แผนบริหารการสอนประจำบท

บทที่ 3 การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

เนื้อหาประจำบท

1. ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก
2. ปัญหาทางกลศาสตร์
3. ปัญหาการเปลี่ยนแปลงของปริมาณ
    3.1 ปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี
    3.2 ปัญหาการเพิ่มประชากร
    3.3 ปัญหาของผสม
    3.4 ปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนศึกษาบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายและใช้สมการเชิงอนุพันธ์แก้ปัญหาเกี่ยวกับแนววิถีเชิงตั้งฉากได้
2. อธิบายและใช้สมการเชิงอนุพันธ์แก้ปัญหาทางกลศาสตร์ได้
3. อธิบายและใช้สมการเชิงอนุพันธ์แก้ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงของปริมาณได้
4. อธิบายและใช้สมการเชิงอนุพันธ์แก้ปัญหาเกี่ยวกับการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีได้
5. อธิบายและใช้สมการเชิงอนุพันธ์แก้ปัญหาเกี่ยวกับการเพิ่มประชากรได้
6. อธิบายและใช้สมการเชิงอนุพันธ์แก้ปัญหาเกี่ยวกับของผสมได้
7. อธิบายและใช้สมการเชิงอนุพันธ์แก้ปัญหาเกี่ยวกับการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุได้

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายถึงทฤษฎีบท บทนิยาม และวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับแนววิถีเชิงตั้งฉาก ปัญหาทางกลศาสตร์ การเปลี่ยนแปลงของปริมาณ การสลายตัวของสารกัมมันตรังสี การเพิ่มประชากร ของผสม และการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ มีการตั้งคำถาม ตอบคำถามระหว่างผู้สอนและผู้เรียน
2. แสดงตัวอย่างการแก้ปัญหาโดยใช้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง
3. ให้ผู้เรียนทำใบกิจกรรม
4. สืบค้นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ทางอินเทอร์เน็ตเพิ่มเติม
5. อภิปราย สรุปประเด็นสำคัญที่เกี่ยวกับการประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่ง

6. สรุป และซักถามความเข้าใจท้ายบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เครื่องคอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต
2. เพาเวอร์พอยต์ เรื่องการประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง
3. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์
4. โปรแกรม Wolfram Alpha
5. ใบกิจกรรม

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายโต้ตอบ ซักถาม และการแสดงความคิดเห็น
3. สังเกตพฤติกรรมความกระตือรือร้นในการร่วมกิจกรรมและคุณภาพของงานที่มอบหมาย
4. ผลจากการลงมือปฏิบัติด้วยโปรแกรม Wolfram Alpha
5. ตรวจใบกิจกรรม
6. ตรวจแบบฝึกหัด
7. ประเมินจากแบบทดสอบ

บทที่ 3
การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง

ในบทที่ผ่านมานั้นเราได้ศึกษาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งแบบต่าง ๆ ไปแล้ว สำหรับในบทนี้ จะกล่าวถึงกับการประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งกับบางปัญหา เช่น ปัญหาแนววิธีเชิงตั้งฉาก ปัญหาทางกลศาสตร์ ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาณที่สนใจ ปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี ปัญหาการเพิ่มประชากร ปัญหาของผสม และปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ ซึ่งปัญหาต่าง ๆ ข้างต้น สามารถนำมาสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง และเมื่อเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหาได้อย่างถูกต้อง คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์นั้น สามารถนำไปใช้ในการอธิบายตัวแปรหรือปริมาณที่เราสนใจได้อย่างถูกต้องและแม่นยำ

ปัญหาแนววิถีเชิงตั้งฉาก

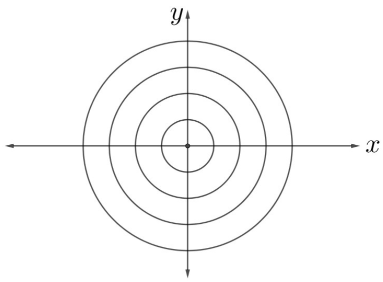
วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์ (2541 : 85) ได้กล่าวว่า การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง เป็นการนำปัญหาต่าง ๆ มาสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ๆ ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ปัญหาวิถีเชิงตั้งฉาก (Orthogonal Trajectories) ของวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัวและ $F(x,y,c)=0$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว ในระนาบ xy โดยที่ c เป็นพารามิเตอร์ หาอนุพันธ์ของสมการเทียบกับตัวแปร x แล้วจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งคือ $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ นั่นคือ เส้นโค้งแต่ละเส้นของวงศ์เส้นโค้ง ที่จุด (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ $f(x,y)$ และความชันของแนววิถีเชิงตั้งฉาก ที่จุด (x,y) ใด ๆ เท่ากับ $-\dfrac{1}{f(x,y)}$ จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{f(x,y)}$

เป็นที่ทราบกันแล้วว่าสมการหนึ่งสมการของสองตัวแปรที่มีพารามิเตอร์จะแทนเส้นโค้งหลาย ๆ เส้นซึ่งเส้นโค้งเส้นหนึ่งจะเกิดจากการกำหนดค่าหนึ่งให้กับพารามิเตอร์ เราเรียกเส้นโค้งเหล่านี้ว่า วงศ์เส้นโค้ง

กำหนดสมการ

$$x^2+y^2=c^2$$

เป็นสมการของกลุ่มวงกลมซึ่งวงกลมแต่ละวงนี้มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0,0)$

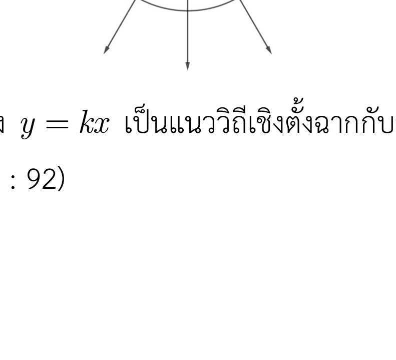


ภาพประกอบที่ 3.1 วงศ์เส้นโค้งของสมการ $x^2 + y^2 = c^2$
ที่มา : John A. Tierney (1979 : 42)

บทนิยาม 3.1 แต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งหนึ่ง ตัดกับแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้งอีกชุดหนึ่งเป็นมุมฉากแล้วเรากล่าวว่า วงศ์เส้นโค้งทั้งสองเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. 2541 : 85)

ให้ $F(x,y,c)=0$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว ในระนาบ xy โดนที่ c เป็นพารามิเตอร์ เรากล่าวว่าชุดเส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว $G(x,y,k)=0$ โดยที่ k เป็นพารามิเตอร์แนววิถีเชิงตั้งฉากกับวงศ์เส้นโค้ง $F(x,y,c)=0$ ถ้าแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง $G(x,y,k)=0$ ตัดกับทุกเส้นของวงศ์เส้น $F(x,y,c)=0$ เป็นมุมฉาก และจะกล่าวว่าวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว $G(x,y,k)=0$ เป็นแนววิธีเฉียงกับวงศ์เส้นโค้ง $F(x,y,c)=0$ ถ้าแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง $G(x,y,k)=0$ ตัดกับทุกเส้นโค้งของชุดเส้นโค้ง $F(x,y,c)=0$ เป็นมุม α โดย $\alpha \neq 90^\circ$

ตัวอย่าง เช่นวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$ ซึ่งเป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและรัศมีเท่ากับ c เห็นได้ว่าแต่ละเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิดซึ่งกำหนดโดยสมการ $y = kx$ จะเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$ และในทางกลับกันแต่ละวงกลมของวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$ ก็เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = kx$ นั่นคือวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$ และ วงศ์เส้นโค้ง $y = kx$ ต่างก็เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉาก ซึ่งกันและกัน ดังภาพประกอบที่ 3.2



ภาพประกอบที่ 3.2 วงศ์เส้นโค้ง $y = kx$ เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากกับวงศ์เส้นโค้ง $x^2 + y^2 = c^2$
ที่มา : John A. Tierney (1979 : 92)

ในทางฟิสิกส์นั้นมีปรากฏการณ์เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉาก เช่น ชุดเส้นแรงของสนามแม่เหล็ก และชุดเส้นโค้งศักย์เท่ากัน ในสนามแม่เหล็กเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน หรือชุดเส้นแรงไฟฟ้า และชุดเส้นโค้งศักย์เท่ากันในสนามไฟฟ้า เป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน หรือในเรื่องความร้อน ชุดเส้นโค้งอุณหภูมิเท่ากัน กับชุดเส้นทางการไหลความร้อนเป็นแนววิถีเชิงตั้งฉากซึ่งกันและกัน

เรากล่าวว่าชุดเส้นโค้งเป็นแนววิธีเชิงตั้งฉากในตัวถ้าแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งเป็นวงศ์เดียวกันเช่นวงศ์เส้นโค้ง $y^2 = 2cx + c^2$ ต่อไปนี้จะศึกษาการหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัวดังวิธีการต่อไปนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน. 2558 : 73-77)

การหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว

กำหนดวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว $F(x,y,c)=0$ เริ่มต้นหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งโดยการหาอนุพันธ์สมการ $F(x,y,c)=0$ เทียบกับ x แล้วกำจัดพารามิเตอร์ c ให้หมดไปจะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง $F(x,y,c)=0$ คือ $\dfrac{dy}{dx} = f(x,y)$

นั่นคือ เส้นโค้งแต่ละเส้นของวงศ์เส้นโค้ง $F(x,y,c)=0$ ที่จุด (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ $f(x,y)$ และเนื่องจากแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $F(x,y,c)=0$ ตัดกับแต่ละเส้นโค้งของวงศ์เส้นโค้ง (2) เป็นมุมฉากดังนั้นความชันของแนววิถีเชิงตั้งฉาก ที่จุด (x,y) ใด ๆ เท่ากับ $-\dfrac{1}{f(x,y)}$ จะได้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{f(x,y)}$ ทำการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{f(x,y)}$ จะได้วงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว $G(x,y,k)=0$

ตัวอย่าง 3.1 จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = cx^2$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

วิธีทำ ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง $y = cx^2$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ $y = cx^2$ ได้

$$\frac{dy}{dx} = 2cx$$

จากสมการ $y = cx^2$ และสมการ $\dfrac{dy}{dx} = 2cx$ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

จัดสมการ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{2y}$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

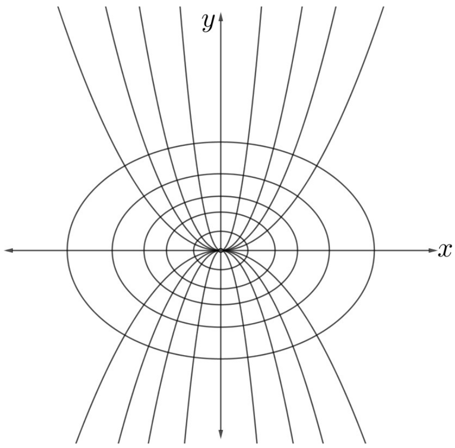
$$2ydy = -xdx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้จะได้ชุดเส้นโค้ง

