แผนบริหารการสอนประจำบท
บทที่ 1 ธรรมชาติและการเกิดสมการเชิงอนุพันธ์

เนื้อหาประจำบท

1. ประวัติของสมการเชิงอนุพันธ์
2. นิยามและตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์
3. ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์
4. การกำจัดค่าคงตัว
5. ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีผลเฉลยเดียว

วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

เมื่อผู้เรียนศึกษาบทเรียนนี้แล้วสามารถ

1. อธิบายประวัติความเป็นมาของการเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ได้
2. อธิบายนิยามและตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์ได้
3. บอกลักษณะของผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ได้
4. แสดงวิธีการกำจัดค่าคงตัวในสมการเชิงอนุพันธ์ได้
5. บอกได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์จะต้องมีผลเฉลยเดียวเท่านั้น โดยใช้ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีผลเฉลยเดียว

วิธีการสอนและกิจกรรมการเรียนการสอนประจำบท

1. บรรยายถึงประวัติความเป็นมาของการเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ มีการตั้งคำถาม ตอบคำถามระหว่างผู้สอนและผู้เรียน
2. แสดงตัวอย่าง การประยุกต์ใช้ความรู้พื้นฐานในวิชาแคลคูลัส มาช่วยในการพิจารณาผลเฉลยสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ
3. ให้ผู้เรียนทำใบกิจกรรม
4. สืบค้นประวัติของสมการเชิงอนุพันธ์ทางอินเทอร์เน็ตเพิ่มเติม
5. อภิปราย สรุปประเด็นสำคัญที่เกี่ยวกับนิยามและตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์
6. สรุป และซักถามความเข้าใจท้ายบทเรียน

สื่อการเรียนการสอน

1. เครื่องคอมพิวเตอร์และอินเทอร์เน็ต
2. เพาเวอร์พอยต์ เรื่องความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์
3. เอกสารประกอบการสอนรายวิชาสมการเชิงอนุพันธ์
4. โปรแกรม Wolfram Alpha
5. ใบกิจกรรม

การวัดผลและการประเมินผล

1. สังเกตการตอบคำถามในชั้นเรียน
2. สังเกตจากการอภิปรายโต้ตอบ ซักถาม และการแสดงความคิดเห็น
3. สังเกตพฤติกรรมความกระตือรือร้นในการร่วมกิจกรรมและคุณภาพของงานที่มอบหมาย
4. ผลจากการลงมือปฏิบัติด้วยโปรแกรม Wolfram Alpha
5. ตรวจใบกิจกรรม
6. ตรวจแบบฝึกหัด
7. ประเมินผลจากแบบทดสอบ

บทที่ 1
ธรรมชาติและการเกิดสมการเชิงอนุพันธ์

ในบทนี้จะเป็นการแนะนำความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ ตั้งแต่ประวัติการเกิดขึ้นมาของสมการเชิงอนุพันธ์ ความหมายของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ เช่นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ อันดับและระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ ลักษณะของสมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เป็นสมการเชิงเส้น ซึ่งมีการกล่าวถึงผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ เช่น ผลเฉลยชัดแจ้ง และผลเฉลยโดยปริยาย ผลเฉลยเอกฐาน วงศ์ผลเฉลยสำหรับพารามิเตอร์หนึ่งตัว ผลเฉลยทั่วไป ปัญหาค่าเริ่มต้นเพื่อนำไปสู่การหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อรู้จักรูปแบบต่าง ๆ ของผลเฉลยแล้ว ทางหนึ่งที่จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ คือการกำจัดตัวคงค่าจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ ซึ่งเราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวคงค่า โดยการกำจัดตัวคงค่าเหล่านั้น จะเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอันดับของสมการที่จะสร้างต้องเท่ากับจำนวนของตัวคงค่า และก่อนที่เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ควรตรวจสอบว่าสมการนั้น ๆ มีผลเฉลยหรือไม่ เพราะถ้าสมการไม่มีผลเฉลยจะได้ไม่เสียเวลาในการหา หรือถ้าสมการมีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งผลเฉลยก็จะได้ทราบก่อนที่จะเสียเวลาหาผลเฉลยมาแล้วพบว่าไม่ใช่ผลเฉลยที่ต้องการ ซึ่งใช้ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและความเป็นไปได้อย่างเดียวของผลเฉลย

