=0$$

$$c_1+4c_2-2c_3=0$$

เป็นระบบสมการเชิงเส้น 3 ตัวแปร 3 สมการ ที่ $AX=0$

ถ้า $\det(A)\neq 0$ แล้วระบบสมการ $AX=0$ มีผลเฉลยที่เป็นศูนย์เพียงอย่างเดียวเท่านั้น

เพราะว่า $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$

และ $\det\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 4 & -2\end{pmatrix}=10\neq 0$

เพราะฉะนั้น $c_1=c_2=c_3=0$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 อิสระเชิงเส้นบนเซตของจำนวนจริง

ข้องสังเกต 4.2

ในการพิจารณาว่าฟังก์ชันเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่นั้นขึ้นอยู่กับโดเมนของฟังก์ชันด้วย

ตัวอย่างเช่น $f_1(x) = x,\ f_2(x) = \left|x\right|$ เมื่อ $x \in [0,\infty)$

เพราะว่าโดเมนในการพิจารณาของ f_1 และ f_2 คือ $x \in [0,\infty)$ จะได้ว่า $\left|x\right| = x$

เพราะฉะนั้น $(1)f_1(x) + (-1)f_2(x) = 1x + (-1)x = x - x = 0$ ทุกค่า $x \in [0,\infty)$

ดังนั้น f_1 และ f_2 ไม่เป็นอิสระเชิงเส้น เบนเซต $[0,\infty)$

ต่อไปพิจารณาฟังก์ชัน $f_1(x) = x,\ f_2(x) = \left|x\right|$ และกำหนดโดเมนเป็นเมื่อ

$x \in (-\infty,\infty)$

สมมุติมี c_1 และ c_1 ที่ทำให้ $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = c_1 x + c_2 \left|x\right|$

ทุกค่า $x \in (-\infty,\infty)$

แทนค่า $x = 1$ จะได้ $c_1 + c_2$

แทนค่า $x = -1$ จะได้ $c_1 - c_2$

เพราะฉะนั้น $c_1 = c_2 = 0$

ดังนั้น f_1 และ f_2 เป็นอิสระเชิงเส้น เบนเซต $(-\infty,\infty)$

จากตัวอย่าง ที่ผ่านมาจะเห็นได้ว่าการพิจารณาว่า $f_1, f_2, ..., f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่ต้องใช้การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น ต่อไปเราจะหาแนวทางในการพิจารณาว่า $f_1, f_2, ..., f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่โดยใช้ รอนสเกียน (สุวัฒน์ รอดผล. 2548 : 54)

บทนิยาม 4.9

ให้ $f_1, f_2, ..., f_n$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n-1$ บนเซต I กำหนด

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & \cdots & f_n''(x) \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

เรียกว่า **รอนสเกียน** ของ $f_1, f_2, ..., f_n$ ณ จุด x ใช้สัญลักษณ์

$$W(x : f_1, f_2, ..., f_n)$$

หรือ

$$W(x)$$

ตัวอย่าง 4.15 จงหารอนสเกียนของ f_1, f_2, f_3 เมื่อ $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = 1 + x,\ f_3(x) = e^x$ $x \in (-\infty, \infty)$

วิธีทำ $$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x^2 & 1 + x & e^x \\ 2x & 1 & e^x \\ 2 & 0 & e^x \end{vmatrix}$$

$$= -x^2 e^x$$

ดังนั้น $W(x : f_1, f_2, f_3) = -x^2 e^x$

ตัวอย่าง 4.16 จงหารอนสเกียนของ $f_1(x) = 4 + 3x,\ f_2(x) = 3x - 5,\ f_3(x) = -4 + 7x$ $x \in (-\infty, \infty)$

วิธีทำ $$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 4 + 3x & 3x - 5 & -4 + 7x \\ 3 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0$$

ดังนั้น $W(x : f_1, f_2, f_3) = 0$

วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิต (2541 : 120) ได้กล่าวว่า การตรวจสอบ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่โดยการใช้รอนสเกียนโดยใช้ผลของทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.9 ให้ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับ $n - 1$ บนเซต I ถ้า $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นแล้ว $W(x : f_1, f_2, f_3) = 0$ ทุก x ใน I

โดยทั่วไปสิ่งที่เราต้องการคือฟังก์ชัน $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นอิสระหรือไม่อิสระเชิงเส้นบนเซต I ดังนั้นเราจะใช้ข้อความจริงที่สมมูลกับ

"ถ้า $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ไม่เป็นอิสระเชิงเส้นแล้ว $W(x : f_1, f_2, f_3) = 0$ ทุก x ใน I "

คือ "ถ้ามี x บางตัวใน I ที่ $W(x : f_1, f_2, f_3) \neq 0$ แล้ว $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นอิสระเชิงบน I "