$y^2 = -\dfrac{x^2}{2} + k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว หรือ

$$2y^2 + x^2 = k$$

ดังนั้น แนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = cx^2$ คือ $2y^2 + x^2 = k$



ภาพประกอบที่ 3.3 แนววิถีเชิงตั้งฉากกับวงศ์เส้นโค้ง $y = cx^2$

ที่มา : สำเริง ชื่นรังสิกุล (2555 : 84)

ตัวอย่าง 3.2 จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

วิธีทำ ทำการหาสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$

โดยการหาอนุพันธ์เทียบกับ x ทั้งสองข้างของสมการ $y = ce^x$ ได้ $\dfrac{dy}{dx} = ce^x$

จากสมการ $y = ce^x$ และสมการ $\dfrac{dy}{dx} = ce^x$ จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = y$

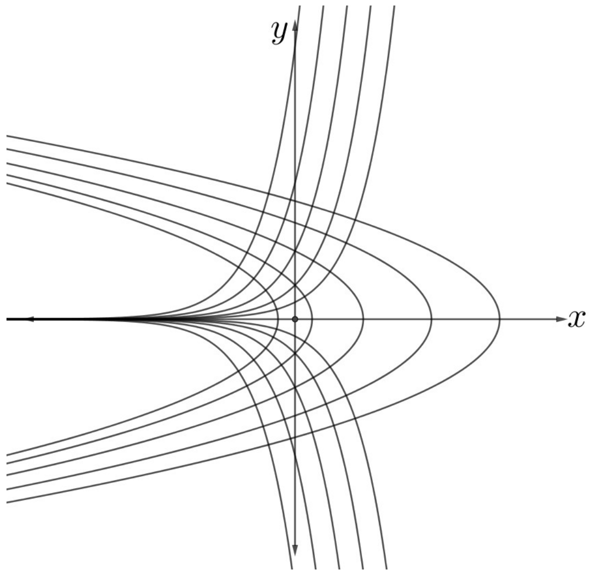
ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{y}$

จัดสมการ $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{y}$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ $ydy = -dx$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้จะได้ชุดเส้นโค้ง $\dfrac{y^2}{2} = -x + k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว หรือ

$$y^2 + 2x = k$$

ดังนั้น แนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$ คือ $y^2 + 2x = k$



ภาพประกอบที่ 3.4 แนววิถีเชิงตั้งฉากกับวงศ์เส้นโค้ง $y = ce^x$
ที่มา : วชิรารักษ์ โอรสรัมย์ (2558 : 90)

ปัญหาทางกลศาสตร์

สุรัตนา สังข์หนุน (2558 : 79) ได้กล่าวว่า สำหรับในหัวข้อนี้ เป็นการนำความรู้ของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางกลศาสตร์ (Problems on Mechanics) ในที่นี้เราจะกล่าวเฉพาะปัญหาทางกลศาสตร์พื้นฐานที่ใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันได้ ซึ่งกล่าวว่า

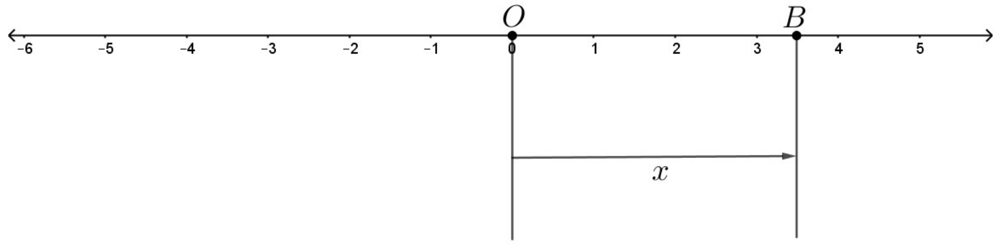
1. วัตถุต่าง ๆ จะคงสภาพหยุดยิ่งหรือเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ เว้นแต่จะมีแรงภายนอกมากระทำ
2. อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น และมีทิศทางเดียวกับทิศทางของแรงนั้น
3. แรงกริยา และแรงปฏิกิริยา มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้าม

ก่อนที่จะประยุกต์สมการเชิงอนุพันธ์ในการแก้ปัญหากลศาสตร์ จะขอทบทวนหลักการเบื้องต้นทางกลศาสตร์ ดังนี้

นิยาม 3.1 โมเมนตัมของวัตถุ คือ ผลคูณของมวลวัตถุกับความเร็ววัตถุ
(วชิรารักษ์ โอรสรัมย์. 2558 : 91)

ต่อไปจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุ B บนเส้นตรง L เลือกจุด ๆ หนึ่งบนเส้นตรง L เป็นจุดกำเนิดเรียกว่าจุด O พร้อมกำหนดทิศทางการเคลื่อนที่ทิศทางหนึ่งเป็นบวกและกำหนดหน่วย

ระยะทางด้วย แล้วจะได้ว่าพิกัด x ของตำแหน่ง B จากจุดกำเนิดจะบอกให้ทราบถึงระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ B ดังภาพประกอบที่ 3.5



ภาพประกอบที่ 3.5 ระยะทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ B
ที่มา : วชิรารักษ์ โอรสรัมย์ (2558 : 91)

ความเร็วของ B คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ x ดังนี้

$$v = \frac{dx}{dt}$$

ความเร่งชั่วขณะของ B คืออัตราการเปลี่ยนแปลงของ v

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

สังเกตว่า x, v และ a เป็นปริมาณเวกเตอร์ แรงทั้งหมดระยะทางการเคลื่อนที่ ความเร็วและความเร่งในทิศทางบวกบน L จะมีค่าเป็นบวกและค่าเหล่านี้จะมีค่าเป็นลบในทิศทางลบบน L จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการทางคณิตศาสตร์ได้

$$\frac{d}{dx}(mv) = KF$$

โดยที่ m แทนมวลของวัตถุ
v แทนความเร็วของวัตถุ
F แทนแรงที่มากระทำกับวัตถุ
K แทนค่าคงที่ของการแปรผัน

ในกรณีที่มวลของวัตถุเป็นค่าคงที่ เราสามารถจัดสมการ $v = \frac{dx}{dt}$ ได้เป็น

$$m\frac{dv}{dx} = KF$$

จากสมการ $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ และ $m\frac{dv}{dx} = KF$ ได้

$$a = K\frac{F}{m}$$ หรือ

$F = kma$

โดยที่ $k = \dfrac{1}{K}$ จะพบว่าค่าคงตัว k ขึ้นอยู่กับหน่วยของมวล แรงและความเร่งในระบบที่เลือกใช้ สำหรับ $k = 1$ สมการ $\dfrac{d}{dx}(mv) = KF$ จะเขียนอยู่ในรูป

$F = ma$

มีหลายระบบที่ค่า $k = 1$ ในที่นี้จะพิจารณา ระบบหน่วยเพียง 3 ระบบคือ

1. The British Gravitational System (British)
2. The Centimater-gram-second System (cgs)
3. The Meter-kilogram-second System (mks)

ทั้งสามระบบนี้แสดงได้ดังตารางต่อไปนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน, 2558 : 80)

ตาราง 3.1 ระบบหน่วย British System, cgs System และ mks System

	British system	**cgs system**	**mks system**
แรง	ปอนด์	ไดน์	นิวตัน
มวล	สลัก	กรัม	กิโลกรัมย
ระยะทาง	ฟุต	เซนติเมตร	เมตร
เวลา	วินาที	วินาที	วินาที
ความเร็ว	ฟุตต่อวินาที	เซนติเมตรต่อวินาที	เมตรต่อวินาที
ความเร่ง	ฟุตต่อวินาที ^{2}	เซนติเมตรต่อวินาที ^{2}	เมตรต่อวินาที ^{2}

ที่มา : วชิรารักษ์ โอรสรัมย์ (2558 : 93)

เนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อวัตถุคือ น้ำหนักของวัตถุนั้น ดังนั้นน้ำหนักจึงมีหน่วยวัดตามหน่วยของแรง คือวัดเป็นปอนด์ในระบบ British วัดเป็นไดน์ในระบบ cgs และวัดเป็นนิวตันในระบบ mks ความเร่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก g ที่บริเวณผิวโลกในระบบ British cgs และ mks มีค่าเท่ากับ 32 ฟุตต่อวินาที ^{2} 980 เซนติเมตรต่อวินาที ^{2} และ 9.8 เมตรต่อวินาที ^{2} ตามลำดับ และจากกฎข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้ว่าในการตกของวัตถุสมมติวัตถุมีมวล m และมีน้ำหนัก w และน้ำหนักของวัตถุนิยามโดย $w = mg$ ดังนั้น (วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. 2541 : 108)

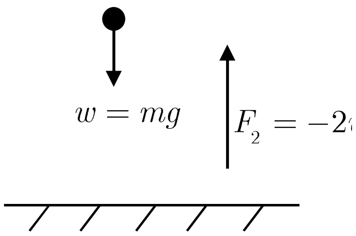
$$m = \frac{w}{g}$$

ตัวอย่าง 3.3 วัตถุหนัก 8 ปอนด์ ตกจากสภาพหยุดนิ่งลงมาในแนวดิ่ง โดยมีแรงต้านของอากาศ (หน่วยเป็นปอนด์) เท่ากับสองเท่าของความเร็ววัตถุ (หน่วยเป็น ฟุตต่อวินาที) จงหาความเร็วของวัตถุและระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาได้ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ

F_2 แทนแรงต้านทานของอากาศ

F_1 เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุในทิศทางดิ่งลงสู่พื้นจึงมีค่าเป็นบวก และ F_2 มีทิศทางตรงข้ามกับ F_1 จึงมีค่าเป็นลบ แสดงได้ดังภาพ



ที่มา : ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2542 : 379)

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

$$\frac{w}{g}\frac{dv}{dt} = w - 2v$$

$$8\frac{dv}{dt} = g(8 - 2v)$$

จัดสมการ $8\frac{dv}{dt} = g(8 - 2v)$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\frac{8}{8 - 2v}dv = gdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้จะได้

$$-4\ln\left|8 - 2v\right| = gt + c_1$$

$$\ln\left|8 - 2v\right| = -\frac{g}{4}t + c_2$$

$$\left|8 - 2v\right| = e^{-\frac{g}{4}t + c_2}$$

$$\left|8 - 2v\right| = e^{-\frac{g}{4}t}e^{c_2}$$

$$8 - 2v = \pm c_3 e^{-\frac{g}{4}t}$$

$$8 - 2v = ce^{-\frac{g}{4}t}$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 0$

แทนในสมการ $8-2v=ce^{-\frac{g}{4}t}$ จะได้ $c=8$

ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา เวลา t ใด ๆ คือ

$$8-2v=8e^{-\frac{g}{4}t}$$

$$2v=8-8e^{-\frac{g}{4}t}$$

$$v=4\left(1-e^{-\frac{g}{4}t}\right)$$

$$v(t)=4\left(1-e^{-\frac{g}{4}t}\right) \text{ ฟุตต่อวินาที}$$

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t ใด ๆ

สามารถเขียนสมการ $v(t)=4\left(1-e^{-\frac{g}{4}t}\right)$ ในรูป

$$\frac{dx}{dt}=4\left(1-e^{-\frac{g}{4}t}\right)$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\frac{dx}{dt}=4\left(1-e^{-\frac{g}{4}t}\right)$ จะได้

$$x=4\left(t+\frac{4}{g}e^{-\frac{g}{4}t}\right)+c_4$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(0)=0$

