แผนบริหารการสอนประจำบท
บทที่ 2 สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

เนื้อหาประจำบท

1. สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้
2. สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์
3. สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง
4. ตัวประกอบปริพันธ์
5. สมการเชิงเส้น

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนศึกษาบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. หาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้
2. หาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ได้
3. หาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้
4. หาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงโดยพิจารณาจากตัวประกอบปริพันธ์ได้
5. หาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นได้
6. สามารถปรับสมการที่ไม่เป็นเชิงเส้นให้เป็นสมการเชิงเส้น โดยการประยุกต์ใช้สมการของแบร์นูลลี

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายถึงทฤษฎีบท บทนิยาม และวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง มีการตั้งคำถาม ตอบคำถามระหว่างผู้สอนและผู้เรียน
2. แสดงตัวอย่าง หาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง
3. ให้ผู้เรียนทำใบกิจกรรม
4. สืบค้นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น ทางอินเทอร์เน็ตเพิ่มเติม
5. อภิปราย สรุปประเด็นสำคัญที่เกี่ยวกับวิธีการผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น
6. สรุป และซักถามความเข้าใจท้ายบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เครื่องคอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต
2. เพาเวอร์พอยต์ เรื่องสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง
3. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์
4. โปรแกรม Wolfram Alpha
5. ใบกิจกรรม

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายโต้ตอบ ซักถาม และการแสดงความคิดเห็น
3. สังเกตพฤติกรรมความกระตือรือร้นในการร่วมกิจกรรมและคุณภาพของงานที่มอบหมาย
4. ผลจากการลงมือปฏิบัติด้วยโปรแกรม Wolfram Alpha
5. ตรวจใบกิจกรรม
6. ตรวจแบบฝึกหัด
7. ประเมินจากแบบทดสอบ

บทที่ 2
สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง

ในบทนี้จะศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งในรูปแบบต่าง ๆ ซึ่งสามารถหาคำตอบได้โดยการจัดสมการให้อยู่ในรูปแบบเฉพาะของแต่ละสมการ เริ่มจากสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ เป็นวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งที่ง่ายที่สุด แต่สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งนั้นไม่สามารถหาผลเฉลยของสมการแบบแยกกันได้ ได้ทุกสมการดังนั้นจึงต้องมีการศึกษาการหาผลเฉลยของสมการในรูปแบบอื่น เช่นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง และสมการเชิงเส้น แต่ถ้าสมการไม่อยู่ในรูปแบบกล่าวมาข้างต้นเราสามารถทำให้สมการนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้ โดยการคูณตลอดทั้งสมการด้วยฟังก์ชันที่เหมาะสม และเรียกฟังก์ชันนั้นเรียกว่าตัวประกอบปริพันธ์ ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งและระดับขั้นหนึ่งโดยทั่วไปจะอยู่ในรูปแบบ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่งในรูปแบบต่าง ๆ ดังนี้

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งระดับขั้นหนึ่งที่สามารถเขียนอยู่ในรูป $F(x)dx + G(y)dy = 0$ โดยที่ $F(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x อย่างเดียว และ $G(y)$ เป็นฟังก์ชันของ y ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.1 สมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้ คือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$F(x)dx + G(y)dy = 0$$

(สำเริง ชื่นรังสิกุล. 2555 : 13)

เราสามารถหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันโดยหาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการจะได้ว่า

$$\begin{aligned} F(x)dx + G(y)dy &= 0 \\ \int F(x)\,dx + \int G(y)\,dy &= c \end{aligned}$$

โดยที่ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 2.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$

วิธีทำ จะสังเกตว่า $y = 0$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการเราจะหาผลเฉลยอื่น ๆ โดยสมมติว่า $y \neq 0$

จัดรูปสมการใหม่ จะได้

$$\frac{dy}{dx} = 2xy^2$$

$$\frac{1}{y^2}dy = 2xdx$$

$$\frac{1}{y^2}dy - 2xdx = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ จะได้

$$\int \frac{1}{y^2}dy - \int 2xdx = c$$

$$-\frac{1}{y} - x^2 = c \quad \text{...(1)}$$

สมการ (1) เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$ ถูกนิยามสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x โดยที่ c เป็นค่าคงที่ จากที่เราได้สังเกตแล้วว่า $y = 0$ ก็เป็นผลเฉลยของนี้ด้วย แต่ผลเฉลยนี้ไม่ได้มาจากการกำหนดค่าเฉพาะใด ๆ ของ c ใน $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$ ดังนั้นเราสรุปได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$ มี $-\dfrac{1}{y} - x^2 = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปที่ถูกนิยามว่าเป็นผลเฉลยเอกฐานที่ถูกนิยามบนเซตของจำนวนจริง

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2$ คือ $-\dfrac{1}{y} - x^2 = c$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x และ $y \neq 0$

ข้อสังเกต 2.1

จากตัวอย่าง 2.1 วิธีการแยกตัวแปรนี้อาจทำให้ผลเฉลยบางผลเฉลยหายไปได้ ดังนั้นเราต้องตรวจสอบอย่างระมัดระวังเสมอ

หมายเหตุ 2.1

จะเห็นว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีระดับขั้นหนึ่ง จะมีค่าคงที่เพียง 1 ตัว ดังนั้นจากนี้เป็นต้นไปการหาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการแบบแยกกันได้จะมีค่าคงที่เพียงค่าเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{y}$

วิธีทำ จาก $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{y}$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{2x}{y}\\ ydy&=2xdx\\ ydy-2xdx&=0\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int y\,dy-\int 2x\,dx=0$$

$$\frac{y^2}{2}-x^2=c_1 \text{ เมื่อ } c_1 \text{ เป็นค่าคงที่}$$

นำ 2 คูณตลอดทั้งสมการ ได้

$$y^2-2x^2=2c_1$$

ให้ $c=2c_1$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ ได้

$$y^2-2x^2=c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x}{y}$ คือ $y^2-2x^2=c$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $x\neq 0$

ตัวอย่าง 2.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2(y+2)dx-xdy=0$

วิธีทำ จาก $x^2(y+2)dx-xdy=0$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\begin{aligned}x^2(y+2)dx-xdy&=0\\ \frac{x^2(y+2)}{x(y+2)}dx-\frac{x}{x(y+2)}dy&=0\\ xdx-\frac{1}{(y+2)}dy&=0\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int x\,dx-\int\frac{1}{(y+2)}=c$$

$$\frac{x^2}{2}-\ln\left|y+2\right|=c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $x^2(y+2)dx-xdy=0$ คือ $\dfrac{x^2}{2}-\ln\left|y+2\right|=c$

ตัวอย่าง 2.4 จงหาผลเฉลยของสมการ $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=2y$

วิธีทำ จาก $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=2y$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$
\begin{aligned}
(x+1)\frac{dy}{dx} &= 2y \\
(x+1)dy &= 2y\,dx \\
\frac{1}{y}dy &= \frac{2}{x+1}dx \\
\frac{1}{y}dy-\frac{2}{x+1}dx &= 0
\end{aligned}
$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{y}dy-\int\frac{2}{x+1}dx &= c \\
\ln\left|y\right|-2\ln\left|x+1\right| &= c
\end{aligned}
$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(x+1)\dfrac{dy}{dx}=2y$ คือ $\ln\left|y\right|-2\ln\left|x+1\right|=c$

ตัวอย่าง 2.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'=e^{x+y}$ และผลเฉลยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=0$

วิธีทำ จาก $y'=e^{x+y}$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= e^{x}e^{y} \\
\frac{1}{e^{y}}dy &= e^{x}dx \\
\frac{1}{e^{y}}dy-e^{x}dx &= 0
\end{aligned}
$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{e^{y}}dy-\int e^{x}dx &= c_1 \\
-e^{-y}-e^{x} &= c_1 \\
e^{-y}+e^{x} &= -c_1
\end{aligned}
$$

ให้ $c=-c_1$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ ได้ $e^{-y}+e^{x}=c$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'=e^{x+y}$ คือ $e^{-y}+e^{x}=c$

หาผลเฉลยเฉพาะ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$

แทนค่า $x = 0$ และ $y = 0$ ในสมการ $e^{-y} + e^{x} = c$ ได้

$$e^{-0} + e^{0} = c$$
$$1 + 1 = c$$
$$2 = c$$

แทนค่า $c = 2$ ในสมการ $e^{-y} + e^{x} = c$ จะได้

$$e^{-y} + e^{x} = 2$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y' = e^{x+y}$ เมื่อ $y(0) = 0$ คือ $e^{-y} + e^{x} = 2$

ตัวอย่าง 2.6 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $2(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$ และผลเฉลยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = -1$