ตัวอย่าง 4.17 $f_1(x) = e^x,\ f_2(x) = \sin x,\ f_3(x) = \cos 2x$ สำหรับ $x \in (-\infty, \infty)$

วิธีทำ $$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} e^x & \sin x & \cos 2x \\ e^x & \cos x & -2\sin 2x \\ e^x & -\sin x & -4\cos 2x \end{vmatrix}$$

เมื่อให้ $x = 0$

จะได้ว่า

$$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -4 - 1$$

$$= -5$$

$$\neq 0$$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นบนเซต $(-\infty, \infty)$

ตัวอย่าง 4.18 $f_1(x) = x,\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = e^{2x}$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$

วิธีทำ $$W(x : f_1, f_2, f_3) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & f_3'(x) \\ f_1''(x) & f_2''(x) & f_3''(x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x & e^x & e^{2x} \\ 1 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= x\begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix}$$

$$= x(4e^{3x} - 2e^{3x}) - (4e^{3x} - e^{3x})$$

$$= 2xe^{3x} - 3e^{3x}$$

$$= (2x - 3)e^{3x}$$

$$\neq 0$$

ดังนั้น f_1, f_2, f_3 เป็นอิสระเชิงเส้นบน $x \in \mathbb{R}$

ทฤษฎีการมีผลเฉลยและการมีผลเฉลยเดียวเท่านั้น

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

หรือ

$$P(D)y=f(x)$$

ถ้า $a_0(x),a_1(x),...,a_n(x)$ และ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง I และ $a_0(x)\neq 0$ สำหรับทุก x ใน I (ดำรง ทิพย์โยธา. 2541 : 84-85) ได้กล่าวถึงทฤษฎีบทและนิยามที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.10 ถ้า x_0 เป็นสมาชิกตัวหนึ่งใน I และ $y_0,y_1,y_2...,y_{n-1}$ เป็นค่าคงตัวจะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n $P(D)y=f(x)$ จะมีผลเฉลย $y=y(x)$ ที่นิยามบนเซต I เพียงผลเฉลยเดียวเท่านั้นที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_1,\ y''(x_0)=y_2,...,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1}$$

ตัวอย่าง 4.19 จงหาผลเฉลยของสมการ $(D^2-3D+2)y=0$ เมื่อ $y(0)=1$ และ $y'(0)=4$

วิธีทำ เพราะว่า $(D^2-3D+2)(c_1e^x+c_2e^{2x})=0$

เพราะฉะนั้น $y=c_1e^x+c_2e^{2x}$ และ $y'=c_1e^x+2c_2e^{2x}$

เนื่องจาก $y(0)=1$ และ $y'(0)=4$

ได้ $c_1+c_2=0$ และ $c_1+2c_2=4$

ทำให้ได้ว่า $c_1=-2$ และ $c_2=3$

สรุปโดยทฤษฎีบท 4.10 $y=-2e^x+3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยเดียวเท่านั้น

ที่ทำให้ $(D^2-3D+2)y=0$ เมื่อ $y(0)=1$ และ $y'(0)=4$

สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n , $P(D)y=0$

จากผลของทฤษฎีบท 4.10 จะได้ว่า

ต้องมีผลเฉลย $u_1(x)$ ที่ทำให้ $u_1(x_0)=1,\ u_1'(x_0)=u_1''(x_0)=...=u_1^{(n-1)}(x_0)=0$

ต้องมีผลเฉลย $u_2(x)$ ที่ทำให้

$$u_2(x_0)=0,\ u_2'(x_0)=0,\ u_2''(x_0)=...=u_2^{(n-1)}(x_0)=0$$

หรือ $u_r^{(r-1)}(x_0)=1$

และ $u_r^{(r)}(x_0)=u_r^{(r+1)}(x_0)=...=u_r^{(n-1)}(x_0)=0$

ผลเฉลย $u_1(x),u_2(x),...,u_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้นมีผลทำให้

$$W(x_0,u_1,u_2,...,u_n)=\begin{vmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ . & . & ... & .\\ . & . & ... & .\\ 0 & 0 & ... & 1\end{vmatrix}$$
$$=1$$
$$\neq 0$$

เพราะฉะนั้น $u_1(x),u_2(x),...,u_n(x)$ เป็นอิสระเชิงเส้น

ดังนั้น สรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นอันดับ n, $P(D)y=0$ ต้องมีเซตมูลฐานของผลเฉลยเสมอ

บทนิยาม 4.10 กำหนดให้ $P(D)$ เป็นตัวดำเนินการ **เซตมูลฐานของผลเฉลย** ของสมการ $P(D)y=0$ หมายถึงเซตของผลเฉลย $u_1,u_2,...,u_n$ ที่เป็นอิสระเชิงเส้นและเป็นผลเฉลยของ $P(D)y=0$