แทนในสมการ $x=4\left(t+\frac{4}{g}e^{-\frac{g}{4}t}\right)+c_4$ จะได้ $c_4=\frac{16}{g}$

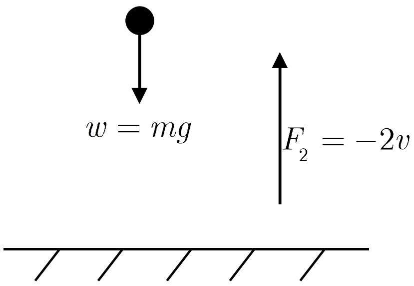
ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง ณ เวลา t ใด ๆ คือ $x(t)=4\left(t+\frac{4}{g}e^{-\frac{g}{4}t}\right)+\frac{16}{g}$ ฟุต

ตัวอย่าง 3.4 วัตถุมวล 1 กิโลกรัม ตกจากสภาพหยุดนิ่งลงมาในแนวดิ่ง โดยมีแรงต้านของอากาศ (หน่วยเป็นนิวตัน) เท่ากับสองเท่าของความเร็ววัตถุ (หน่วยเป็น เมตรต่อวินาที) จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ ลิมิตของความเร็วขณะที่ $t \to \infty$ และระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาได้ ณ เวลา t วินาที

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุ

F_2 แทนแรงต้านทานของอากาศ

F_1 เป็นแรงที่กระทำต่อวัตถุในทิศทางดิ่งลงสู่พื้นจึงมีค่าเป็นบวก และ F_2 มีทิศทางตรงข้ามกับ F_1 จึงมีค่าเป็นลบ แสดงได้ดังภาพ



ที่มา : ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2542 : 379)

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$
$$1\frac{dv}{dt} = 1(g) - 2v$$
$$\frac{dv}{dt} + 2v = g$$

สมการ $\frac{dv}{dt} + 2v = g$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

โดยมี $p(t) = 2,\ g(t) = g$ และ $\mu(t) = e^{\int 2tdt} = e^{2t}$

นำ $\mu(t)$ คูณตลอดสมการ $\frac{dv}{dt} + 2v = g$ ได้

$$e^{2t}\frac{dv}{dt} + e^{2t}2v = e^{2t}g$$
$$\frac{d}{dt}(ve^{2t}) = e^{2t}g$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ได้

$$ve^{2t} = \frac{1}{2}e^{2t}g + c$$
$$v = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g + c\right)$$

หรือ

$$v(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g + c\right)$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 0$

แทนในสมการ $v(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g + c\right)$ จะได้ $c = -\frac{g}{2}$

ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา เวลา t ใด ๆ คือ

$$v(t) = e^{-2t}\left(\frac{1}{2}e^{2t}g - \frac{g}{2}\right)$$

$$v(t) = \frac{g}{2} - \frac{g}{2}e^{-2t} \text{ เมตรต่อวินาที}$$

และ $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{g}{2} - \frac{g}{2}e^{-2t}\right)$

$$= \frac{g}{2}$$

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t วินาทีคือ

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(t)\,dt \\ &= \int_0^t \left(\frac{g}{2} - \frac{g}{2}e^{-2t}\right)dt \\ &= \left.\left(\frac{g}{2}t + \frac{g}{4}e^{-2t}\right)\right|_0^t \\ &= \frac{g}{2}t + \frac{g}{4}e^{-2t} - \frac{g}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น ระยะทางที่วัตถุตกลงมาในแนวดิ่ง เวลา t วินาที คือ $\frac{g}{2}t + \frac{g}{4}e^{-2t} - \frac{g}{4}$ เมตร

ตัวอย่าง 3.5 ยิงก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 80 ฟุตต่อวินาที และกำหนดให้ $g = 32$ ฟุตต่อวินาที ^{2}

1. เมื่อเวลาผ่านไป $\frac{3}{2}$ วินาทีก้อนหินมีทิศทางการเคลื่อนที่อย่าไร
2. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที
3. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงที่สุดกี่ฟุต
4. จงหาความเร็วที่ก้อนหินตกระทบพื้น

วิธีทำ เนื่องจากการเคลื่อนที่ของลูกหินจะลดความเร็วลงด้วยแรงโน้มถ่วงของโลกคือ $g = 32$ ฟุตต่อวินาที จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ดังนี้

$$\frac{dv}{dt} = -32$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\frac{dv}{dt} = -32$ จะได้

$$v = -32t + c_1$$

หรือ

$$v(t) = -32t + c_1$$

เนื่องจากยิงก้อนหินขึ้นไปในแนวดิ่งด้วยความเร็ว 80 ฟุตต่อวินาที
ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 80$ แทนใน $v(t) = -32t + c_1$ จะได้ $c_1 = 80$
ดังนั้นสมการความเร็วของก่อนหิน ณ เวลา t ใด ๆ คือ

$$v(t) = -32t + 80$$

กำหนดให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่ก้อนหินเคลื่อนที่ขึ้นและลง ณ เวลา t ใด ๆ สามารถเขียนสมการ $v(t) = -32t + 80$ ในรูป

$$\frac{dx}{dt} = -32t + 80$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ จะได้

$$x(t) = -16t^2 + 80t + c_2$$

เนื่องจากถูกยิงขึ้นไปในแนวดิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(0) = 0$
แทนในสมการ $x(t) = -16t^2 + 80t + c_2$ จะได้ $c_2 = 0$
ดังนั้นสมการการเคลื่อนที่ของก้อนหิน ณ เวลา t ใด ๆ คือ

$$x(t) = -16t^2 + 80t \text{ ฟุต}$$

1. เมื่อเวลาผ่านไป $\frac{3}{2}$ วินาทีก้อนหินมีทิศทางการเคลื่อนที่อย่างไร

แทนค่า $t = \frac{3}{2}$ ในสมการ $v(t) = -32t + 80$ ได้

$$v\left(\frac{3}{2}\right) = -32\left(\frac{3}{2}\right) + 80 = 32 \text{ ฟุตต่อวินาที}$$

เนื่องจากความเร็วของก่อนหินขณะที่ $t = \frac{3}{2}$ เป็นบวกแสดงว่าขณะนั้นก่อนหินยังคงมีทิศทางขึ้น

2. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไปกี่วินาที

ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อความเร็วเป็นศูนย์ นั้นคือ $v(t) = 0$ จาก $v(t) = -32t + 80$

$$-32t + 80 = 0$$

$$t = \frac{5}{2}$$

แสดงว่าก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป $\frac{5}{2}$ วินาที

3. ก้อนหินขึ้นไปได้สูงที่สุดกี่ฟุต

จากข้อ 2 ก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุดเมื่อเวลาผ่านไป $\frac{5}{2}$ วินาที

แทน $t = \frac{5}{2}$ ในสมการ $x(t) = -16t^2 + 80t$ จะได้

$$x\left(\frac{5}{2}\right) = -16\left(\frac{5}{2}\right)^2 + 80\left(\frac{5}{2}\right) \text{ ฟุต}$$
$$= 100$$

ดังนั้นก้อนหินขึ้นไปได้สูงสุด 100 ฟุต

4. จงหาความเร็วที่ก้อนหินตกกระทบพื้น

ก้อนหินกระทบพื้นเมื่อ $x(t) = 0$ จากสมการ $x(t) = -16t^2 + 80t$ จะได้

$$-16t^2 + 80t = 0$$
$$(80 - 16t)t = 0$$
$$t = 0, 5$$

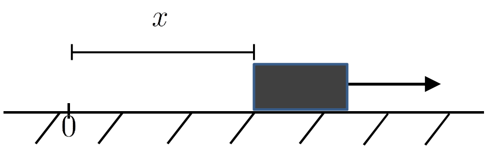
แสดงว่าก้อนหินกระทบพื้นหลังจากเวลาผ่านไป 5 วินาที

ดังนั้นความเร็วที่ก้อนหินตกกระทบพื้นแทน $t = 5$ ในสมการ $v(t) = -32t + 80$

$$v(5) = -32(5) + 80 = -80 \text{ ฟุตต่อวินาที}$$

ตัวอย่าง 3.6 วัตถุมวล m กิโลกรัม เคลื่อนที่ไปบนพื้นราบในแนวเส้นตรงขณะเวลา t วินาที และอยู่ห่างจากจุดคงที่ 0 เป็นระยะทาง x เมตร มีความเร็ว v เมตรต่อวินาที และมีความเร่ง $v^2 - v$ เมตรต่อวินาที ^{2} ความเร่งมีทิศพุ่งออกจากจุดคงที่ 0 กำหนดความเร็ว $v = 3$ เมตรต่อวินาที ที่ตำแหน่ง $x = 0$ จงแสดงว่า $x = \ln\left|\frac{v-1}{3}\right|$

วิธีทำ แสดงภาพประกอบการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ดังนี้



กำหนดทิศทางของการเคลื่อนที่ไปทางขวาของจุดเริ่มต้นเป็นบวก

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตันจะได้

$$m\frac{dv}{dt} = F$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$
$$\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = a$$
$$\frac{dv}{dx}v = v^2 - v$$

จัดสมการ $\frac{dv}{dx}v = v^2 - v$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\frac{v}{v^2 - v}dv - dx = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ (40) จะได้

$$\int \frac{v}{v^2 - v}dv - \int dx = c$$

$$\ln\left|v-1\right| - x = c$$

เนื่องจาก กำหนดความเร็ว $v = 3$ เมตรต่อวินาที ที่ตำแหน่ง $x = 0$

ได้เงื่อนไข $v(0) = 3$ แทนในสมการ $\ln\left|v-1\right| - x = c$ ได้ $c = \ln\left|3\right|$

แทน $c = \ln\left|3\right|$ ในสมการ $\ln\left|v-1\right| - x = c$ ได้

$$\ln\left|v-1\right| - x = \ln\left|3\right|$$

$$x = \ln\left|v-1\right| - \ln\left|3\right|$$

หรือ

$$x = \ln\left|\frac{v-1}{3}\right|$$

ตัวอย่าง 3.7 วัตถุมวล 16 กิโลกรัม ถูกลากไปข้างหน้าในแนวราบด้วยแรง 64 นิวตัน โดยมีแรงต้านทานการเคลื่อนที่ (หน่วยเป็นนิวตัน) เท่ากับกำลังสองของความเร็ว (หน่วยเป็นเมตรต่อวินาที) สมมติว่าวัตถุเคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิ่ง จงหาว่า ณ เวลาใดวัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที

วิธีทำ ให้ F_1 แทนแรงที่ลากวัตถุไปข้างหน้า (กำหนดให้มีทิศทางเป็นบวก)

F_2 แทนแรงต้านทานการเคลื่อนที่ (กำหนดให้มีทิศทางเป็นลบ)