ประวัติของสมการเชิงอนุพันธ์

พิมล เชียงกูล (2543 : 1-2) ; วารี เกรอต (2542 : 1-2) และ Charles E. Roberts,Jr (2010 : 1-5) ได้กล่าวว่า จุดกำเนิดของสมการเชิงอนุพันธ์เริ่มขึ้นในปี ค.ศ. 1671 เมื่อเซอร์ ไอแซค นิวตัน (Sir Isaac Newton) ได้จำแนกสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งแบบธรรมดาออกเป็น 3 กลุ่ม ซึ่งในขณะนั้นนิวตันเรียกชื่อสมการเหล่านี้ว่าสมการฟลักซิโอนัล (fluxional) นิวตันคาดว่าคำตอบของสมการเหล่านี้อยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ และเขาได้ให้วิธีการหาสัมประสิทธิ์ของอนุกรมอนันต์โดยวิธีการที่คล้ายกับวิธีการในปัจจุบัน นอกจากนี้ นิวตันเป็นผู้เริ่มใช้สัญลักษณ์ y' แทนความหมายของอนุพันธ์ของ y เทียบกับตัวแปรอิสระ

ผู้เริ่มต้นใช้สัญลักษณ์อนุพันธ์ dy และสัญลักษณ์สำหรับปริพันธ์ $\int$ คือไลบ์นิตซ์ (Gottfried Leibniz) เขาได้เริ่มใช้สัญลักษณ์ทั้งคู่ในปี ค.ศ. 1675 ในรูป $\int 2y\,dy = y^2$

ในปี ค.ศ. 1676 ไลบ์นิตซ์ได้เริ่มใช้ศัพท์สมการเชิงอนุพันธ์ในการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างสองอนุพันธ์ dx และ dy ซึ่งนับว่าเป็นจุดเริ่มต้นของแขนงวิชาทางคณิตศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับอนุพันธ์

ในปี ค.ศ. 1690 แบร์นูลลี (Jacques Bernoulli) ได้เริ่มใช้คำว่าปริพันธ์ ในปี ค.ศ. 1691 ไลบ์นิตซ์ ได้ให้วิธีการแก้สมการเชิงอนุพันธ์จนถึงปลายศตวรรษที่ 17 เทคนิคของการแก้สมการเชิงอนุพันธ์โดยทั่วไปได้ถูกนำมาใช้ และต่อมาพบว่าเทคนิคเหล่านี้ยังไม่เป็นที่เพียงพอในการแก้สมการเชิงอนุพันธ์ ในสมัยเริ่มแรกของการพัฒนาการศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ เป็นที่เชื่อกันว่าสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งได้มาจากปัญหาทางเรขาคณิตหรือกลศาสตร์มีคำตอบในรูปฟังก์ชันพื้นฐานเท่านั้น ดังนั้นการหาคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์จึงมุ่งไปในการหาผลเฉลยเด่นชัด จนถึงปี ค.ศ. 1723 จึงทราบกันว่า แม้แต่สมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับหนึ่งก็อาจจะหาผลเฉลยซึ่งเขียนอยู่ในรูปของฟังก์ชันพื้นฐานไม่ได้

ในปี ค.ศ. 1739 เลียวนาด ออยเลอร์ (Leonard Euler) ได้ริเริ่มวิธีการแปรผันของพารามิเตอร์หลังจากที่แบร์นูลลีไม่ประสบความสำเร็จในการแก้สมการเชิงเส้นแบบเอกพันธุ์ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นค่าคงตัว ต่อมาในปี ค.ศ. 1743 ออยเลอร์ได้เขียนวิธีการแก้สมการประเภทนี้ไว้อย่างสมบูรณ์และเขายังให้วิธีการแก้สมการเชิงเส้นแบบไม่เป็นเอกพันธุ์ไว้ด้วย

โอกุสแตง ลุยส์ โคชี (Augustin-Louis Cauchy) เป็นผู้ค้นคว้าศึกษาสมการเชิงอนุพันธ์ไว้มากมาย ระหว่างปี ค.ศ. 1820 – 1829 โคชีได้ให้ทฤษฎีบทนี้ไปสู่กรณีของระบบสมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งจำนวน n สมการ ซึ่งเป็นระบบที่แทนสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ในปี ค.ศ. 1876 รูดอล์ฟ ลิปซิตซ์ (Rudolf Lipschitz) ได้วางนัยทั่วไปทฤษฎีบทของการมีคำตอบของโคชี และในปี ค.ศ. 1893 เอมีลปิกาด์ (Emile Picard) ได้ปรับปรุงทฤษฎีบทของโคชีโดยใช้วิธีการประมาณสืบเนื่อง

จากประวัติของสมการเชิงอนุพันธ์ที่กล่าวมาข้างต้น จะเห็นได้ว่าสมการเชิงอนุพันธ์มีความสำคัญในการแก้ปัญหาทางวิทยาศาสตร์และกลศาสตร์อย่างมากมาย และมีนักคณิตศาสตร์จำนวนมากที่ให้ความสนใจเกี่ยวกับสมการเชิงอนุพันธ์ เพราะสมการเชิงอนุพันธ์เป็นวิธีที่สามารถอธิบายปรากฏการณ์ธรรมชาติได้เป็นอย่างดี และน่าเชื่อถือ