วิธีทำ จาก $2(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$2(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$$
$$\frac{2}{1+x^2}dx + \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int \frac{2}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{1+y^2}dy = c$$
$$2\arctan x + \arctan y = c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ $2(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$ คือ $2\arctan x + \arctan y = c$

หาผลเฉลยเฉพาะ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = -1$

แทนค่า $x = 0$ และ $y = -1$ ในสมการ $2\arctan x + \arctan y = c$ ได้

$$2\arctan(0) + \arctan(-1) = c$$
$$0 - \frac{\pi}{4} = c$$
$$c = -\frac{\pi}{4}$$

แทนค่า $c = -\frac{\pi}{4}$ ในสมการ $2\arctan x + \arctan y = c$ จะได้

$$2\arctan x + \arctan y = -\frac{\pi}{4}$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $2(1+y^2)dx + (1+x^2)dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$ คือ

$$2\arctan x + \arctan y = -\frac{\pi}{4}$$

ตัวอย่าง 2.7 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $4\sin^2 xdy + \sec^2 ydx = 0$ และผลเฉลยเฉพาะเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

วิธีทำ จาก $4\sin^2 xdy + \sec^2 ydx = 0$

จัดสมการใหม่ให้อยู่ในรูปแบบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแยกกันได้

$$\begin{aligned}
4\sin^2 xdy + \sec^2 ydx &= 0 \\
\frac{4}{\sec^2 y}dy + \frac{1}{\sin^2 x}dx &= 0 \\
4\cos^2 ydy + \csc^2 xdx &= 0
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\begin{aligned}
\int 4\cos^2 ydy + \int \csc^2 xdx &= c \\
2\int (1+\cos 2y)dy + \int \csc^2 xdx &= c \\
2\int dy + 2\int \cos 2ydy + \int \csc^2 xdx &= c \\
2\int dy + 2\int \cos 2yd\frac{2y}{2} + \int \csc^2 xdx &= c \\
2\int dy + \int \cos 2yd2y + \int \csc^2 xdx &= c \\
2y + \sin 2y - \cot x &= c
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของ $4\sin^2 xdy + \sec^2 ydx = 0$ คือ

$$2y + \sin 2y - \cot x = c$$

หาผลเฉลยเฉพาะ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

แทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ และ $y = \pi$ ในสมการ $2y + \sin 2y - \cot x = c$ ได้

$$\begin{aligned}
2y + \sin 2y - \cot x &= c \\
2\pi + \sin 2\pi - \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) &= c \\
2\pi + 0 - 0 &= c \\
2\pi &= c \\
c &= 2\pi
\end{aligned}$$

แทนค่า $c = 2\pi$ ในสมการ $4\sin^2 xdy + \sec^2 ydx = 0$ จะได้

$$\begin{aligned}
2y + \sin 2y - \cot x &= c \\
2y + \sin 2y - \cot x &= 2\pi
\end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $4\sin^2 xdy + \sec^2 ydx = 0$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ คือ

$$2y + \sin 2y - \cot x = 2\pi$$

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

สมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งระดับขั้นหนึ่งที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ โดยที่ $M(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y ซึ่งเราสามารถจัดสมการดังกล่าวได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$ ดังจะกล่าวในบทนิยามต่อไปนี้ (ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. 2542 : 134)

บทนิยาม 2.2 สมการเอกพันธุ์ คือ สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งที่เขียนได้ในรูป $\dfrac{dy}{dx}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ตัวอย่าง 2.8 จงแสดงว่าสมการ $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$ เป็นสมการเอกพันธุ์

วิธีทำ จาก $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$

เขียนใหม่ได้ในรูป

$$
\begin{aligned}
(x^2-xy+y^2)dx-xydy&=0\\
(x^2-xy+y^2)dx&=xydy\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{x^2-xy+y^2}{xy}\\
&=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\\
&=\frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)}+\left(\frac{y}{x}\right)-1\\
&=g\left(\frac{y}{x}\right)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $\dfrac{dy}{dx}=g\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ดังนั้น สมการ $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$ เป็นสมการเอกพันธุ์

ข้อสังเกต 2.2

จากตัวอย่าง 2.8 จะเห็นว่าการตรวจสอบสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์นั้นไม่ยากเพราะสมการ $(x^2-xy+y^2)dx-xydy=0$ นั้นเป็นสมการที่ไม่ซับซ้อน แต่ถ้าสมการที่ซับซ้อนนั้น การจะตรวจสอบก็จะมีความยุ่งยากและเสียเวลาอย่างมากในการจัดสมการเพื่อตรวจสอบ จึงมีวิธีการที่จะช่วยในการตรวจสอบที่ง่ายขึ้น ซึ่งจะกล่าวถึงในบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 2.3 ฟังก์ชันเอกพันธุ์ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น n ถ้า $f(kx,ky)=k^n f(x,y)$ เมื่อเป็นจำนวนเต็มบวก n และ k เป็นค่าคงตัว (สำเริง ชื่นรังสิกุล. 2555 : 19)

ตัวอย่าง 2.9 $f(x,y)=x^2y-2x^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จาก
$$
\begin{aligned}
f(kx,ky) &= (kx)^2ky-2(kx)^3 \\
&= k^2x^2ky-2k^3x^3 \\
&= k^3x^2y-2k^3x^3 \\
&= k^3(x^2y-2x^3) \\
&= k^3f(x,y)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $f(kx,ky)=k^3f(x,y)$

ดังนั้น $f(x,y)=x^2y-5x^3$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 3

ตัวอย่าง 2.10 $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}+\cos\frac{x}{y}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จาก
$$
\begin{aligned}
f(kx,ky) &= e^{\frac{kx}{ky}}+\cos\frac{kx}{ky} \\
&= e^{\frac{x}{y}}+\cos\frac{x}{y} \\
&= f(x,y) \\
&= k^0f(x,y)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $f(kx,ky)=k^0f(x,y)$

ดังนั้น $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}+\cos\frac{x}{y}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 0

ตัวอย่าง 2.11 $f(x,y)=3xy-x^3y$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ จาก
$$
\begin{aligned}
f(kx,ky) &= 3(kx)(ky)-(kx)^3ky \\
&= 3k^2xy-k^3x^3ky \\
&= 3k^2xy-k^4x^3y \\
&= k^2(3xy-k^2x^3y) \\
&\neq k^2f(x,y)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $f(kx,ky)\neq k^nf(x,y)$

ดังนั้น $f(x,y)=3xy-x^3y$ ไม่เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น n แล้ว $f(x,y) = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นศูนย์

ทฤษฎีบท 2.2 ถ้า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้นศูนย์ แล้ว f เป็นฟังก์ชันของ $\dfrac{x}{y}$

จากทฤษฎีบท 2.1 และทฤษฎีบท 2.2 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้ซึ่งจะนำใช้ในการตรวจสอบสมการเชิงอนุพันธ์ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ (วารี เกรอต. 2542 : 21-22)

ทฤษฎีบท 2.3 ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้นเท่ากันแล้ว สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

ตัวอย่าง 2.12 จงตรวจสอบสมการ $(xy + y^2)dx + 2xydy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์หรือไม่

วิธีทำ ให้ $M(x,y) = xy + y^2$

พิจารณา
$$\begin{aligned} M(kx,ky) &= kxky + (ky)^2 \\ &= k^2xy + k^2y^2 \\ &= k^2(xy + y^2) \\ &= k^2M(x,y) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $M(kx,ky) = k^2M(x,y)$

ได้ $M(x,y) = xy + y^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

ให้ $N(x,y) = 2xy$

พิจารณา
$$\begin{aligned} N(kx,ky) &= 2kxky \\ &= k^2 2xy \\ &= k^2N(x,y) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $N(kx,ky) = k^2N(x,y)$

ได้ $N(x,y) = 2xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

จาก $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2 เท่ากัน

ดังนั้น สมการ $(xy + y^2)dx + 2xydy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์ (2544 : 18) ได้กล่าวว่า หลังจากที่ตรวจสอบสมการไปแล้วว่าสมการใดที่อยู่ในรูปแบบสมการเอกพันธุ์ และถ้าสมการใดที่เป็นสมการที่อยู่ในรูปแบบสมการเอกพันธุ์แล้ว เราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ตามขั้นตอนดังต่อไปนี้

วิธีหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

จาก $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ จัดรูปสมการใหม่ได้ดังนี้

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{M(x,y)}{N(x,y)} = 0$$

จากบทนิยาม 2.2 เราได้

$$\frac{dy}{dx} + g\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \text{...} (1)$$