จากกฎที่สองของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

$$16\frac{dv}{dt} = 64 - v^2$$

จัดสมการ $16\frac{dv}{dt} = 64 - v^2$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\frac{16}{64 - v^2}dv = dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ จะได้

$$\int \frac{16}{64 - v^2}dv = \int dt$$

$$\ln\left|v+8\right|-\ln\left|v-8\right|=t+c_1$$

$$\ln\left|\frac{v+8}{v-8}\right|=t+c_1$$

$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right|=e^{t+c_1}$$

$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right|=e^{t}e^{c_1}$$

หรือ

$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right|=ce^{t}$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0)=0$

แทนในสมการ $\left|\frac{v+8}{v-8}\right|=ce^{t}$ จะได้ $c=1$

ดังนั้นความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วและเวลาคือ

$$\left|\frac{v+8}{v-8}\right|=e^{t}$$

และขณะที่วัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที จะได้

$$\left|\frac{10+8}{10-8}\right|=e^{t}$$

$$e^{t}=9$$

$$e^{t}=3^2$$

$$t=2\ln 3$$

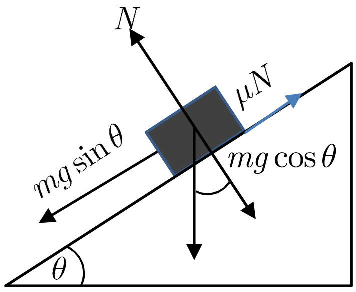
ดังนั้น ณ เวลา $t=2\ln 3$ วัตถุมีความเร็ว 10 เมตรต่อวินาที

ตัวอย่าง 3.8 วัตถุมวล m กิโลกรัม เริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งจากยอดข้องพื้นเอียงซึ่งทำมุม θ° กับพื้นราบ ถ้าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างวัตถุกับพื้นเอียงเป็น μ จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุแล้วจะหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าไรวัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ ถ้าพื้นเอียงยาว l เมตร

วิธีทำ เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุเป็นพื้นเอียง เป็นมุม θ เลือกจุดยอดของพื้นเอียงเป็นจุดกำเนิด และให้ทิศทางการเคลื่อนที่ลงตามพื้นเอียงเป็นบวก ถ้าไม่คำนึงถึงแรงเสียดทานและแรงต้านทานของอากาศที่กระทำต่อวัตถุ คือ

1. มวล m กิโลกรัม

2. แรงแนวฉาก N ซึ่งกระทำในแนวตั้งฉากกับพื้นเอียง ดังภาพ



ที่มา : ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง (2542 : 389)

พิจารณา การเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อมีแรงเสียดทานและแรงต้านทานของอากาศ ดังนั้นแรงที่กระทำต่อวัตถุประกอบด้วย

ให้ F_1 แทนแรงที่เกิดจากน้ำหนักของวัตถุในแนวขนานกับพื้นเอียง มีค่าเป็นบวก

F_2 แทนแรงเสียดทานมีค่าเป็นลบเพราะกระทำต่อวัตถุในทิศที่สวนทางกับการเคลื่อนที่

จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน จะได้ว่า

$$m\frac{dv}{dt} = F_1 + F_2$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$$

จัดสมการ $m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu mg\cos\theta$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$m\frac{dv}{dt} = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$dv = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $dv = g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt$ จะได้

$$\int dv = \int g(\sin\theta - \mu\cos\theta)dt$$

$$v = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta) + c$$

เนื่องจากวัตถุตกจากสภาพหยุดนิ่ง ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $v(0) = 0$

แทนในสมการ $v = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta) + c$ จะได้ $c = 0$

ดังนั้นความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ คือ

$v(t) = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ เมตรต่อวินาที

ให้ $x(t)$ แทนระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ลงมาในแนวพื้นเอียงที่ เวลา t ใด ๆ

สามารถเขียนสมการ $v(t) = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ ในรูป

$$\frac{dx}{dt} = gt(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

ทำการหาปริพันธ์ จะได้

$$x = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta) + c_1$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $t(0) = 0$ แทนในสมการ $x = \dfrac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta) + c_1$

จะได้ $c_1 = 0$ ดังนั้น

$$x(t) = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

พิจารณาว่าต้องใช้เวลานานเท่าไร วัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ ถ้าพื้นเอียงยาว l เมตร

นั่นคือ ต้องหาว่า t เท่ากับเท่าไร เมื่อ $x = l$ จาก $x(t) = \dfrac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$ ได้

$$l = \frac{gt^2}{2}(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

$$t^2 = \frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$$

เนื่องจาก t ต้องมีค่าเป็นบวกเสมอ

ดังนั้น จะต้องใช้เวลา $t = \sqrt{\dfrac{2l}{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}}$ วินาทีวัตถุจึงจะเคลื่อนที่ถึงพื้นราบ

ปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลง

ในหัวข้อนี้จะศึกษาปัญหาที่เกี่ยวข้องกับอัตราการเปลี่ยนแปลง เมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงเป็นฟังก์ชันของปริมาณในปัจจุบันกับเวลา และในปัญหาที่ศึกษาต้องการจะหาปริมาณ ณ เวลาใด ๆ ถ้าให้ x แทนปริมาณที่มีอยู่ ณ เวลา t แล้ว $\dfrac{dx}{dt}$ จะแทนอัตราการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นการหาปริมาณ ณ เวลา t ใด ๆ จะต้องหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ และเราจะศึกษาปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี ปัญหาการเพิ่มของประชากร ปัญหาของผสม และปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ

ปัญหาการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

สุรัตนา สังข์หนุน (2558 : 103) ได้กล่าวว่า อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี อยู่ภายใต้สมมติฐานที่ว่า "อัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีเป็นสัดส่วนโดยตรงกับปริมาณสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่"

ตัวอย่าง 3.9 สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่ง มีอัตราการสลายเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่มีอยู่ และพบว่าเมื่อผ่านไป 1200 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 3600 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่กี่เปอร์เซ็นต์ของที่มีอยู่

วิธีทำ ให้ x แทนปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ปี

ดังนั้น $\dfrac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของสารเป็นสัดส่วนกับจำนวนสารที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

ให้ x_0 แทนปริมาณสารกัมมันตรังสีตอนเริ่มต้น ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(x_0) = 0$

เมื่อเวลาผ่านไป 1200 ปีสารชนิดนี้จะเหลือครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ ดังนั้นจะได้

$$x(1200) = \frac{1}{2}x_0$$

จัดสมการ $\dfrac{dx}{dt} = -kx$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{x}dx = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\dfrac{1}{x}dx = -kdt$ จะได้

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt$$

$$\ln|x| = -kt + c_1$$

$$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ $x = ce^{-kt}$ ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

$$x = x_0 e^{-kt}$$

ในการหาค่า k เราจะใช้ข้อกำหนดที่ว่าสารสลายตัวไปครึ่งหนึ่งหลังจาก 1200 ปี

นั่นคือแทน $x = \frac{1}{2}x_0$ และ $t = 1200$ ในสมการ $x = ce^{-kt}$ จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k(1200)}$$

$$e^{-k(1200)} = \frac{1}{2}$$

หรือ

$$e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1200}}$$

เราสามารถหาค่าของ k ได้จากสมการ $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1200}}$ แต่ถ้าดูจากสมการ $x = ce^{-kt}$ แล้วเราจะพบว่าค่าคงตัวที่เราต้องการทราบคือ e^{-k} ดังนั้น แทน $e^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1200}}$ ในสมการ $x = ce^{-kt}$ จะได้

$$x = x_0 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{1200}}\right]^t$$

หรือ

$$x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1200}}$$

สมการ $x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1200}}$ นั้นแทนปริมาณสารกัมมันตรังสี ณ เวลา t ใด ๆ ถ้าแทน $t = 3600$ จะได้

$$x = x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3600}{1200}}$$

$$= x_0 \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}x_0$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 3600 ปี สารชนิดนี้จะเหลืออยู่ $\frac{1}{8}$ ของปริมาณที่มีอยู่ คิดเป็นเปอร์เซ็นต์เท่ากับ 12.5 เปอร์เซ็นต์

ตัวอย่าง 3.10 สารกัมมันตรังสีชนิดหนึ่งมีครึ่งชีวิตเท่ากับ 38 ชั่วโมงจงหาว่านานเท่าใดสารนี้จะสลายไปเป็นจำนวน 80 เปอร์เซ็นต์

วิธีทำ ให้ x แทนปริมาณของสารกัมมันตรังสีที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ชั่วโมง

ดังนั้น $\dfrac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสี

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของสารเป็นสัดส่วนกับจำนวนสารที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

ให้ x_0 แทนปริมาณสารกัมมันตรังสีตอนเริ่มต้น ดังนั้นเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $x(x_0) = 0$

เมื่อเวลาผ่านไป 38 ชั่วโมง สารชนิดนี้จะเหลือครึ่งหนึ่งของที่มีอยู่ ดังนั้นจะได้

$$x(38) = \frac{1}{2}x_0$$

จัดสมการ $\dfrac{dx}{dt} = -kx$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{x}dx = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\dfrac{1}{x}dx = -kdt$ จะได้

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt$$

$$\ln\left|x\right| = -kt + c_1$$

$$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ $x = ce^{-kt}$ ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

$$x = x_0e^{-kt}$$

ในการหาค่า k เราจะใช้ข้อกำหนดที่ว่าสารสลายตัวไปครึ่งหนึ่งหลังจาก 38 ชั่วโมง

นั่นคือแทน $x = \dfrac{1}{2}x_0$ และ $t = 38$ ในสมการ $x = x_0e^{-kt}$ จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0e^{-k(38)}$$

$$e^{-k(38)} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{38}\ln 2$$

ในที่นี้เราต้องการหาค่า t เมื่อ $x = \frac{1}{20}x_0$

ดังนั้น แทน $x = \frac{1}{20}x_0$ ในสมการ $x = x_0 e^{-kt}$ จะได้

$$\frac{1}{20}x_0 = x_0 e^{-\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t}$$

$$\frac{1}{20} = e^{-\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t}$$

$$-\ln\frac{1}{20} = \left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t$$

$$\left(\frac{1}{38}\ln 2\right)t = \ln 20$$

$$t = \frac{\ln 20}{\frac{1}{38}\ln 2}$$

$$t = 38\frac{\ln 20}{\ln 2}$$

$$t \approx 165$$

ดังนั้น สารนี้จะสลายไปเป็นจำนวน 80 เปอร์เซ็นต์ หลังจากเวลาผ่านไปประมาณ 165 ชั่วโมง

ตัวอย่าง 3.11 ซากพืชชนิดหนึ่งมีคาร์บอน 14 เหลืออยู่ 15 เปอร์เซ็นต์ จงประมาณอายุของซากพืช เมื่อใช้ครึ่งชีวิตของคาร์บอน 14 เท่ากับ 5730 ปี