ตัวอย่าง 4.20 สมการ $(D^2+1)y=0$

เลือกให้ $u_1(x)=\sin x$ และ $u_2(x)=\cos x$ จะได้ว่า

$\{\sin x, \cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

เลือกให้ $u_1(x)=4\sin x$ และ $u_2(x)=-2\cos x$ จะได้ว่า

$\{4\sin x, -2\cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

เลือกให้ $u_1(x)=\sin x+\cos x$ และ $u_2(x)=\sin x-\cos x$ จะได้ว่า

$\{\sin x+\cos x, \sin x-\cos x\}$ เป็นเซตมูลฐานของผลเฉลย

ดังนั้น จากตัวอย่างจะเห็นว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $P(D)y=0$ มีเซตมูลฐานของผลเฉลยได้หลายเซต

บทแทรก 4.1 ถ้า $F(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $P(D)y=0$ เมื่อ

$$P(D)=a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)$$

โดยที่ $a_0(x),a_1(x),...,a_{n-1}(x),a_n(x)$

มีความต่อเนื่องบนเซต I และ $F(x)$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$F(x_0)=F'(x_0)=F''(x_0)=...=F^{(n)}(x_0)=0$$

แล้ว $F(x)=0$ ทุกค่า x ใน I

ผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญเชิงเส้นไม่เอกพันธุ์

กำหนดให้ $P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$ เมื่อ $a_0(x), a_1(x), ..., a_{n-1}(x), a_n(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x ที่นิยามบนเซต I (ศิริพร พัสดร. 2552 : 151) ได้กล่าวถึงนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องดังต่อไปนี้

บทนิยาม 4.11 สมการ $P(D)y = 0$ เรียกว่า**สมการเอกพันธุ์สัมพัทธ์** หรือ**สมการลดรูป**ของสมการ

$$P(D)y = f(x)$$

ตัวอย่างเช่น สมการ $(D^2 - 3D + 2)y = \sin x$ มี $(D^2 - 3D + 2)y = 0$ เป็นสมการลดรูป

ทฤษฎีบท 4.11 ถ้า $y = u(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$ บนเซต I และ $y = v(x)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการลดรูป $P(D)y = 0$ บนเซต I แล้วผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$ คือ $y = u(x) + v(x)$

บทนิยาม 4.12 ผลเฉลยทั่วไปของสมการลดรูป $P(D)y = 0$ เรียกว่า **ผลเฉลยเติมเต็ม** ของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$ ใช้สัญลักษณ์ y_c ผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$ เรียกว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** ใช้สัญลักษณ์ y_p

จากทฤษฎีบท 4.11 และนิยาม 4.11 นั้นผลเฉลยทั่วไปของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f(x)$ คือ $y = y_c + y_p$ (ดำรง ทิพย์โยธา, 2541 : 91)

ตัวอย่าง 4.21 สมการ $y'' - 2y' - 4y = 16x$

มีผลเฉลยเติมเต็ม $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{4x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

และมีผลเฉลยเฉพาะ $y_p = 3 - 4x$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปคือ $y = c_1e^{-x} + c_2e^{4x} + 3 - 4x$

ทฤษฎีบท 4.12 ถ้า $u_i(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = f_i(x), i = 1,2,...,m$ โดยที่ $P(D) = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)$ บนเซต I แล้ว $y = k_1u_1(x) + k_2u_2(x) + \cdots + k_mu_m(x)$ เป็นผลเฉลยของสมการไม่เอกพันธุ์ $P(D)y = k_1f_1(x) + k_2f_2(x) + \cdots + k_mf_m(x)$ บนเซต I ทุกค่าคงตัว $k_1, k_2, ..., k_m$

ตัวอย่างเช่น การหาผลเฉลยเฉพาะของ $(D^2+4)y=5e^x-4x^2$ เราอาจทำได้ดังนี้

เพราะว่าผลเฉลยเฉพาะของ $(D^2+4)y=e^x$ คือ $y_p=\frac{1}{5}e^x$

และผลเฉลยเฉพาะของ $(D^2+4)y=x^2$ คือ $y_p=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}x^2$

เพราะฉะนั้นผลเฉลยเฉพาะของ $(D^2+4)y=5e^x-4x^2$

คือ $y_p=5\left(\frac{1}{5}e^x\right)-4\left(-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}x^2\right)=e^x+\frac{1}{2}-x^2$

สรุปท้ายบท

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

สามารถเขียนได้เป็น $P(D)y=f(x)$

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับ n

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

ถ้าใช้สัญลักษณ์ D แทนสัญลักษณ์ $\frac{d}{dx}$ จะได้

$$\left(a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)\right)y=f(x)$$

หรือ $P(D)y=f(x)$

เมื่อ $P(D)=a_0(x)D^n+a_1(x)D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(x)D+a_n(x)$