กำหนดให้ $y = vx$ จะได้ $v = \dfrac{y}{x}$ แทนในสมการ (1) ได้

$$\frac{d(vx)}{dx} + g(v) = 0$$

$$\frac{vdx}{dx} + \frac{xdv}{dx} + g(v) = 0$$

$$v + x\frac{dv}{dx} + g(v) = 0$$

$$v + g(v) = -x\frac{dv}{dx}$$

$$\frac{1}{x}dx = -\frac{1}{v+g(v)}dv$$

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{v+g(v)}dv = 0$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ และใช้วิธีการหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรเหมือนกับในหัวข้อ 2.1 ที่ผ่านมา แล้วแทนค่า $v = \dfrac{y}{x}$ กลับคืน แล้วจะได้ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ตามที่ต้องการ

ตัวอย่าง 2.13 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ ว่าเป็นสมการแบบเอกพันธุ์หรือไม่

ให้ $M(x,y) = x^2 - xy + y^2$

พิจารณา $M(kx,ky) = (kx)^2 - kxky + (ky)^2$

$$= k^2x^2 - kxky + k^2y^2$$
$$= k^2x^2 - k^2xy + k^2y^2$$
$$= k^2(x^2 - xy + y^2)$$
$$= k^2M(x,y)$$

เนื่องจาก $M(kx,ky) = k^2M(x,y)$

ได้ $M(x,y) = x^2 - xy + y^2$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

ให้ $N(x,y) = xy$

พิจารณา $N(kx,ky) = kxky$

$$= k^2xy$$
$$= k^2N(x,y)$$

เนื่องจาก $N(kx,ky) = k^2N(x,y)$

ได้ $N(x,y) = xy$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2

จาก $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 2 เท่ากัน

ดังนั้น สมการ $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

หาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

โดยให้ $y = vx$ แทนในสมการ $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$ ได้

$$(x^2 - vx^2 + (vx)^2)dx - xvxd(vx) = 0$$
$$(x^2 - vx^2 + v^2x^2)dx - vx^2(vdx + xdv) = 0$$
$$x^2dx - vx^2dx + v^2x^2dx - v^2x^2dx - vx^3dv = 0$$
$$x^2dx - vx^2dx = vx^3dv$$
$$(x^2 - vx^2)dx = vx^3dv$$
$$x^2(1-v)dx = vx^3dv$$
$$\frac{1}{x}dx = \frac{v}{1-v}dv$$
$$\frac{1}{x}dx + \frac{v}{v-1}dv = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int \frac{1}{x}dx + \int\left(1 + \frac{1}{v-1}\right)dv = c_1$$
$$\ln\left|x\right| + v + \ln\left|v-1\right| = c_1$$
$$\ln\left|x\right| + \ln\left|v-1\right| = -v + c_1$$

$$\ln\left|x(v-1)\right| = -v + c_1$$
$$x(v-1) = e^{-v+c_1}$$
$$x(v-1) = e^{-v}e^{c_1}$$
$$x(v-1)e^{-v} = e^{c_1}$$

ให้ $e^{c_1} = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว ได้

$$x(v-1)e^{v} = c$$

แทนค่า $v = \dfrac{y}{x}$ ในสมการ ได้

$$x\left(\frac{y}{x}-1\right)e^{\frac{y}{x}} = c$$
$$(y-x)e^{\frac{y}{x}} = c$$

ดังนั้น $(y-x)e^{\frac{y}{x}} = c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

ตัวอย่าง 2.14 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ และจงหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อกำหนด $y(\sqrt{3}) = 1$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ ว่าเป็นสมการแบบเอกพันธุ์หรือไม่

ให้ $M(x,y) = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

พิจารณา $M(kx,ky) = ky + \sqrt{(kx)^2 + (ky)^2}$
$$= ky + k\sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= k(y + \sqrt{x^2 + y^2})$$
$$= kM(x,y)$$

เนื่องจาก $M(kx,ky) = k(x,y)$

ได้ $M(x,y) = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 1

ให้ $N(x,y) = -x$

พิจารณา
$$N(kx,ky) = -kx$$
$$= k(-x)$$
$$= kN(x,y)$$

เนื่องจาก $N(kx,ky) = kN(x,y)$

ได้ $N(x,y) = -x$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 1

จาก $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ระดับขั้น 1 เท่ากัน

ดังนั้น สมการ $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์

หาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$

ให้ $y = vx$ แทนในสมการ $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$ได้

$$(vx+\sqrt{x^2+(vx)^2})dx - xd(vx) = 0$$

$$(vx+\sqrt{x^2+v^2x^2})dx - x(vdx+xdv) = 0$$

$$(vx+\sqrt{x^2(1+v^2})dx - vxdx - x^2dv = 0$$

$$(vx+x\sqrt{(1+v^2})dx - vxdx - x^2dv = 0$$

$$x(v+\sqrt{1+v^2})dx - vxdx = x^2dv$$

$$x\left((v+\sqrt{1+v^2}) - v\right)dx = x^2dv$$

$$x(\sqrt{1+v^2})dx = x^2dv$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv$$

$$\frac{1}{x}dx - \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv = 0$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}dv = 0$$

$$\ln\left|x\right| - \ln\left|v+\sqrt{v^2+1}\right| = c_1$$

$$\ln\left|\frac{x}{v+\sqrt{v^2+1}}\right| = c_1$$

$$\frac{x}{v+\sqrt{v^2+1}} = e^{c_1}$$

ให้ $e^{c_1} = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ ได้

$$\frac{x}{v+\sqrt{v^2+1}} = c$$

แทนค่า $v = \dfrac{y}{x}$ ในสมการ ได้

$$\frac{x}{\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1}} = c$$

$$\frac{x}{\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2+x^2}{x^2}}} = c$$

$$\frac{x^2}{y+\sqrt{y^2+x^2}}=c$$

ดังนั้น $\dfrac{x^2}{y+\sqrt{y^2+x^2}}=c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$

หาผลเฉลยเฉพาะจากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(\sqrt{3})=1$

แทนค่า $x=\sqrt{3}$ และ $y=1$ ในสมการ $\dfrac{x^2}{y+\sqrt{y^2+x^2}}=c$ ได้

$$\frac{(\sqrt{3})^2}{1+\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}}=c$$

$$\frac{3}{1+\sqrt{1+3}}=c$$

$$1=c$$

แทนค่า $c=1$ ในสมการ $\dfrac{x^2}{y+\sqrt{y^2+x^2}}=c$ ได้

$$\frac{x^2}{y+\sqrt{y^2+x^2}}=1$$

ดังนั้น $\dfrac{x^2}{y+\sqrt{y^2+x^2}}=1$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-xdy=0$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(\sqrt{3})=1$

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงคือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งระดับขั้นหนึ่งที่อยู่ในรูป $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ โดยที่ $M(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ x,y สมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ในโดเมน D ถ้ามีฟังก์ชัน F ที่สอดคล้องกับ $dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$ สำหรับทุก x ในโดเมน D ดังบทนิยามต่อไปนี้ (Spiegel, Murray R. 1958 : 27)

บทนิยาม 2.4 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ในโดเมน D ถ้ามีฟังก์ชัน F ที่สอดคล้องกับ

$$dF(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

สำหรับทุก x ในโดเมน D

ตัวอย่าง 2.15 สมการ $xdy + ydx = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

เพราะเมื่อให้ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = xdy + ydx$ และ $F(x,y) = xy$ แล้ว

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= d(xy) \\ &= xdy + ydx \\ &= M(x,y)dx + N(x,y)dy \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.16 สมการ $\frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

เพราะ เมื่อให้ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$ และ $F(x,y) = \frac{x}{y}$ แล้ว

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= d(\frac{x}{y}) \\ &= \frac{ydx - xdy}{y^2} \\ &= \frac{ydx}{y^2} - \frac{xdy}{y^2} \\ &= \frac{1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy \\ &= M(x,y)dx + N(x,y)dy \end{aligned}$$

ข้อสังเกต 2.3

จะเห็นว่า $F(x,y) = c$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงเพราะ $dF(x,y) = 0$ จึงได้ว่า $F(x,y) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ถ้ากำหนดสมการเชิงอนุพันธ์มาให้แล้ว ถ้าจะตรวจสอบจากนิยาม ว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงก็จะหาคำตอบได้จาก $F(x,y) = c$ แต่ถ้าไม่สามารถตรวจสอบจากนิยามว่าเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง จะมีเงื่อนไขอื่นที่ช่วยในการตรวจสอบอีกหรือไม่ และจะมีวิธีการหาคำตอบได้อย่างไร ถ้าสมการนั้นเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ดังนั้น จึงต้องพยายามหาเงื่อนไขที่จะตรวจสอบสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ดังต่อไปนี้

จากบทนิยาม 2.4 สมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ถ้ามีฟังก์ชัน F ที่ทำให้

$$dF(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

เนื่องจาก

$$dF(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dx + \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)dy \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

จากสมการ (1) และ (2) ได้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)dx+\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy$$

และจะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=M(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=N(x,y)$$