วิธีทำ ให้ x_0 แทนปริมาณคาร์บอน 14 ที่มีในซากพืช และ

ให้ x แทนปริมาณของคาร์บอน 14 ที่มีอยู่หลังจากผ่านไป t ปี

ดังนั้น $\frac{dx}{dt}$ แทนอัตราการสลายตัวของคาร์บอน 14

เพราะว่าอัตราการสลายตัวของคาร์บอน 14 เป็นสัดส่วนกับจำนวนคาร์บอน 14 ที่มีอยู่ และเนื่องจาก x มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ x เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ $\frac{dx}{dt} = -kx$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{x}dx = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\frac{1}{x}dx = -kdt$ จะได้

$$\int \frac{1}{x}dx = -\int kdt$$

$$\ln|x| = -kt + c_1$$

$$x = ce^{-kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(x_0) = 0$ แทนในสมการ $x = ce^{-kt}$ ได้ $c = x_0$ ดังนั้น

$$x = x_0 e^{-kt}$$

เมื่อแทน $x = \frac{1}{2}x_0$ และ $t = 5730$ ในสมการ $x = x_0 e^{-kt}$ จะได้

$$\frac{1}{2}x_0 = x_0 e^{-k(5730)}$$

$$e^{-k(5730)} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{5730}\ln 2$$

ในที่นี้เราต้องการหาค่า t เมื่อ $x = \frac{15}{100}x_0$ ดังนั้น

แทน $x = \frac{15}{100}x_0$ ในสมการ $x = x_0 e^{-kt}$ จะได้

$$\frac{15}{100}x_0 = x_0 e^{-\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t}$$

$$\frac{15}{100} = e^{-\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t}$$

$$-\ln 0.15 = \left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t$$

$$\left(\frac{1}{5730}\ln 2\right)t = -\ln 0.15$$

$$t = -5730\frac{\ln 0.15}{\ln 2}$$

$$t \approx 15683$$

ดังนั้น อายุของซากพืชนี้ประมาณ $15,683$ ปี

ปัญหาการเพิ่มของประชากร

วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์ (2541 : 96) ได้กล่าวว่า เราจะศึกษารูปแบบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากร เช่น มนุษย์ สัตว์ แบคทีเรีย เป็นต้น กล่าวคือเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป จำนวนของประชากรจะเปลี่ยนแปลงด้วย ถ้าให้ $N(t)$ แทนจำนวนประชากรกลุ่มหนึ่ง ณ เวลา t ใด ๆ ภายใต้สมมติฐานว่า ไม่มีการอพยพเข้าหรือออกจากกลุ่ม ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างผิดปกติของสภาวะแวดล้อม จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากรที่มีอยู่ นั่นคือ $\dfrac{dN}{dt} = kx$ โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

สำหรับกรณีที่อัตราการเพิ่มมากกว่าอัตราการตายจะได้ $\dfrac{dN}{dt} > 0$ ดังนั้นค่าคงที่ $k > 0$ ถ้าเริ่มต้นมีจำนวนประชากร N_0 ได้เงื่อนไขเริ่มต้นเป็น $N(t_0) = N_0$
เราจะได้ว่าจำนวนประชากร ณ เวลา t ใด ๆ คือ $N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$

สมการ $N(t) = N_0 e^{k(t-t_0)}$ จะพบว่าเมื่อ t เพิ่มขึ้น จำนวนประชากร $N(t)$ จะเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัดซึ่งไม่สอดคล้องกับสภาพความเป็นจริง ในความเป็นจริงแล้วการเพิ่มของประชากรต้องมีขอบเขตจำกัด และจำนวนประชากรจะเพิ่มขึ้นไปจนถึงจุดหนึ่ง และจะไม่เพิ่มขึ้นไปกว่านี้แล้ว ดังนั้นอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากรที่สอดคล้องกับความเป็นจริงดังกล่าวควรจะอยู่ในรูป $\dfrac{dN}{dt} = kN - \lambda N^2$ โดยที่ค่า $k > 0$ และ $\lambda > 0$ เรียกสมการ $\dfrac{dN}{dt} = kN - \lambda N^2$ ว่ากฎโลจีสติกส์ พิจารณาสมการ $\dfrac{dN}{dt} = kN - \lambda N^2$ เป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ และเป็นสมการแบร์นูลลี

ตัวอย่าง 3.12 ประชากรของเมืองหนึ่งสอดคล้องกฎโลจิสติกส์ $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{1}{100}N - \dfrac{1}{10^8}N^2$ โดยที่ t เป็นเวลาคิดเป็นปี กำหนดให้เมืองนี้มีจำนวนประชากร $100,000$ คนในปี ค.ศ. 1980 และจำนวนประชากรเป็นไปตามสมการ $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{1}{100}N - \dfrac{1}{10^8}N^2$ สำหรับ $t > 1980$ จงหาว่าในปี ค.ศ 2000 จะมีจำนวนประชากรเท่าใด

วิธีทำ จัดสมการ $\dfrac{dN}{dt} = \dfrac{1}{100}N - \dfrac{1}{10^8}N^2$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\frac{dN}{10^{-2}N - 10^{-8}N^2} = dt$$

ทำสมการ $\dfrac{dN}{10^{-2}N - 10^{-8}N^2} = dt$ เป็นเศษส่วนย่อย ได้

$$100\left(\frac{1}{N}+\frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN=dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้จะได้

$$\int 100\left(\frac{1}{N}+\frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN=\int dt$$

$$\int\left(\frac{1}{N}+\frac{10^{-6}dN}{1-10^{-6}N}\right)dN=\frac{1}{100}\int dt$$

$$\ln N-\ln\left(1-10^{-6}N\right)=\frac{t}{100}+c_1$$

$$\ln\frac{N}{1-10^{-6}N}=\frac{t}{100}+c_1$$

$$\frac{N}{1-10^{-6}N}=e^{\frac{t}{100}+c_1}$$

$$\frac{N}{1-10^{-6}N}=ce^{\frac{t}{100}}$$

หรือ

$$N=\frac{ce^{\frac{t}{100}}}{1+10^{-6}ce^{\frac{t}{100}}}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(1980)=100,000$ แทนในสมการ $N=\dfrac{ce^{\frac{t}{100}}}{1+10^{-6}ce^{\frac{t}{100}}}$ ได้

$$100000=\frac{ce^{1980/100}}{1+10^{-6}ce^{1980/100}}$$

$$10^5=\frac{ce^{19.8}}{1+10^{-6}ce^{19.8}}$$

$$c=\frac{10^5}{e^{19.8}\left(1-10^{-1}\right)}$$

$$c=\frac{10^6}{9e^{19.8}}$$

แทนค่า $c=\dfrac{10^6}{9e^{19.8}}$ ในสมการ $N=\dfrac{ce^{\frac{t}{100}}}{1+10^{-6}ce^{\frac{t}{100}}}$ จะได้

$$N(t)=\frac{10^6}{1+9e^{19.8-\frac{t}{100}}} \text{ สำหรับ } t>1980$$

สมการ (78) แทนประชากร ณ เวลา t ใด ๆ

และเมื่อแทน $t=2000$ ในสมการ $N(t)=\dfrac{10^6}{1+9e^{19.8-\frac{t}{100}}}$ จะได้

$$\begin{aligned} N(2000) &= \frac{10^6}{1+9e^{19.8-\frac{200}{100}}} \\ &= \frac{10^6}{1+9e^{-0.2}} \\ &\approx 119459 \end{aligned}$$

ดังนั้น ในปี ค.ศ 2000 จะมีจำนวนประชากรประมาณ $119,459$ คน

ตัวอย่าง 3.13 สมมติว่าจำนวนพลเมืองของเมือง ๆ หนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนพลเมืองขณะนั้น ถ้าจำนวนพลเมืองเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในเวลา 40 ปี แล้วอีกกี่ปีจำนวนพลเมืองจึงจะเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่า

วิธีทำ ให้ N_0 แทนจำนวนพลเมืองในตอนเริ่มแรก

ให้ N แทนจำนวนพลเมือง ณ เวลา t ใด ๆ

ดังนั้น $\dfrac{dN}{dt}$ แทนอัตราการเพิ่มจำนวนของพลเมือง

เพราะว่าอัตราการเพิ่มจำนวนของพลเมืองเป็นสัดส่วนกับจำนวนพลเมืองที่มีอยู่ขณะนั้น และเนื่องจาก N มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ N เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นจะได้

$$\frac{dN}{dt}=kN$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ $\dfrac{dN}{dt}=kN$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{N}dN=kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\dfrac{1}{N}dN=kdt$ จะได้

$$\int\frac{1}{N}dN=\int kdt$$

$$\ln|N|=kt+c_1$$

$$N = ce^{kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(0) = N_0$ แทนในสมการ $N = ce^{kt}$ ได้ $c = N_0$ ดังนั้น

$$N = N_0 e^{kt}$$

จำนวนพลเมืองเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าในเวลา 40 ปี ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$N(40) = 2N_0$$

เมื่อแทน $N = 2N_0$ และ $t = 40$ ในสมการ $N = N_0 e^{kt}$ จะได้

$$2N_0 = N_0 e^{k(40)}$$

$$2 = e^{k(40)}$$

$$e^k = 2^{1/40}$$

แทน $e^k = 2^{\frac{1}{40}}$ ในสมการ $N = N_0 e^{kt}$ จะได้

$$N = N_0 2^{\frac{t}{40}}$$

ถ้า $N = 3N_0$ แทนในสมการ $N = N_0 2^{\frac{t}{40}}$ จะได้

$$3N_0 = N_0 2^{\frac{t}{40}}$$

$$3 = 2^{\frac{t}{40}}$$

$$\ln 3 = \ln 2^{\frac{t}{40}}$$

$$\ln 3 = \frac{t}{40} \ln 2$$

$$t = 40 \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

$$t \approx 63.5$$

ดังนั้น อีกประมาณ 63.5 ปีจำนวนพลเมืองจึงจะเพิ่มขึ้นเป็นสามเท่า

ตัวอย่าง 3.14 จากการขยายพันธุ์ของแบคทีเรียพบว่า อัตราการเพิ่มของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียขณะนั้น ถ้าเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 5 ล้านตัว และเวลาผ่านไป 9 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 8 ล้านตัวจงหาจำนวนแบคทีเรียในตอนเริ่มต้น

วิธีทำ ให้ N_0 แทนจำนวนแบคทีเรียตอนเริ่มต้น

ให้ N แทนจำนวนแบคทีเรีย ณ เวลา t ใด ๆ

ดังนั้น $\frac{dN}{dt}$ แทนอัตราการเพิ่มของแบคทีเรีย

เพราะว่าอัตราการเพิ่มจำนวนของแบคทีเรียเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ขณะนั้น และเนื่องจาก N มีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ N เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นจะได้