ถ้า $f(x)=0$ จะเรียกว่า**สมการเอกพันธุ์** และถ้า $f(x)\neq 0$ จะเรียกว่า **สมการไม่เอกพันธุ์** สำหรับการหาผลเฉลยต้องศึกษาคุณสมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับตัวดำเนินการ D^n ซึ่งจะเป็นประโยชน์อย่างมากในการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ถ้า m ค่าคงตัวและ n เป็นจำนวนเต็มบวกและ $y=y(x)$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ถึงอันดับที่ n แล้วจะได้ว่า

1. $e^{mx}P(D)y=P(D-m)(e^{mx}y)$
2. $P(D)e^{mx}y=e^{mx}P(D+m)y$
3. $(D-m)^n(x^ne^{mx})=e^{mx}n!$

ถ้า $y(x)=0$ เป็นผลเฉลยของสมการเอกพันธุ์ $P(D)y=0$ ดังนั้นการหาผลเฉลยไม่เป็นศูนย์ของสามการ $P(D)y=0$ และผลเฉลยของสมการ $P(D)y=f(x)$ เมื่อ $f(x)\neq 0$ จะพบว่าผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์นั้นอาจมีหลายผลเฉลยได้ และการรวมเชิงเส้นของผลเฉลยนั้นก็ยังเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้อีกด้วยถ้าเซตของผลเฉลยทั้งหมดเป็นอิสระเชิงเส้นกัน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 4

1. จงหาตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ $P(D)$ ของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $y' - 2y = 0$ 1.2 $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 5y = \sin x$

   1.3 $y''' - y' = 6y - x^2$ 1.4 $x^2 y^{(5)} - y'' - y = x^3$

2. จงพิจารณาตัวดำเนินการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นตัวดำเนินการตัวเดียวกันหรือไม่

   2.1 $(xD)^2, x^2D^2$ 2.2 $D^2 - x^2, (D+x)(D-x)$

   2.3 $D^2 + 2xD + x^2, (D+x)^2$ 2.4 $D^2 - 1, (D-1)(D+1)$

3. กำหนดให้ $P(D) = D^2 + 2D - 1$ จงหาค่าของ

   3.1 $P(D)x^3e^x$ 3.2 $P(D)e^{2x}$ 3.3 $P(D)\sin x$

4. จงแสดงว่า $\sin x$ และ $\cos x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + y = 0$

5. จงแสดงว่า e^x, xe^x และ x^2e^x เป็นผลเฉลยของสมการ $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

6. กำหนดให้ $f_1(x) = 4, f_2(x) = 2 + x^3, f_3(x) = 3 + x^4$ จงหา $W(x : f_1, f_2, f_3)$

7. กำหนดให้ $f_1(x) = e^x, f_2(x) = 2e^x, f_3(x) = -3e^{4x}$ จงหา $W(x : f_1, f_2, f_3)$

8. กำหนดให้ $f_1(x) = 1 + 2x, f_2(x) = 2 + 3x, f_3(x) = 3 + 4x$ จงหา c_1, c_2, c_3 ที่ทำให้ $c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 = 0$

9. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ในแต่ละข้อเป็นอิสระเชิงเส้นหรือไม่

   9.1 $f_1(x) = \sin x, f_2(x) = \sin 2x, f_3(x) = \sin 3x$ $x \in (-\infty, \infty)$

   9.2 $f_1(x) = x^2, f_2(x) = |x|$ $x \in [0, \infty)$

   9.3 $f_1(x) = x^3, f_2(x) = x^2|x|$ $x \in (-\infty, \infty)$

10. จงแสดงว่า $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + 2x + 3$ เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง เป็นผลเฉลยของสมการ $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 4 - 12x$

เอกสารอ้างอิง

ดำรง ทิพย์โยธา. (2541). **การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เล่ม 1.** กรุงเทพมหานคร : สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ธีระศักดิ์ อุรัจนานนท์. (2549). **สมการเชิงอนุพันธ์.** ปทุมธานี พิมพ์ครั้งที่ 1 : สำนักพิมพ์สกายบุ๊กส์.

วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. (2541). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพมหานคร : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ศิริพร พัสดร. (2552). **สมการเชิงอนุพันธ์** อุดรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี.

สุพัฒนา เอื้อทวีเกียรติ มนตรี สวัสดิ์ศฤงฆาร เทียนชัย ประดิสถายน และลัญฉกร วุฒิสิทธิกุลกิจ. (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** พิมพ์ครั้งที่ 2. กรงเทพ ฯ : แอคทีฟ พริ้น จำกัด.

สุวัฒน์ รอดผล. (2548). **สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับวิศวกร.** กรุงเทพมหานคร : สมาคมส่งเสริมเทคโนโลยี (ไทย ญี่ปุ่น) ส.ส.ท.