โดยการหาอนุพันธ์ย่อย ได้

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

สำหรับฟังก์ชัน $F(x,y)$ เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปรที่มีความต่อเนื่องบนโดเมน D และ $F(x,y)$ หาค่าได้และต่อเนื่องทุก ๆ (x,y) แล้ว $\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}F(x,y)=\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}F(x,y)$ ทำให้ได้ว่า $\dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ และสามารถสรุปเป็นทฤษฎีได้ดังนี้ (สุรัตนา สังข์หนุน. 2558 : 41)

ทฤษฎีบท 2.4 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่ง $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ โดยที่ $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ และ $\dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ ต่อเนื่องทุก ๆ (x,y) ในโดเมน D

1. สมการดังกล่าวเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงในในโดเมน D แล้ว

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \text{ สำหรับทุก ๆ } (x,y) \text{ ในโดเมน } D$$

2. ในทางกลับกัน ถ้า

$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \text{ สำหรับทุก ๆ } (x,y) \text{ ในโดเมน } D$$

แล้วสมการดังกล่าวจะเป็นสมการแม่นตรงในโดเมน D

ตัวอย่าง 2.17 สมการ $\dfrac{1}{y}dx-\dfrac{x}{y^2}dy=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

เพราะ เมื่อ $M(x,y)=\dfrac{1}{y}$ และ $N(x,y)=-\dfrac{x}{y^2}$

พิจารณา
$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}y^{-1}$$
$$=-\frac{1}{y^{2}}$$

และ
$$\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^{2}}\right)$$
$$=-\left(\frac{1}{y^{2}}\right)\frac{\partial x}{\partial x}$$
$$=-\frac{1}{y^{2}}$$

จะเห็นว่า
$$\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$$

หลังจากที่ตรวจสอบสมการไปแล้วว่าสมการใดที่อยู่ในรูปแบบสมการแม่นตรง และถ้าสมการใดที่เป็นสมการที่อยู่ในรูปแบบสมการแม่นตรงแล้วเราสามารถหาผลเฉลยของสมการตามขั้นตอนดังต่อไปนี้ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์. 2544 : 23-24)

วิธีหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จาก $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงที่มี $F(x,y)=c$ เป็นผลเฉลย

จากบทนิยาม 2.4 ได้

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=M(x,y) \quad \text{และ} \quad \frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=N(x,y)$$

หาปริพันธ์ของ $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=M(x,y)$ เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

$$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx$$
$$F(x,y)=G(x,y)+\varphi(y) \quad \text{..(1)}$$

เมื่อ $\varphi(y)$ เป็นค่าคงตัวของการหาปริพันธ์

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (1) เทียบกับตัวแปร y ได้

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\big(G(x,y)+\varphi(y)\big)$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)+\varphi'(y)$$

จากสมการ $\dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y)$ ได้

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}G(x,y) + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}G(x,y)$$

หาค่า $\varphi(y)$ แล้วนำค่าที่ได้แทนในสมการ (1) จะได้ผลเฉลยทั่วไปตามต้องการ

หรือจะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อีกหนึ่งวิธีดังนี้

หาปริพันธ์ของ $\dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y) = N(x,y)$ เทียบกับตัวแปร y โดยให้ x เป็นค่าคงตัว ได้

$$F(x,y) = \int N(x,y)\,dx$$

$$F(x,y) = H(x,y) + \psi(x) \quad \text{.......................................(2)}$$

เมื่อ $\psi(x)$ เป็นค่าคงตัวของการหาปริพันธ์

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (2) เทียบกับตัวแปร x ได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\big(H(x,y) + \psi(x)\big)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}H(x,y) + \psi'(x)\end{aligned}$$

จากสมการ $\dfrac{\partial}{\partial x}F(x,y) = M(x,y)$ ได้

$$M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}H(x,y) + \psi'(x)$$

$$\psi'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}H(x,y)$$

หาค่า $\varphi(y)$ แล้วนำค่าที่ได้แทนในสมการ (2) จะได้ผลเฉลยทั่วไปตามต้องการ

ตัวอย่าง 2.18 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y)dy = 0$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y)dy = 0$ ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรงหรือไม่

ให้ $M(x,y) = 2xy - 3x^2$ ได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 3x^2)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}2xy - \frac{\partial}{\partial y}3x^2\\ &= 2x + 0\\ &= 2x\end{aligned}$$

ให้ $$N(x,y) = x^2 + y \text{ ได้}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}x^2 + \frac{\partial}{\partial x}y \\
&= 2x + 0 \\
&= 2x
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ ดังนั้น $(2xy - 3x^2)dx + (x^2 + y)dy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จาก $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 2xy - 3x^2$ และ $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^2 + y$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ $\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) = 2xy - 3x^2$ เทียบกับตัวแปร x โดยให้ y เป็นค่าคงตัว ได้

$$F(x,y) = x^2y - x^3 + \varphi(y) \quad \text{......................................(1)}$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (1) เทียบกับตัวแปร y ได้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y - x^3 + \varphi(y)\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y}x^2y - \frac{\partial}{\partial y}x^3 + \varphi'(y)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^2 + \varphi'(y) \quad \text{..(2)}$$

จากสมการ $\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = x^2 + y$ และสมการ (2) ได้

$$\begin{aligned}
x^2 + y &= x^2 + \varphi'(y) \\
\varphi'(y) &= y
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\begin{aligned}
\int \varphi'(y) &= \int y dy \\
\varphi(y) &= \frac{y^2}{2} + c
\end{aligned}$$

นำ $\varphi(y) = \frac{y^2}{2} + c$ แทนในสมการ (1) ได้

$$F(x,y) = x^2y - x^3 + \frac{y^2}{2} + c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(2xy-3x^2)dx+(x^2+y)dy=0$ คือ $x^2y-x^3+\dfrac{y^2}{2}=c$

หรือจะหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อีกหนึ่งวิธีดังนี้

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ $\dfrac{\partial}{\partial y}F(x,y)=x^2+y$ เทียบกับตัวแปร y โดยให้ x เป็นค่าคงตัว ได้

$$F(x,y)=x^2y+\frac{y^2}{2}+\psi(x) \quad \text{....................................(1)}$$

หาอนุพันธ์ตลอดสมการ (1) เทียบกับตัวแปร x ได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)&=\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y+\frac{y^2}{2}+\psi(x)\right)\\&=\frac{\partial}{\partial x}x^2y+\frac{\partial}{\partial x}\frac{y^2}{2}+\psi'(x)\\&=2xy+0+\psi'(x)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=2xy+\psi'(x) \quad \text{..(2)}$$

จากสมการ $\dfrac{\partial}{\partial x}F(x,y)=2xy-3x^2$ และสมการ (2) ได้

$$\begin{aligned}2xy-3x^2&=2xy+\psi'(x)\\-3x^2&=\psi'(x)\\\psi'(x)&=-3x^2\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\begin{aligned}\int\psi'(x)&=\int -3x^2dx\\&=-3\int x^2dx\\\psi(x)&=-x^3+c\end{aligned}$$

นำ $\psi(x)=-x^3+c$ แทนในสมการ (1) ได้

$$\begin{aligned}F(x,y)&=x^2y+\frac{y^2}{2}-x^3+c\\&=x^2y-x^3+\frac{y^2}{2}+c\end{aligned}$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(2xy-3x^2)dx+(x^2+y)dy=0$ คือ $x^2y-x^3+\dfrac{y^2}{2}=c$

จากการหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในตัวอย่าง 2.18 ทั้งสองวิธี พบว่าได้ผลเฉลยเดียวกัน ดังนั้นการจะหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงนั้นสามารถทำในวิธีใดก็ได้เพราะคำตอบที่ได้ออกมาจะเท่ากันเสมอ

หมายเหตุ 2.2 การหาผลเฉลยทั่วไปของสมการแม่นตรง อาจทำได้โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับค่าเชิงอนุพันธ์รวมของฟังก์ชัน เช่นตัวอย่าง 2.18 มีวิธีการหาผลเฉลยดังนี้

จาก $(2xy-3x^2)dx+(x^2+y)dy=0$

จัดรูปสมการใหม่ ได้

$$2xydx-3x^2dx+x^2dy+ydy=0$$

$$d\left(x^2y-x^3+\frac{y^2}{2}\right)=0$$

$$x^2y-x^3+\frac{y^2}{2}=c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(2xy-3x^2)dx+(x^2+y)dy=0$ คือ $x^2y-x^3+\dfrac{y^2}{2}=c$

ตัวอย่าง 2.19 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(2xy^3-ye^{-x})dx+(3x^2y^2+e^{-x}-4)dy=0$