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ $\frac{dN}{dt} = kN$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$\frac{1}{N}dN = kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\frac{1}{N}dN = kdt$ ได้

$$\int \frac{1}{N}dN = \int kdt$$

$$\ln\left|N\right| = kt + c_1$$

$$N = ce^{kt}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $N(0) = N_0$ แทนในสมการ $N = ce^{kt}$ ได้ $c = N_0$ ดังนั้น

$$N = N_0e^{kt}$$

ถ้าเวลาผ่านไป 6 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 5 ล้านตัว ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ

$$N(6) = 5\times 10^6$$

เมื่อแทน $N = 5\times 10^6$ และ $t = 6$ ในสมการ $N = N_0e^{kt}$ ได้

$$5\times (10)^6 = N_0e^{6k}$$

เวลาผ่านไป 9 ชั่วโมงมีแบคทีเรีย 8 ล้านตัวทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้นคือ $N(9) = 8\times 10^6$

เมื่อแทน $N = 8\times 10^6$ และ $t = 9$ ในสมการ $N = N_0e^{kt}$ ได้

$$8\times (10)^6 = N_0e^{9k}$$

จากสมการ $5\times (10)^6 = N_0e^{6k}$ และ $8\times (10)^6 = N_0e^{9k}$) ได้

$$e^{3k} = \frac{8}{5} \text{ หรือ}$$

$$e^{6k} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$$

แทนค่า $e^{6k} = \left(\frac{8}{5}\right)^2$ ในสมการ $5\times (10)^6 = N_0e^{6k}$ ได้

$$5\times (10)^6 = N_0\left(\frac{8}{5}\right)^2$$

$$N_0 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 \left[5 \times (10)^6\right]$$

$$= \frac{125 \times (10)^6}{64}$$

$$\approx 1.9 \times (10)^6$$

ดังนั้น จำนวนแบคทีเรียเริ่มต้นมีประมาณ 1.9 ล้านตัว

ปัญหาของผสม

สุรัตนา สังข์หนุน (2558 : 107) ได้กล่าวว่า ปัญหาในของผสมที่จะกล่าวนี้อาจจะเป็นเกลือ ยา หรือสิ่งอื่นก็ได้ ซึ่งบรรจุในภาชนะ เมื่อทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงเช่นการปล่อยสาร A ให้ไหลเข้าไปในภาชนะที่บรรจุของผสมชนิดหนึ่งด้วยอัตราคงที่อัตราหนึ่ง ในขณะที่สาร A ไหลเข้าไปผสมจะทำการคนของผสมอยู่ตลอดเวลา เพื่อให้ของผสมมีความเข้มข้นเท่ากันโดยตลอด ถ้าปล่อยให้ของผสมไหลออกจากภาชนะด้วยอัตราคงที่อีกอัตราหนึ่ง เราต้องการหาปริมาณของสาร A ซึ่งเหลืออยู่ในของผสม ณ เวลา t ใด ๆ

ให้ x แทนปริมาณของสาร A ณ เวลา t ใด ๆ และ

ให้ $\frac{dx}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของสารเทียบกับเวลา

ให้ IN แทนอัตราการไหลเข้าของสาร A

ให้ OUT แทนอัตราการไหลออกของสาร A

ดังนั้น จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{dx}{dt} = IN - OUT$$

ตัวอย่าง 3.15 ถังใบหนึ่งบรรจุน้ำ 50 แกลลอน ถ้าปล่อยให้น้ำซึ่งมีเกลือปนอยู่ 2 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลลงถังนี้ในอัตราเร็วคงที่ 3 แกลลอนต่อนาที และให้สารละลายในถังนี้ได้รับการคนให้ละลายอย่างสม่ำเสมอตลอดถัง แล้วในขณะเดียวกันก็ไหลออกจากถังในอัตราเดียวกับที่ไหลเข้า จงหาปริมาณของเกลือที่อยู่ในถังนี้เมื่อเวลาผ่านไป 25 นาที

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของเกลือในถังใบนี้ ณ เวลา t ใด ๆ

น้ำซึ่งมีเกลือปนอยู่ 2 ปอนด์ต่อแกลลอนไหลลงถังนี้ในอัตราเร็วคงที่ 3 แกลลอนต่อนาที ดังนั้นได้ อัตราของเกลือที่ไหลเข้าถังคือ

$IN = 2 \times 3 = 6$ ปอนด์ต่อนาที

เนื่องจากอัตราการไหลเข้าและไหลออกเท่ากัน ดังนั้นถังน้ำจะมีน้ำ 50 แกลลอน ณ เวลา t ใด ๆ และน้ำ 50 แกลลอน นี้จะมีเกลืออยู่ x ปอนด์ เพราะฉะนั้นความเข้มข้นของเกลือ ณ เวลา t เท่ากับ $\dfrac{x}{50}$ ปอนด์ต่อแกลลอน ณ เวลา t ใด ๆ อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถัง และของผสมนี้ไหลออกด้วยอัตรา 3 แกลลอนต่อนาที ดังนั้น ได้อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถังคือ

$$OUT = \frac{x}{50} \times 3 = \frac{3x}{50} \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

จาก $\dfrac{dx}{dt} = IN - OUT$ จะได้

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{3x}{50}$$

จัดสมการ $\dfrac{dx}{dt} = 6 - \dfrac{3x}{50}$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$\frac{dx}{100 - x} = \frac{3}{50}dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\dfrac{dx}{100 - x} = \dfrac{3}{50}dt$ จะได้

$$\int \frac{dx}{100 - x} = \int \frac{3}{50}dt$$

$$-\ln\left|100 - x\right| = \frac{3}{50}t + c_1$$

$$x = 100 - ce^{\frac{-3t}{50}}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0$ แทนในสมการ $x = 100 - ce^{\frac{-3t}{50}}$ ได้ $c = 100$

แทน $c = 100$ ในสมการ $x = 100 - ce^{\frac{-3t}{50}}$ ได้

$$x = 100 - 100e^{\frac{-3t}{50}}$$

$$x(t) = 100\left(1 - e^{\frac{-3t}{50}}\right)$$

ถ้าเวลาผ่านไป 25 นาทีจะมีปริมาณเกลือเท่ากับ

$$x(25) = 100\left(1 - e^{\frac{-3(25)}{50}}\right)$$

$$= 100(1 - e^{-1.5})$$

$$\approx 78$$

ดังนั้น เมื่อเวลาผ่านไป 25 นาทีจะมีปริมาณเกลือประมาณ 78 แกลลอน

ตัวอย่าง 3.16 แท็งก์ใบหนึ่งบรรจุน้ำเกลือ 50 แกลลอน โดยมีเกลือละลายอยู่ 10 ปอนด์ ปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีความเข้มข้นของเกลือ 2 ปอนด์ต่อแกลลอน เข้าไปในแท็งก์ด้วยอัตราเร็ว 5 แกลลอนต่อนาที และให้สารละลายในถังนี้ได้รับการคนให้ละลายอย่างสม่ำเสมอตลอดถัง แล้วในขณะเดียวกันก็ปล่อยน้ำในแท็งก์ออกด้วยอัตราเร็ว 3 แกลลอนต่อนาที จงหาปริมาณของเกลือในแท็งก์ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของเกลือในแท็งก์ใบนี้ ณ เวลา t ใด ๆ

ปล่อยน้ำเกลือซึ่งมีความเข้มข้นของเกลือ 2 ปอนด์ต่อแกลลอน เข้าไปในแท็งก์ด้วยอัตราเร็ว 5 แกลลอนต่อนาที ดังนั้นได้ อัตราของเกลือที่ไหลเข้าถัง คือ

$$IN = 2 \times 5 = 10 \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

จากอัตราการไหลเข้า 5 แกลลอนต่อนาทีและอัตราการไหลออก 3 แกลลอนต่อนาที ว่าจะมีปริมาณของเกลือเพิ่มอยู่ 2 แกลลอนต่อนาที เพราะฉะนั้น ณ เวลา t จะมีน้ำเกลืออยู่ $50+2t$ แกลลอน ดังนั้น ได้อัตราของเกลือที่ไหลออกจากถัง คือ

$$OUT = \frac{3x}{50+2t} \text{ ปอนด์ต่อนาที}$$

จาก $\dfrac{dx}{dt} = IN - OUT$ จะได้

$$\frac{dx}{dt} = 10 - \frac{3x}{50+2t}$$

หรือ

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{50+2t}x = 10$$

จะเห็นว่าสมการ $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{3}{50+2t}x = 10$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

โดยมี $p(t) = \dfrac{3}{50+2t}$, $g(t) = 10$

และ $\mu(t) = e^{\int \frac{3}{50+2t}dt} = e^{\frac{3}{2}\ln|50+2t|} = (50+2t)^{\frac{3}{2}}$

นำ $\mu(t)$ คูณตลอดสมการ $\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{3}{50+2t}x = 10$ ได้

$$(50+2t)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{dx}{dt} + \frac{3}{50+2t}x\right] = 10(50+2t)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left[x(50+2t)^{\frac{3}{2}}\right] = 10(50+2t)^{\frac{3}{2}}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ได้

$$x(50+2t)^{\frac{3}{2}} = 2(50+2t)^{\frac{5}{2}} + c$$

$$x = \frac{2(50+2t)^{\frac{5}{2}} + c}{(50+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

จากเงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 10$ แทนในสมการ $x = \dfrac{2(50+2t)^{\frac{5}{2}} + c}{(50+2t)^{\frac{3}{2}}}$ ได้

$$10 = \frac{2\left[50+2(0)\right]^{\frac{5}{2}} + c}{\left[50+2(0)\right]^{\frac{3}{2}}}$$

$$10 = \frac{2(50)^{\frac{5}{2}} + c}{(50)^{\frac{3}{2}}}$$

$$10 = 100 + \frac{c}{(50)^{\frac{3}{2}}}$$

$$c = -90(50)^{\frac{3}{2}}$$

แทนค่า $c = -90(50)^{\frac{3}{2}}$ แทนในสมการ $x = \dfrac{2(50+2t)^{\frac{5}{2}} + c}{(50+2t)^{\frac{3}{2}}}$ ได้

$$x = \frac{2(50+2t)^{\frac{5}{2}} - 90(50)^{\frac{3}{2}}}{(50+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

หรือ

$$x(t) = 100 + 4t - \frac{90(50)^{\frac{3}{2}}}{(50+2t)^{\frac{3}{2}}}$$

ดังนั้น สมการ $x(t) = 100 + 4t - \dfrac{90(50)^{\frac{3}{2}}}{(50+2t)^{\frac{3}{2}}}$ เป็นปริมาณของเกลือในแท็งก์ ณ เวลา t ใด ๆ

ตัวอย่าง 3.17 ห้องประชุมห้องหนึ่งมีขนาด 2000 ลูกบาศก์เมตร ณ เวลาเริ่มต้น ห้องประชุมนี้มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.002 เปอร์เซนต์ เมื่อเปิดระบบระบายอากาศโดยดูดอากาศที่มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 3 เปอร์เซนต์ เข้าไปในห้องด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที และดูดอากาศในห้องออกด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที อยากทราบว่านานเท่าใดอากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซนต์

วิธีทำ ให้ $x(t)$ แทนปริมาณของคาร์บอนมอนอกไซด์หลังจากเวลาผ่านไป t นาที

เมื่อเปิดระบบระบายอากาศโดยดูดอากาศที่มีคาร์บอนมอนอกไซด์ 3 เปอร์เซนต์ เข้าไปในห้องด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาที ดังนั้น

$$IN = 0.03 \times 0.02 = 0.0006 \text{ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที}$$

ดูดอากาศในห้องออกด้วยอัตราเร็ว 0.2 ลูกบาศก์เมตรต่อนาทีจากห้องประชุมห้องหนึ่งมีขนาด 2000 ลูกบาศก์เมตร ดังนั้น

$$OUT = \frac{x}{2000} \times 0.2 = \frac{0.2x}{2000} \text{ ลูกบาศก์เมตรต่อนาที}$$

จาก $\frac{dx}{dt} = IN - OUT$ จะได้

$$\frac{dx}{dt} = 0.0006 - \frac{0.2x}{2000}$$

หรือ

$$\frac{dx}{dt} = \frac{12 - 0.2x}{2000}$$

จัดสมการ $\frac{dx}{dt} = \frac{12 - 0.2x}{2000}$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\frac{dx}{12 - 0.2x} = \frac{1}{2000} dt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\frac{dx}{12 - 0.2x} = \frac{1}{2000} dt$ จะได้

$$\int \frac{dx}{12 - 0.2x} = \int \frac{1}{2000} dt$$

$$-\frac{1}{0.2} \ln\left|12 - 0.2x\right| = \frac{1}{2000} t + c_1$$

$$\ln\left|12 - 0.2x\right| = -\frac{1}{1000} t + c_1$$

$$12 - 0.2x = ce^{-\frac{t}{1000}}$$

$$x = 60 - ce^{-\frac{t}{1000}}$$

หรือ

$$x(t) = 60 - ce^{-\frac{t}{1000}}$$

ขณะเวลาเวลา 0 นาที มีปริมาณของคาร์บอนมอนอกไซด์ $2000 \times \dfrac{0.002}{100} = 0.04$ ลูกบาศก์เมตร ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $x(0) = 0.04$ แทนในสมการ $x(t) = 60 - ce^{-\frac{t}{1000}}$ ได้ $c = 59.96$ แทนในสมการ $x(t) = 60 - ce^{-\frac{t}{1000}}$ ได้

$$x(t) = 60 - 59.96e^{-\frac{t}{1000}}$$

ต้องการทราบว่าจะต้องใช้เวลาเท่าใดอากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซ็นต์

นั่นคือ แทนค่า $x = 2000 \times \dfrac{0.015}{100} = 0.3$ ในสมการ $x(t) = 60 - 59.96e^{-\frac{t}{1000}}$ เพื่อหาค่า t

$$0.3 = 60 - 59.96e^{-\frac{t}{1000}}$$

$$e^{-\frac{t}{1000}} = \frac{59.7}{59.96}$$

$$\frac{-t}{1000} = \ln\frac{59.7}{59.96}$$

$$t = -1000\ln\frac{59.7}{59.96}$$

$$t \approx 43.5$$

ดังนั้น อากาศในห้องจึงจะมีคาร์บอนมอนอกไซด์ 0.015 เปอร์เซนต์ เมื่อเวลาผ่านไป 43.5 นาที

ปัญหาการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุ

สุรัตนา สังข์หนุน (2558 : 109-110) ได้กล่าวว่า เมื่อวัตถุอยู่ในตัวกลางที่ล้อมรอบ เช่น อากาศ น้ำ เป็นต้น โดยที่มีอุณหภูมิต่างกัน จะเกิดการถ่ายเทความร้อนระหว่างวัตถุกับตัวกลางที่ล้อมรอบ ทำให้อุณหภูมิของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุในกรณีนี้เป็นไปตามกฎการเย็นตัวของนิวตัน ซึ่งกล่าวว่า “อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบ”

กำหนดให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

และ T_{SM} แทนอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบวัตถุ

โดยกฎการเย็นตัวของนิวตัน จะได้ว่า อุณหภูมิของวัตถุจะเปลี่ยนแปลงไปเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุนั้นกับอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบวัตถุ จะได้ $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_{SM})$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

ตัวอย่าง 3.18 โลหะแท่งหนึ่งใช้เวลา 10 นาที ในการลดอุณหภูมิจาก 100 องศาเซลเซียส เป็น 40 องศาเซลเซียส เมื่อนำแท่งโลหะไปไว้ในห้องเย็นที่มีอุณหภูมิเท่ากับ 20 องศาเซลเซียส จงหาอุณหภูมิของโลหะ ณ เวลา t ใด ๆ

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของแท่งโลหะเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของแท่งโลหะกับอุณหภูมิของห้องเย็น และเนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - 20)$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ ดังต่อไปนี้

$$\frac{dT}{(T - 20)} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\dfrac{dT}{(T - 20)} = -kdt$ จะได้

$$\int \frac{1}{(T - 20)} dT = \int -kdt$$

$$\ln\left|T - 20\right| = -kt + c_1$$

$$T = 20 + ce^{-kt}$$

หรือ

$$T(t) = 20 + ce^{-kt}$$

จากอุณหภูมิของโลหะตอนเริ่มต้นจะได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 100$

แทนในสมการ $T(t) = 20 + ce^{-kt}$ ได้ $c = 80$

แทนค่า $c = 80$ ในสมการ $T(t) = 20 + ce^{-kt}$ จะได้

$$T(t) = 20 + 80e^{-kt}$$

เมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที อุณหภูมิของโลหะแท่งนี้จะลงเหลือ 40 องศาเซลเซียส จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(10) = 40$ แทนลงในสมการ (106) จะได้

$$40 = 20 + 80e^{-10k}$$

$$80e^{-10k} = 20$$

$$e^{-10k} = \frac{1}{4}$$

$$-10k = \ln\frac{1}{4}$$

$$k = -\frac{1}{10}\ln\frac{1}{4}$$

$$k = \frac{1}{5}\ln 2$$

$$k \approx 0.1386$$

แทน $k = 0.1386$ ในสมการ $T(t) = 20 + 80e^{-kt}$ จะได้

$$T(t) = 20 + 80e^{-0.1386t}$$

ดังนั้น อุณหภูมิของโลหะ ณ เวลา t ใด ๆ คือ $T(t) = 20 + 80e^{-0.1386t}$

ตัวอย่าง 3.19 วัตถุชนิดหนึ่งใช้เวลา 2 ชั่วโมง เพื่อที่จะลดอุณหภูมิจาก 70 องศาฟาเรนไฮต์ เหลือ 50 องศาฟาเรนไฮต์ โดยที่อุณหภูมิของอากาศขณะนั้นเป็น 30 องศาฟาเรนไฮต์ จงหาว่าวัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของวัตถุ ณ ขณะเวลา t

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ

อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของอากาศขณะนั้น และเนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

$$\frac{dT}{dt} = -k(T-30)$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ $\dfrac{dT}{dt} = -k(T-30)$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\frac{dT}{(T-30)} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\dfrac{dT}{(T-30)} = -kdt$ จะได้

$$\int \frac{1}{(T-30)}dT = \int -kdt$$

$$\ln\left|T-30\right| = -kt + c_1$$

$$T = 30 + ce^{-kt}$$

หรือ

$$T(t) = 30 + ce^{-kt}$$

อุณหภูมิเริ่มต้นของวัตถุชนิดนี้ ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 70$

แทนในสมการ $T(t) = 30 + ce^{-kt}$ ได้ $c = 40$

แทนค่า $c = 40$ ในสมการ $T(t) = 30 + ce^{-kt}$ จะได้

$$T(t) = 30 + 40e^{-kt}$$

เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง อุณหภูมิของวัตถุนี้จะลดลงเหลือ 50 องศาฟาเรนไฮต์ จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(2) = 50$ แทนลงในสมการ $T(t) = 30 + 40e^{-kt}$ จะได้

$$50 = 30 + 40e^{-2k}$$

$$40e^{-2k} = 20$$

$$e^{-2k} = \frac{1}{2}$$

$$-2k = \ln\frac{1}{2}$$

$$k = -\frac{1}{2}\ln 2$$

$$k \approx -0.3466$$

แทน $k \approx 0.3466$ ในสมการ $T(t) = 30 + 40e^{-kt}$ จะได้

$$T(t) = 30 + 40e^{-0.3466t}$$

วัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลานานเท่าใดจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์ จะได้สมการ

$$40 = 30 + 40e^{-0.3466t}$$

$$e^{-0.3466t} = \frac{1}{4}$$

$$-0.3466t = \ln\frac{1}{4}$$

$$t = -\frac{1}{0.3466}\ln\frac{1}{4}$$

$$t \approx 4$$

ดังนั้น วัตถุชนิดนี้จะต้องใช้เวลา 4 ชั่วโมงจึงจะมีอุณหภูมิ 40 องศาฟาเรนไฮต์

ตัวอย่าง 3.20 นำเทอร์โมมิเตอร์ที่อ่านอุณหภูมิขณะนั้นได้ 80 องศาฟาเรนไฮต์ ออกไปนอกบ้าน 5 นาทีต่อมา อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 60 องศาฟาเรนไฮต์และอีก 5 นาทีต่อมา อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 50 องศาฟาเรนไฮต์ จงหาอุณหภูมินอกบ้าน

วิธีทำ ให้ $T(t)$ แทนอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ ณ ขณะเวลา t

ให้ T_{SM} แทนอุณหภูมิภายนอกบ้าน

ดังนั้น $\dfrac{dT}{dt}$ แทนอัตราการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิที่เทอร์โมมิเตอร์อ่านได้

เนื่องจาก T มีค่าลดลงเมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้น นั่นคือ T เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้นจะได้

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{SM})$$

โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

จัดสมการ $\dfrac{dT}{dt} = -k(T - T_{SM})$ ให้อยู่ในรูปสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\frac{dT}{(T - T_{SM})} = -kdt$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ $\dfrac{dT}{(T - T_{SM})} = -kdt$ จะได้

$$\int \frac{1}{(T - T_{SM})} dT = \int -kdt$$

$$\ln\left|T - T_{SM}\right| = -kt + c_1$$

$$T = T_{SM} + ce^{-kt}$$

หรือ

$$T(t) = T_{SM} + ce^{-kt}$$

เทอร์โมมิเตอร์ที่อ่านอุณหภูมิขณะเริ่มต้นได้ 80 องศาฟาเรนไฮต์ ทำให้ได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(0) = 80$ แทนในสมการ $T(t) = T_{SM} + ce^{-kt}$ ได้ $c = 80 - T_{SM}$

แทนค่า $c = 80 - T_{SM}$ ในสมการ $T(t) = T_{SM} + ce^{-kt}$ จะได้

$$T(t) = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-kt}$$

นำเทอโมมิเตอร์ออกไปนอกบ้าน 5 นาที แล้วอ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 60 องศาฟาเรนไฮต์ จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(5) = 60$

แทน $T(5) = 60$ ลงในสมการ $T(t) = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-kt}$ จะได้

$$60 = T_{SM} + (80 - T_{SM})e^{-5k}$$

และเมื่อเวลาผ่านไป 10 นาที อ่านอุณหภูมิของเทอร์โมมิเตอร์ได้ 50 องศาฟาเรนไฮต์ จึงได้เงื่อนไขเริ่มต้น $T(10) = 50$