วิธีทำ จาก $(2xy^3-ye^{-x})dx+(3x^2y^2+e^{-x}-4)dy=0$

จัดรูปสมการใหม่ ได้

$$(2xy^3-ye^{-x})dx+(3x^2y^2+e^{-x}-4)dy=0$$

$$2xy^3dx-ye^{-x}dx+3x^2y^2dy+e^{-x}dy-4dy=0$$

$$d(x^2y^3+ye^{-x}-4y)=0$$

$$x^2y^3+ye^{-x}-4y=c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(2xy^3-ye^{-x})dx+(3x^2y^2+e^{-x}-4)dy=0$ คือ

$$x^2y^3+ye^{-x}-4y=c$$

ตัวอย่าง 2.20 จงหาผลเฉลยทั่วไปของ $(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y-y)dy=0$

วิธีทำ จาก $(2x\cos y+3x^2y)dx+(x^3-x^2\sin y-y)dy=0$

จัดรูปสมการใหม่ ได้

$$(2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0$$
$$2x\cos y dx + 3x^2 y dx + x^3 dx - x^2\sin y dx - y dy = 0$$
$$d\left(x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2}\right) = 0$$
$$x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(2x\cos y + 3x^2y)dx + (x^3 - x^2\sin y - y)dy = 0$ คือ

$$x^2\cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$$

ตัวประกอบปริพันธ์

ในหัวข้อที่ผ่านมาเป็นการหาผลเฉลยของสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ที่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ในความเป็นจริงแล้วสมการเชิงอนุพันธ์นั้นอาจจะไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงเสมอไป แต่เมื่อเราคูณสมการนั้นด้วยฟังก์ชันบางอย่างแล้ว ทำให้สมการนั้นกลายเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงได้ ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาว่าจะทราบได้อย่างไรว่าสมการที่เราสนใจนั้น ถ้าไม่ใช่สมการแบบแม่นตรงแล้วเราจะทำให้สมการเป็นสมการแบบแม่นตรงได้หรือไม่ ถ้าได้เราจะหาฟังก์ชันที่นำมาคูณสมการแล้วทำให้สมการที่ได้จากการคูณด้วยฟังก์ชันนั้นกลายเป็นสมการแบบแม่นตรงได้อย่างไรซึ่งจะได้กล่าวในบทนิยามต่อไป (ศิริพร พัสดร. 2552 : 63-64)

บทนิยาม 2.5 ถ้าสมการ $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงแล้วเรียกฟังก์ชัน μ ว่า ตัวประกอบปริพันธ์

ถ้า μ คือฟังก์ชันซึ่งทำให้สมการ $\mu\Big(M(x,y)dx + N(x,y)dy\Big) = 0$ เป็นสมการแม่นตรง

ตัวอย่าง 2.21 สมการ $ydx + 2xdy = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

นำ y คูณตลอดสมการนี้ ได้

$$y(ydx + 2xdy) = 0$$
$$y^2dx + 2xydy = 0$$

และจะเห็นว่าสมการ $y^2dx + 2xxdy = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

ดังนั้น y คือตัวประกอบปริพันธ์

การหาตัวประกอบปริพันธ์ในตัวอย่าง 2.21 นั้นหาได้ไม่ยากเพราะสมการนั้นเป็นสมการที่ไม่ซับซ้อน แต่ถ้าสมการที่ซับซ้อน แล้วการหาตัวประกอบปริพันธ์ก็จะยากขึ้นดังนั้นจึงมีวิธีการหาตัวประกอบปริพันธ์ดังต่อไปนี้ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์. 2554 : 30-31)

การหาตัวประกอบปริพันธ์

กำหนดให้สมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

สมมติให้ $\mu(x,y)$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ของสมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$

จากบทนิยาม 2.5 จะได้ว่า

$$\mu(x,y)(M(x,y)dx+N(x,y)dy)=0$$

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

เป็นสมการแม่นตรง

โดยทฤษฎีบท 2.4 จะได้ว่า

$$\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)N(x,y)$$

$$\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx+M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)=\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)+N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)$$

$$\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx-\mu(x,y)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)=N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)-M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)$$

หาฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ โดยจัดกลุ่มใหม่ได้

$$\mu(x,y)\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right]=N(x,y)\frac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)-M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)\quad ....(1)$$

จะพบว่าสมการ (1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยซึ่งการหา μ นั้นจะไม่สามารถทำได้ง่าย แต่ถ้าเราจำกัดให้ μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x หรือตัวแปร y เพียงอย่างเดียวการแก้สมการหาค่า μ จะเป็นการแก้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ ดังนั้นการพิจารณาหาค่า μ จากสมการ (1) จะแบ่งเป็น 2 กรณีดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 μ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปตัวแปร x อย่างเดียว แล้ว $\dfrac{\partial\mu}{\partial y}=0$ และจากสมการ (1)

เมื่อ $\mu(x,y)=\mu(x)$ จะได้ $\dfrac{\partial}{\partial x}\mu(x,y)$ เป็น $\dfrac{d}{dx}\mu(x)$ แทนค่าในสมการ (1) ได้

$$\mu(x)\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)-\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right]=N(x,y)\frac{d}{dx}\mu(x)\quad ....(2)$$

กำหนดให้ $N=N(x,y)$ และ $M=M(x,y)$

แทน $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ แทนด้วย M_y และ $\dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ แทนด้วย N_x ในสมการ (2) ได้

$$\mu(x)\left[M_y-N_x\right]=N\frac{d}{dx}\mu(x)$$

คูณตลอดสมการนี้ด้วย $\dfrac{1}{\mu(x)N}$ จะได้

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1}{\mu(x)} \frac{d}{dx} \mu(x)$$

ให้ $f(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N}$ แล้วจัดรูปสมการได้

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = f(x)dx$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\ln\left|\mu(x)\right| = \int f(x)\,dx$$

และจากสมบัติของลอการิทึม ได้

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

นั่นคือเมื่อ $f(x) = \dfrac{M_y - N_x}{N}$ จะได้ $\mu(x) = e^{\int f(x)dx}$

กรณีที่ 2 μ เป็นฟังก์ชันที่อยู่ในรูปตัวแปร y อย่างเดียว แล้ว $\dfrac{\partial \mu}{\partial x} = 0$ และจากสมการ (1)

เมื่อ $\mu(x,y) = \mu(y)$ จะได้ $\dfrac{\partial}{\partial y}\mu(x,y)$ เป็น $\dfrac{d}{dy}\mu(y)$ แทนค่าในสมการ (1) ได้

$$\mu(y)\left[\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)\right] = -M(x,y)\frac{\partial}{\partial y}\mu(y) \quad \text{..............................(3)}$$

กำหนดให้ $M = M(x,y)$

แทน $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y)$ แทนด้วย M_y และ $\dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ แทนด้วย N_x ในสมการ (54) ได้

$$\mu(y)\left[M_y - N_x\right] = -M\frac{d}{dy}\mu(y)$$

คูณตลอดสมการนี้ด้วย $-\dfrac{1}{\mu(y)M}$ จะได้

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{1}{\mu(y)} \frac{d}{dy} \mu(y)$$

ให้ $g(y) = \dfrac{N_x - M_y}{M}$ แล้วจัดรูปสมการได้

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = g(y)dy$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการนี้ ได้

$$\ln\left|\mu(y)\right| = \int g(y)dy$$

และจากสมบัติของลอการิทึม ได้

$$\mu(y) = e^{\int f(y)dy}$$

นั่นคือ เมื่อ $g(y) = \dfrac{N_x - M_y}{M}$ จะได้ $\mu(y) = e^{\int f(y)dy}$

หมายเหตุ 2.4

จากการหาตัวประกอบปริพันธ์ที่ผ่านมานั้นจะเห็นว่ามีการเขียนอนุพันธ์ย่อยแตกต่างกัน ดังนั้นเพื่อให้ง่ายต่อการเขียนและทำความเข้าใจต่อไปนี้จะเขียนโดยใช้รูปแบบเดียวกันทั้งหมด ดังต่อไปนี้

M แทน $M(x,y)$

N แทน $N(x,y)$

M_y แทน $\dfrac{\partial}{\partial y}M(x,y)$

N_x แทน $\dfrac{\partial}{\partial x}N(x,y)$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

1. จัดรูปสมการให้อยู่ในรูป $Mdx + Ndy = 0$

2. ถ้า $M_y \neq N_x$ แสดงว่าสมการไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง ต้องหาตัวประกอบปริพันธ์ ดังต่อไปนี้

$$f(x) = \frac{M_y - N_x}{N} \qquad \text{จะได้} \qquad \mu(x) = e^{\int f(x)dx}$$

$$g(y) = \frac{N_x - M_y}{M} \qquad \text{จะได้} \qquad \mu(y) = e^{\int g(y)dy}$$

3. คูณตัวประกอบปริพันธ์ตลอดสมการ $Mdx + Ndy = 0$ จะทำให้สมการ

$\mu(x)\Big[Mdx + Ndy\Big] = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง หรือ

$\mu(y)\Big[Mdx + Ndy\Big] = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