แทน $T(10)=50$ ลงในสมการ $T(t)=T_{SM}+(80-T_{SM})e^{-kt}$ จะได้

$$50=T_{SM}+(80-T_{SM})e^{-10k}$$

หรือ

$$50=T_{SM}+(80-T_{SM})(e^{-5k})^2$$

จากสมการ $60=T_{SM}+(80-T_{SM})e^{-5k}$ จะได้

$$e^{-5k}=\frac{60-T_{SM}}{80-T_{SM}}$$

แทน $e^{-5k}=\dfrac{60-T_{SM}}{80-T_{SM}}$ ในสมการ $50=T_{SM}+(80-T_{SM})(e^{-5k})^2$ จะได้

$$\begin{aligned}50&=T_{SM}+(80-T_{SM})\left[\frac{60-T_{SM}}{80-T_{SM}}\right]^2\\50(80-T_{SM})&=T_{SM}(80-T_{SM})+(60-T_{SM})^2\\(50-T_{SM})(80-T_{SM})&=(60-T_{SM})^2\\10T_{SM}&=400\\T_{SM}&=40\end{aligned}$$

ดังนั้น อุณหภูมิภายนอกบ้านเท่ากับ 40 องศาฟาเรนไฮต์

สรุปท้ายบท

การประยุกต์ของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งนั่นคือการนำปัญหาต่างๆ มาสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรต่าง ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ปัญหาวิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัวและ $F(x,y,c)=0$ เป็นวงศ์เส้นโค้งพารามิเตอร์หนึ่งตัว ในระนาบ xy โดยที่ c เป็นพารามิเตอร์ หาอนุพันธ์สมการ เทียบกับ x แล้วจะได้ สมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้ง $\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$ นั่นคือ เส้นโค้งแต่ละเส้นของวงศ์เส้นโค้ง ที่จุด (x,y) ใด ๆ มีความชันเท่ากับ $f(x,y)$ และความชันของแนววิถีเชิงตั้งฉาก ที่จุด (x,y) ใด ๆ เท่ากับ $-\dfrac{1}{f(x,y)}$ จะได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ของวงศ์เส้นโค้งแนววิถีเชิงตั้งฉากคือ $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{f(x,y)}$

การนำความรู้ของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์มาประยุกต์ใช้กับปัญหาทางกลศาสตร์ ในที่นี้เราจะกล่าวเฉพาะปัญหาทางกลศาสตร์พื้นฐานที่ใช้กฎการเคลื่อนที่ของนิวตันได้ ซึ่งกล่าวว่า

1. วัตถุต่าง ๆ จะคงสภาพหยุดยิ่งหรือเคลื่อนที่ไปในแนวเส้นตรงด้วยความเร็วคงที่ เว้นแต่จะมีแรงภายนอกมากระทำ

2. อัตราการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของวัตถุ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรงที่กระทำต่อวัตถุนั้น และมีทิศทางเดียวกับทิศทางของแรงนั้น

3. แรงกริยา และแรงปฏิกิริยา มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้าม

สำหรับปัญหาทางกลศาสตร์นั้น จากกฎข้อที่ 2 ของนิวตัน สามารถเขียนให้อยู่ในรูปของสมการเชิงอนุพันธ์ได้ $\frac{d}{dx}(mv) = KF$

โดยที่ m แทนมวลของวัตถุ

v แทนความเร็วของวัตถุ

F แทนแรงที่มากระทำกับวัตถุ

K แทนค่าคงที่ของการแปรผัน

และสุดท้ายคือปัญหาอัตราการเปลี่ยนแปลงเราสามารถสร้างฟังก์ชันของปริมาณในปัจจุบันกับเวลา และในปัญหาที่ศึกษาต้องการจะหาปริมาณ ณ เวลาใด ๆ ถ้าให้ x แทนปริมาณที่มีอยู่ ณ เวลา t แล้ว $\frac{dx}{dt}$ จะแทนอัตราการเปลี่ยนแปลง ดังนั้นเราสามารถแก้สมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งเป็นตัวแบบทางคณิตศาสตร์ของปัญหานำไปใช้ในการอธิบายตัวแปรหรือปริมาณที่เราสนใจได้อย่างถูกต้อง

รูปแบบของอัตราการเปลี่ยนแปลงของจำนวนประชากร เช่น มนุษย์ สัตว์ แบคทีเรีย เมื่อเวลาเปลี่ยนแปลงไป จำนวนของประชากรจะเปลี่ยนแปลงด้วย ถ้าให้ $N(t)$ แทนจำนวนประชากรกลุ่มหนึ่ง ณ เวลา t ใด ๆ ภายใต้สมมติฐานว่า ไม่มีการอพยพเข้าหรือออกจากกลุ่ม ไม่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างผิดปกติของสภาวะแวดล้อม จะได้ว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงของประชากรเป็นสัดส่วนโดยตรงกับจำนวนประชากรที่มีอยู่ นั่นคือ $\frac{dN}{dt} = kx$ โดยที่ k เป็นค่าคงที่ของการแปรผัน

เมื่อวัตถุอยู่ในตัวกลางที่ล้อมรอบ เช่น อากาศ น้ำ เป็นต้น โดยที่มีอุณหภูมิต่างกัน จะเกิดการถ่ายเทความร้อนระหว่างวัตถุกับตัวกลางที่ล้อมรอบ ทำให้อุณหภูมิของวัตถุเปลี่ยนแปลงไปการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุในกรณีนี้เป็นไปตามกฎการเย็นตัวของนิวตัน ซึ่งกล่าวว่า "อัตราการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิของวัตถุเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุกับอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบ" โดยกฎการเย็นตัวของนิวตัน จะได้ว่า อุณหภูมิของวัตถุจะเปลี่ยนแปลงไปเป็นสัดส่วนกับผลต่างของอุณหภูมิของวัตถุนั้นกับอุณหภูมิของตัวกลางที่ล้อมรอบวัตถุ จะได้ $\frac{dT}{dt} = k(T - T_{SM})$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวของการแปรผัน

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 3

1. จงหาแนววิถีเชิงตั้งฉากของวงศ์เส้นโค้ง ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ โดยที่ c เป็นค่าคงที่ใด ๆ

   1.1 $y = cx^3$ 1.2 $x^2 + cy^2 = 1$ 1.3 $y^2 = cx$ 1.4 $y = (x - c)^2$

2. นักกระโดดร่มคนหนึ่งปล่อยลูกเหล็กหนัก 1 นิวตันซึ่งผูกติดกับร่มขนาดเล็กจากสภาพหยุดนิ่ง ถ้าแรงต้านอากาศเป็นสัดส่วนกับความเร็วของลูกเหล็กขณะนั้น เมื่อลูกเหล็กมีความเร็ว 25 เมตรต่อวินาทีจะมีแรงต้านทานจากอากาศเท่ากับ 900 นิวตัน จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ และความเร็วของวัตถุ ณ เวลา 10 วินาที
3. วัตถุมวล 1 กิโลกรัมตกจากที่สูงลงมาในแนวดิ่งโดยมีแรงต้านทานของอากาศแปรผันตามความเร็วของวัตถุที่ตกลงมา ค่าค่งที่ของการแปรผันเท่ากับ 0.2 จงหาความเร็วของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ
4. วัตถุหนัก 20 ปอนด์ เคลื่อนที่เป็นแนวเส้นตรงในแนวราบ ด้วยแรงที่มีค่าคงที่ 12 ปอนด์ ในการเคลื่อนที่นี้ มีแรงต้านการเคลื่อนที่ขนาดเป็นปอนด์เท่ากับ 4 เท่าของความเร็วของการเคลื่อนที่ ถ้าวัตถุนี้เคลื่อนที่จากสภาพหยุดนิง จงหาความเร็วและระยะทางเมื่อเวลาผ่านไป 0.5 วินาที
5. วัตถุมวล m กิโลกรัมเริ่มต้นเคลื่อนที่จากจุดหยุดนิ่งจากยอดของพื้นเอียงซึ่งทำมุม 45 องศากับพื้นราบ ถ้าสัมประสิทธิ์ของความเสียดทานระหว่างวัตถุกับพื้นเอียงเป็น μ จงหาความเร็ว และความเร่งของวัตถุ ณ เวลา t ใด ๆ
6. สารเรเดียมมีอัตราการสลายตัวเป็นสัดส่วนกับจำนวนที่เหลืออยู่ และพบว่าสารเรเดียมสลายตัว 11 เปอร์เซนต์ของที่มีอยู่ในเวลา 25 ปี จงหาว่าต้องใช้เวลานานเท่าใด สารเรเดียมจะเหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม
7. แบคทีเรียชนิดหนึ่งเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่ ถ้าจำนวนแบคทีเรียเพิ่มเป็น 2 เท่าในเวลา 24 ชั่วโมง จงหาว่าต้องใช้เวลากี่ชั่วโมง แบคทีเรียชนิดนี้จะเพิ่มขึ้นเป็น 100 เท่า
8. แบคทีเรียชนิดหนึ่งมีขนาด 2000 ตัว เมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง จำนวนแบคทีเรียเพิ่มเป็น 2500 ตัว จงหาจำนวนแบคที่เรีย ณ เวลา t ใด ๆ ถ้าแบคทีเรียชนิดนี้เพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนกับจำนวนแบคทีเรียที่มีอยู่
9. อัตราการเพิ่มของประชากรของเมืองหนึ่งเป็นสัดส่วนกับจำนวนประชากรที่มีอยู่ ถ้าจำนวนประชากรของเมืองนี้เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของประชากรที่มีอยู่ในเวลา 50 ปี จงหาจำนวนประชากรของเมื่องนี้ ณ เวลา t ใด ๆ และต้องใช้เวลากี่ปีจำนวนประชากรจึงจะเพิ่มเป็น 3 เท่า
10. เทอร์โมมิเตอร์อันหนึ่งอ่านสเกลได้ 15 องศาเซลเซียส ถูกนำเข้าไปวางไว้ในห้องที่มีอุณหภูมิ 23 องศาเซลเซียส เมื่อเวลาผ่านไป 1 นาที เทอร์โมมิเตอร์อันนั้นอ่านสเกลได้ 19 องศาเซลเซียส จงหาว่าใช้เวลานานเท่าใด เทอร์โมมิเตอร์จึงจะอ่านสเกลได้ 29.9 องศาเซลเซียส

เอกสารอ้างอิง

วชิรารักษ์ โอรสรัมย์. (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** บุรีรัมย์ : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏบุรีรัมย์.

วีระศักดิ์ วาจาบัณฑิตย์. (2541). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพ ฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยรามคำแหง.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพ ฯ : วงตะวัน.

สุรัตนา สังข์หนุน. (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1**. กรุงเทพ ฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

สำเริง ชื่นรังสิกุล. (2555). **สมการเชิงอนุพันธ์.** พิมพ์ครั้งที่ 1. กรุงเทพ ฯ : แอคทีฟ พริ้น จำกัด..

John A. Tierney. (1979). **Differential Equations.** Allyn and Bacon. Atlantic Avenue, Boston.