แล้วใช้วิธีในหัวข้อ 2.3 หาผลเฉลยต่อไป

ตัวอย่าง 2.22 จงหาผลเฉลยของสมการ $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x+2y)dy = 0$

วิธีทำ ตรวจสอบสมการ $(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x+2y)dy = 0$ ว่าเป็นสมการแม่นตรง

ให้ $M = 4xy + 3y^2 - x$ ได้ $M_y = 4x + 6y$

และ $N = x(x+2y)$ ได้ $N_x = 2x + 2y$

เนื่องจาก $M_y \neq N_x$ ดังนั้นสมการ $(4xy+3y^2-x)dx+x(x+2y)dy=0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนั้นต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณา
$$f(x)=\frac{M_y-N_x}{N}$$
$$=\frac{(4x+6y)-(2x+2y)}{x(x+2y)}$$
$$=\frac{4x+6y-2x-2y}{x(x+2y)}$$
$$=\frac{2x+4y}{x(x+2y)}$$
$$f(x)=\frac{2(x+2y)}{x(x+2y)}$$
$$=\frac{2}{x}$$

เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้นดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการนี้คือ
$$\mu=e^{\int \frac{2}{x}dx}$$
$$=e^{2\ln|x|}$$
$$=e^{\ln x^2}$$
$$=x^2$$

นำ x^2 คูณตลอดสมการ $(4xy+3y^2-x)dx+x(x+2y)dy=0$ ได้
$$x^2\Big((4xy+3y^2-x)dx+x(x+2y)dy\Big)=0$$
$$(4x^3y+3x^2y^2-x^3)dx+(x^4+2x^3y)dy=0 \qquad \text{..........................(1)}$$

สมการ (1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จัดรูปสมการ (1) ใหม่ ได้
$$(4x^3y+3x^2y^2-x^3)dx+(x^4+2x^3y)dy=0$$
$$4x^3ydx+3x^2y^2dx-x^3dx+x^4dy+2x^3ydy=0$$
$$d\left(x^4y+x^3y^2-\frac{x^4}{4}\right)=0$$
$$x^4y+x^3y^2-\frac{x^4}{4}=c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(4xy+3y^2-x)dx+x(x+2y)dy=0$ คือ $x^4y+x^3y^2-\frac{x^4}{4}=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 2.23 จงหาผลเฉลยของสมการ $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$

วิธีทำ ตรวจสอบ $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$ ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรง

ให้ $M = y(x+y+1)$ ได้ $M_y = x+2y+1$

และ $N = x(x+3y+2)$ ได้ $N_x = 2x+3y+2$

เนื่องจาก $M_y \neq N_x$ ดังนั้นสมการ $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนั้นต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณา

$$\begin{aligned} g(y) &= \frac{N_x - M_y}{M} \\ &= \frac{(2x+3y+2)-(x+2y+1)}{y(x+y+1)} \\ g(y) &= \frac{2x+3y+2-x-2y-1)}{y(x+y+1)} \\ &= \frac{x+y+1}{y(x+y+1)} \\ &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันของ y เท่านั้นดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการ (60) คือ

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int \frac{1}{y} dy} \\ &= e^{\ln|y|} \\ &= y \end{aligned}$$

นำ y คูณตลอดสมการ $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$ ได้

$$y\Big(y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy\Big) = 0$$
$$(xy^2 + y^3 + y^2)dx + (x^2y + 3xy^2 + 2xy)dy = 0 \quad ....(1)$$

สมการ (1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จัดรูปสมการ (1) ใหม่ ได้

$$\begin{aligned} (xy^2 + y^3 + y^2)dx + (x^2y + 3xy^2 + 2xy)dy &= 0 \\ xy^2dx + y^3dx + y^2dx + x^2ydy + 3xy^2dy + 2xydy &= 0 \\ d\left(\frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2\right) &= 0 \\ \frac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 &= c \end{aligned}$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y(x+y+1)dx + x(x+3y+2)dy = 0$ คือ $\dfrac{x^2y^2}{2} + xy^3 + xy^2 = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 2.24 จงหาผลเฉลยของสมการ $(x^2y+y+1)+x(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=0$

วิธีทำ จากสมการ $(x^2y+y+1)+x(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=0$ สามารถจัดรูปสมการใหม่ได้

$$(x^2y+y+1)dx+x(1+x^2)dy=0$$

ตรวจสอบสมการ $(x^2y+y+1)dx+x(1+x^2)dy=0$ ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรง

ให้ $M = x^2y + y + 1$ ได้ $M_y = x^2+1$

และ $N = x(1+x^2)$ ได้ $N_x = 1+3x^2$

เนื่องจาก $M_y \neq N_x$ ดังนั้นสมการ $(x^2y+y+1)dx+x(1+x^2)dy=0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนั้นต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณา
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{M_y - N_x}{N} \\
&= \frac{(x^2+1)-(1+3x^2)}{x(1+x^2)} \\
&= \frac{x^2+1-1-3x^2}{x(1+x^2)} \\
&= -\frac{2x^2}{x(1+x^2)} \\
&= -\frac{2x}{1+x^2}
\end{aligned}$$

เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้นดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการนี้ คือ

$$\begin{aligned}
\mu &= e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}dx} \\
&= e^{-\ln\left|1+x^2\right|} \\
&= e^{\ln(1+x^2)^{-1}} \\
&= (1+x^2)^{-1} \\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

นำ $\dfrac{1}{1+x^2}$ คูณตลอดสมการ $(x^2y+y+1)dx+x(1+x^2)dy=0$ ได้

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2}(x^2y+y+1)dx+\frac{1}{1+x^2}x(1+x^2)dy &= 0 \\
(1+x^2)^{-1}\Big((x^2+1)y+1\Big)dx+xdy &= 0 \\
\Big(y+(1+x^2)^{-1}\Big)dx+xdy &= 0 \quad ....(1)
\end{aligned}$$

สมการ (1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จัดรูปสมการ (1) ใหม่ ได้

$$\left(y+(1+x^2)^{-1}\right)dx+xdy=0$$
$$ydx+(1+x^2)^{-1}dx+xdy=0$$
$$ydx+\frac{1}{1+x^2}dx+xdy=0$$
$$d(xy+\arctan x)=0$$
$$xy+\arctan x=c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(x^2y+y+1)+x(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}=0$ คือ $xy+\arctan x=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ตัวอย่าง 2.25 จงหาผลเฉลยของสมการ $(x^2+y^2)dx+x(x-2y)dy=0$

วิธีทำ ตรวจสอบ $(x^2+y^2)dx+x(x-2y)dy=0$ ว่าเป็นสมการแบบแม่นตรง

ให้ $M=x^2+y^2$ ได้ $M_y=2y$

และ $N=x(x-2y)$ ได้ $N_x=2x-2y$

เนื่องจาก $M_y\neq N_x$ ดังนั้นสมการ $(x^2+y^2)dx+x(x-2y)dy=0$ ไม่เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรงดังนั้นต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

พิจารณา
$$f(x)=\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{(2y)-(2x-2y)}{x(x-2y)}=-\frac{2}{x}$$

เป็นฟังก์ชันของ x เท่านั้นดังนั้นตัวประกอบปริพันธ์สำหรับสมการนี้ คือ

$$\mu=e^{\int -\frac{2}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=x^{-2}$$

นำ x^{-2} คูณตลอดสมการ $(x^2+y^2)dx+x(x-2y)dy=0$ ได้

$$x^{-2}\left((x^2+y^2)dx+x(x-2y)dy\right)=0$$
$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\left(1-\frac{2y}{x}\right)dy=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

สมการ (1) เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง

จัดรูปสมการ (1) ใหม่ ได้

$$\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\left(1-\frac{2y}{x}\right)dy=0$$
$$dx+\frac{y^2}{x^2}dx+dy-\frac{2y}{x}dy=0$$
$$d\left(x+y-\frac{y^2}{x}\right)=0$$
$$x+y-\frac{y^2}{x}=c$$

ดังนั้น ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(x^2+y^2)dx+x(x-2y)dy=0$ คือ

$x+y-\dfrac{y^2}{x}=c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

สมการเชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งคือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x)$$

สำหรับกรณี $c(x)=0$ สมการดังกล่าวเป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งแบบเอกพันธุ์ และกรณี $c(x)\neq 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งแบบไม่เอกพันธุ์ สำหรับการหาผลเฉลยของสมการนั้นจะต้องอาศัยบทนิยามดังต่อไปนี้ (อาทิตย์ ศรีแก้ว. 2546 : 11-12)

บทนิยาม 2.6 สมการที่อยู่ในรูป $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ เมื่อ $p(x)$ และ $q(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x เรียกว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง

ตัวอย่าง 2.26 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง

1. $2x\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x$
2. $xy'+\left(\dfrac{2x-3}{x}\right)y=e^x$

การหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น

สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์ (2544 : 35-36) ได้กล่าวว่า สำหรับสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นแบบไม่เอกพันธุ์นั้นมีขั้นตอนการหาผลเฉลยดังต่อไปนี้

กำหนดสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$ ....(1)

จัดรูปสมการใหม่ ได้

$$dy + \Big(p(x)y - q(x)\Big)dx = 0$$

จะเห็นว่า $M = p(x)y - q(x)$ และ $N = 1$

จะได้ $M_y = p(x)$ และ $N_x = 0$ ซึ่ง $M_y \neq N_x$

ดังนั้นสมการ (1) ไม่เป็นสมการแม่นตรงต้องหาตัวประกอบปริพันธ์

ให้ $\mu(x)$ เป็นตัวประกอบปริพันธ์ ได้

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x)M(x,y)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x)N(x,y)\Big)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big(\mu(x)\big(p(x)y - q(x)\big)\Big) = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\mu(x)(1)\Big)$$

หาอนุพันธ์ ได้

$$\begin{aligned}
\mu(x)p(x) &= \frac{d}{dx}\mu(x) \\
\mu(x)p(x)dx &= d\mu(x) \\
p(x)dx &= \frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) \\
\frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) &= p(x)dx
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ ได้

$$\begin{aligned}
\ln\Big|\mu(x)\Big| &= \int p(x)\,dx \\
\mu(x) &= e^{\int p(x)\,dx}
\end{aligned}$$

นำ $\mu(x)$ คูณตลอดสมการ (1) ได้

$$\begin{aligned}
\mu(x)\left(\frac{dy}{dx} + p(x)y\right) &= \mu(x)q(x) \\
\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y &= \mu(x)q(x) \\
\frac{d}{dx}(\mu(x)y) &= \mu(x)q(x)
\end{aligned}$$

หาปริพันธ์ตลอดสมการ ได้

$$\begin{aligned}
\mu(x)y &= \int \mu(x)q(x)\,dx + c \\
y &= \frac{1}{\mu(x)}\Big(\int \mu(x)q(x)\,dx + c\Big)
\end{aligned}$$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

ดังนั้น $y = \dfrac{1}{\mu(x)}\Big(\int \mu(x)q(x)\,dx + c\Big)$ เป็นผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$

ตัวอย่าง 2.27 จงหาผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$

วิธีทำ สมการ $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$ อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น

โดยมี $\qquad p(x) = -2x$

จาก $\qquad \mu(x) = e^{\int p(x)dx}$

ได้ $\qquad \mu(x) = e^{\int -2x\,dx}$

$$= e^{-x^2}$$

นำ e^{-x^2} คูณตลอดสมการ $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$ ได้

$$e^{-x^2}\frac{dy}{dx} - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2}$$

$$e^{-x^2}\frac{dy}{dx} - 2xe^{-x^2}y = xe^{-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y\right) = xe^{-x^2}$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ ได้

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x^2}y\right) = xe^{-x^2}$$

$$e^{-x^2}y = \int xe^{-x^2}dx + c$$

$$e^{-x^2}y = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$$

$$y = ce^{x^2} - \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $y = ce^{x^2} - \dfrac{1}{2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่าคงตัว

ตัวอย่าง 2.28 จงหาผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} = 6x^2$

วิธีทำ สมการ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} = 6x^2$ อยู่ในรูปของสมการเชิงเส้น

โดยมี $\qquad p(x) = \dfrac{3}{x}$

จาก $\qquad \mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx}$

$$= e^{3\ln x}$$

$$= e^{\ln x^3}$$

$$= x^3$$

นำ x^3 คูณตลอดสมการ $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{3y}{x} = 6x^2$ ได้

$$x^3\frac{dy}{dx}+3x^2y=6x^5$$
$$\frac{d}{dx}(x^3y)=6x^5$$

หาปริพันธ์ตลอดทั้งสมการ ได้

$$\frac{d}{dx}(x^3y)=6x^5$$
$$x^3y=\int 6x^5dx+c$$
$$x^3y=x^6+c$$
$$y=x^3+\frac{c}{x^3}$$

ดังนั้น $y=x^3+\dfrac{c}{x^3}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{3y}{x}=6x^2$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่าคงตัว

การเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ให้เป็นสมการเชิงเส้น

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง บางสมการที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้น สามารถทำให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดยอาศัยการเปลี่ยนแปลงที่เหมาะสม ในที่นี้จะขอกล่าวถึงสมการแบบหนึ่งที่มีลักษณะดังกล่าวนี้ซึ่งเรียกว่า สมการของแบร์นูลลี (พิมล เชียงกูล. 2543 : 56-57)

สมการของแบร์นูลลี เป็นสมการที่เขียนได้ในรูป

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\,y^n \qquad \text{เมื่อ } n \text{ เป็นตัวคงค่าคงตัว}$$

ในกรณี $n=0$ สมการของแบร์นูลลีจะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้น

และในกรณี $n=1$ สมการของแบร์นูลลีจะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\,y$$
$$\frac{dy}{dx}+\Big(p(x)-q(x)\Big)y=0$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นเช่นกัน

ต่อไปเราจะพิจารณากรณีที่ $n\neq 0$ และ $n\neq 1$

จาก $\dfrac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)\,y^n$

คูณตลอดสมการด้วย y^{-n} ได้

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x) \quad \text{...}(1)$$

ให้ $z=y^{1-n}$ หาอนุพันธ์ ได้

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^{n}}{1-n}\frac{dz}{dx} \quad \text{...}(2)$$

แทนค่าสมการ (2) ในสมการ (1) ได้

$$\frac{1}{1-n}\frac{dz}{dx}+p(x)z=q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-n)p(x)z=(1-n)q(x)$$ เป็นสมการเชิงเส้น

สมการของแบร์นูลลีสามารถทำให้เป็นสมการเชิงเส้นได้ เราสามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ได้โดยอาศัยวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงเส้น ซึ่งได้กล่าวมาข้างต้นแล้ว

ตัวอย่าง 2.29 จงหาผลเฉลยของสมการ $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$

วิธีทำ จาก $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ จัดรูปสมการใหม่ ได้

$$y^{-3}\frac{dy}{dx}+\frac{x}{1+x^2}y=\frac{x^3}{1+x^2} \quad \text{...}(1)$$

ให้ $z=y^{-2}$ จะได้

$$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx} \quad \text{...}(2)$$

แทนค่าสมการ (2) ในสมการ (1) ได้

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}+\frac{x}{1+x^2}z=\frac{x^3}{1+x^2}$$

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2x}{1+x^2}z=\frac{-2x^3}{1+x^2} \quad \text{...}(3)$$

สมการ (3) เป็นสมการเชิงเส้นโดยมี $p(x)=-\frac{2x}{1+x^2}$

จาก

$$\begin{aligned}\mu(x)&=e^{\int -\frac{2x}{1+x^2}dx}\\ &=e^{-\int \frac{2x}{1+x^2}dx}\\ &=e^{-\ln(1+x^2)}\\ &=(1+x^2)^{-1}\end{aligned}$$

นำ $(1+x^2)^{-1}$ คูณตลอดสมการ (3) ได้

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+x^2)}\frac{dz}{dx}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}z &= -\frac{2x^3}{(1+x^2)^2}\\
\frac{d}{dx}\left(\frac{z}{1+x^2}\right) &= -\frac{2x^3}{(1+x^2)^2}\\
\frac{z}{1+x^2} &= \int -\frac{2x^3}{(1+x^2)^2}dx+c\\
\frac{z}{1+x^2} &= -\ln\left|1+x^2\right|-\frac{1}{1+x^2}+c\\
z &= c(1+x^2)-(1+x^2)\ln\left|1+x^2\right|-1
\end{aligned}$$

จาก $z=y^{-2}$ จึงได้ว่า

$$\frac{1}{y^2}+(1+x^2)\ln\left|1+x^2\right|+1=c(1+x^2)$$

ดังนั้น $\frac{1}{y^2}+(1+x^2)\ln\left|1+x^2\right|+1=c(1+x^2)$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $(1+x^2)\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ เมื่อ c เป็นตัวคงค่าคงตัว

สรุปท้ายบท

สำหรับการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้นเมื่อเราทราบว่าสมการนั้นมีผลเฉลยแล้ว ก่อนอื่นต้องพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้นสามารถจัดอยู่ในรูป

$$F(x)dx+G(y)dy=0$$

ซึ่งเป็นสมการแบบแยกกันได้ แล้วหาผลเฉลยทั่วไปของสมการโดยการหาปริพันธ์ตลอดสมการ แต่ถ้าสมการไม่เป็นสมการแบบแยกกันได้ ซึ่งอยู่ในรูป

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

ถ้า $M(x,y)$ และ $N(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีระดับขั้นเท่ากันแล้ว สมการดังกล่าวก็จะเป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ หาผลเฉลยโดยการเปลี่ยนตัวแปร ให้ $y=vx$ แทนลงไปในสมการแล้วสมการเชิงอนุพันธ์แบบเอกพันธุ์ นั้นจะเปลี่ยนเป็นสมการแบบแยกกันได้ และหาผลเฉลยโดยการหาปริพันธ์ตลอดสมการ แต่ถ้าสมการดังกล่าวไม่เป็นสมการเอกพันธุ์

ถ้า $\frac{\partial}{\partial y}M(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}N(x,y)$ แล้ว สมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ จะเป็นสมการแม่นตรงที่มี $F(x,y)=c$ เป็นผลเฉลยและ

$$\frac{\partial}{\partial x}F(x,y)=M(x,y) \text{ และ}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}F(x,y)=N(x,y)$$

ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งนั้นไม่สามารถแยกตัวแปรได้ ไม่เป็นสมการเอกพันธุ์และไม่เป็นสมการแม่นตรงเราสามารถหาตัวประกอบปริพันธ์คูณเข้าตลอดทั้งสมการ เพื่อจัดรูปสมการนั้นให้อยู่ในรูปแบบสมการแม่นตรง แล้วจึงหาผลเฉลย เช่นถ้าสมการ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ไม่ใช่สมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง แต่สมการ $\mu\Big(M(x,y)dx+N(x,y)dy\Big)=0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์แบบแม่นตรง เรียกฟังก์ชัน μ ว่าตัวประกอบปริพันธ์ และสุดท้ายถ้าสมการสามารถจัดอยู่ในรูปแบบ

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$$

เรียกสมการนี้ว่า สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่ง สำหรับการหาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์รูปแบบนี้ทำโดยการคูณตัวประกอบปริพันธ์ $\mu(x)=e^{\int f(x)\,dx}$ ตลอดสมการก็จะทำให้สามารถหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับที่หนึ่งได้

สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นอันดับหนึ่ง บางสมการที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้น สามารถทำให้เป็นสมการเชิงเส้นได้โดยอาศัยการเปลี่ยนแปลงที่เหมาะสม สมการที่มีลักษณะดังกล่าวนี้ซึ่งเรียกว่าสมการของแบร์นูลลี

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้โดยวิธีสมการแยกตัวแปรได้

   1.1 $y' = \dfrac{2x}{y}$

   1.2 $\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2$

   1.3 $(x-1)dx = ydy$

   1.4 $x^2dx + y(x-1)dy = 0$

   1.5 $xyy' = 1 + y^2$

   1.6 $y^2dx + e^xdy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นดังต่อไปนี้โดยวิธีสมการแยกตัวแปรได้

   2.1 $xyy' = 1 + y^2$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

   2.2 $y^2dx + e^xdy = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 1$

   2.3 $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-(y+x^2)}$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0) = 0$

   2.4 $\dfrac{dr}{dt} = -2rt$ เงื่อนไขเริ่มต้น $r(0) = 3$

   2.5 $xy^3dx + e^{x^2}dy = 0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$

   2.6 $(\ln y)^2y' = x^2y$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

   2.7 $x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x - x^3}$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = -2$

3. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้โดยวิธีสมการเอกพันธ์

   3.1 $(x-2y)dx + (2x+y)dy = 0$

   3.2 $2(2x^2 + y^2)dx - xydy = 0$

   3.3 $(x-y)(4x+y)dx + x(5x-y)dy = 0$

   3.4 $(x-y)(4x+y)dx + x(5x-y)dy = 0$

   3.5 $(x + ye^{\frac{y}{x}})dx - xe^{\frac{y}{x}}dy = 0$

4. จงหาผลเฉลยเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้โดยวิธีสมการเอกพันธ์

4.1 $(x-y)dx+(3x+y)dy=0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(2)=-1$

4.2 $(x-2y)dx+(2x+y)dy=0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=-1$

4.3 $y^2dx+(x^2+3xy.+4x^2)dy=0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(2)=1$

4.4 $x^2ydx-(x^3-y^3)dy=0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=1$

4.5 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{y-x}$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(-1)=0$

4.6 $14xy\dfrac{dy}{dx}=6x^2-7y^2$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(-2)=1$

4.7 $x^2y'=3x^2-2xy+y^2$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=\dfrac{3}{2}$

5. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้โดยวิธีสมการแม่นตรง

5.1 $2x-y^3-3xy^2\dfrac{dy}{dx}=0$

5.2 $(2x-5y)y'=6x-2y$

5.3 $\cos x^2y\left(2xy+x^2\dfrac{dy}{dx}\right)=0$

5.4 $(\sin xy+xy\cos xy)\dfrac{dy}{dx}+y^2\cos xy=0$

5.5 $\left(\dfrac{3xy+1}{y}\right)dx+\left(\dfrac{2y-x}{y^2}\right)dy=0$

5.6 $\pi y+(\pi x+\arcsin y)\dfrac{dy}{dx}=\sin x$

5.7 $(2xye^{x^2y}+\sin y)dx+(x^2e^{x^2y}+x\cos y-y)dy=0$

5.8 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3y-xy}{x^2+1}$

6. จงหาผลเฉลยเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้โดยวิธีสมการแม่นตรง

6.1 $3x^2y+2xy+(x^3+x^2+2y)\dfrac{dy}{dx}=0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=2$

6.2 $e^y+ye^x+(e^x+xe^y)\dfrac{dy}{dx}=0$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=0$

6.3 $(\sin^2 x - 2y\cos)\dfrac{dy}{dx} + 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0) = -2$

6.4 $\ln(1+y^2) = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{2xy}{1+y^2}\right)\dfrac{dy}{dx}$

โดยมีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(2) = \sqrt{e-1}$

7. จงหาตัวประกอบปริพันธ์ของสมการต่อไปนี้

7.1 $2x^2ydx + (x^3 + 2xy)dy = 0$

7.2 $(2xy - 3x - 3x^2)y' - (2xy - y^2 + y) = 0$

7.3 $(xy + y - 1)dx + xdy = 0$

7.4 $y(x + y^3)dx + x(y^3 - x)dy = 0$

7.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

8. จงหาตัวประกอบปริพันธ์พร้อมหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้

8.1 $y(1 + x^2y)dx - xdy = 0$

8.2 $(x^2 + y) + (x^2\cos y - x)\dfrac{dy}{dx} = 0$

8.3 $1 + (x\tan y - 2\sec y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

8.4 $(2xy - 3x - 3x^2)y' - (2xy - y^2 + y) = 0$

8.5 $y(x + y^3)dx + x(y^3 - x)dy = 0$

9. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการต่อไปนี้โดยวิธีสมการสมการเชิงเส้น

9.1 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = 3x^2$

9.2 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{1-x} = x^2 - x$

9.3 $(x - y)dx + xdy = 0$

9.4 $x\dfrac{dy}{dx} + (1 + x)y = e^x$

9.5 $\dfrac{dy}{dx} + y\tan x = \sin 2x$

10. จงหาผลเฉลยเฉพาะซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้นที่กำหนดให้ดังต่อไปนี้โดยวิธีสมการเชิงเส้น

10.1 $x\dfrac{dy}{dx}+y=e^{x}$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=1$

10.2 $\dfrac{dy}{dx}+y=\sin x$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(\pi)=1$

10.3 $x\dfrac{dy}{dx}-2y=x^{3}\cos 4x$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$

10.4 $x\dfrac{dy}{dx}+2y=\ln x$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(1)=\dfrac{3}{4}$

10.5 $(1+x^{2})\dfrac{dy}{dx}=1+xy$ เงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=2$

เอกสารอ้างอิง

พิมล เชียงกูล. (2543). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** ม.ป.พ.

วารี เกรอต. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพ ฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

ศรีบุตร แววเจริญ และชนศักดิ์ บ่ายเที่ยง. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1.** กรุงเทพ ฯ : วงตะวัน.

ศิริพร พัสดร. (2552). **สมการเชิงอนุพันธ์** อุดรธานี : สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรธานี.

สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์. (2544). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** บุรีรัมย์ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

สุรัตนา สังข์หนุน. (2558). **สมการเชิงอนุพันธ์ 1**. กรุงเทพ ฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ

อาทิตย์ ศรีแก้ว. (2546). **คณิตศาสตร์วิศวกรรม 1.** นครราชสีมา : สาขาวิศวกรรมไฟฟ้า คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี.

อุบล กลองกระโทก. (2549). **คณิตศาสตร์สำหรับวิทยาศาสตร์ 2.** กรุงเทพ ฯ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา.

Spiegel, Murray R. (1958). **Applied Differential Equations.** Prentics Hall Englewood Gliffs, N.J.