นิยามและตัวอย่างของสมการเชิงอนุพันธ์

การให้บทนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์รูปแบบต่าง ๆ เช่นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (Partial Differential Equation) สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (Ordinary Differential Equation) อันดับและระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ (Order and Degree of Differential Equation) สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้น (Linear Differential Equation) และสมการเชิงอนุพันธ์ไม่เป็นสมการเชิงเส้น (Non-Linear Differential Equation) ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์หรือดิฟเฟอเรนเชียลของตัวแปรตามเทียบกับตัวแปรอิสระโดยที่อนุพันธ์อาจมีเพียงตัวเดียวหรือหลายตัวก็ได้
(Charles E. Roberts,Jr. 2010 : 6)

ตัวอย่าง 1.1 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 4xy = 0$$

$$xy^2dx - 2xdy = 0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2x^2\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^3 + \frac{\partial f}{\partial y} = x$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + h^2r\frac{\partial^2 v}{\partial h^2} = 7$$

บทนิยาม 1.2 สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ คือสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น (พิมล เชียงกูล. 2543 : 3)

ตัวอย่าง 1.2 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ

$$\frac{dy}{dx} - 2x = 3$$

$$2\frac{d^3y}{dx^3} + 3xy\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3xydx - 2y^2dy = 7$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 - 2xy = 0$$

$$(x - 2y^2)dx - (3 - x)dy = 0$$

บทนิยาม 1.3 สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย คือสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระตั้งแต่สองตัวขึ้นไป (พิมล เชียงกูล. 2543 : 3)

ตัวอย่าง 1.3 สมการต่อไปนี้เป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$3\frac{\partial v}{\partial r} + r\frac{\partial^2 v}{\partial h^2} = 6h^2r$$

$$(t-2)\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + (st - t^3)\frac{\partial s}{\partial r} = 0$$

บทนิยาม 1.4 อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึงอันดับของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการนั้น (พรชัย สาตรวาหา. 2550 : 2 และ พิมล เชียงกูล. 2543 : 4)

บทนิยาม 1.5 ระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึงเลขชี้กำลังที่มีค่ามากที่สุดของอนุพันธ์ซึ่งมีอันดับสูงสุด ในกรณีที่สามารถทำให้ทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์มีเลขชี้กำลังเป็นเลขจำนวนเต็มบวก (พิมล เชียงกูล. 2543 : 4)

ตัวอย่าง 1.4 พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2xy^5\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสาม และมีระดับขั้นหนึ่ง

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^5+3x^2\frac{dy}{dx}-2xy=0$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสอง และมีระดับขั้นห้า

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^{2/3}-\frac{d^2y}{dx^2}=5$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับสี่ และมีระดับขั้นสอง เพราะจัดรูปสมการใหม่ได้

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2=\left(5+\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3$$

บทนิยาม 1.6 สมการเชิงอนุพันธ์จะเรียกว่าเป็นสมการเชิงเส้นอันดับ n คือสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่มีรูปดังนี้ (พรชัย สาตรวาหา. 2550 : 3)

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x)$$

เมื่อ $a_0(x),\, a_1(x),\ldots a_{n-1}(x),\, a_v(x)$ และ $f(x)$ คือฟังก์ชันของตัวแปร x เท่านั้น สมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นจะเรียกว่าสมการไม่เป็นเชิงเส้น

ตัวอย่าง 1.5 พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

$$\frac{dy}{dx}-2xy=5$$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$\frac{d^2y}{dx^2}+3x^2\frac{dy}{dx}-2xy=0$$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสอง

$$x^2 \frac{d^4y}{dx^4} + 3x\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = (x+2)^3$$ เป็นสมการเชิงเส้นอันดับสี่

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy = 0$$ สมการไม่เป็นเชิงเส้น

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

การให้บทนิยามของผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ แบบต่าง ๆ เช่นผลเฉลยชัด (Trivial Solution) ผลเฉลยโดยปริยาย (Implicit Solution) ผลเฉลยเอกฐาน (Singular Solution) วงศ์ผลเฉลยสำหรับพารามิเตอร์หนึ่งตัว (One-Parameter Family of Solution) ผลเฉลยทั่วไป (General Solution) และปัญหาค่าเริ่มต้นเพื่อนำไปสู่การหาผลเฉลยเฉพาะ (Particular Solution)

บทนิยาม 1.7 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ และตัวแปรตามซึ่งไม่อยู่ในรูปอนุพันธ์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น หมายความว่าเมื่อนำผลเฉลยไปแทนในสมการเชิงอนุพันธ์แล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริง (พรชัย สาตรวาหา. 2550 : 3)

ตัวอย่าง 1.6 จงแสดงว่า $y = 3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

วิธีทำ จาก $y = 3e^{2x}$

ได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}3e^{2x} = 6e^{2x}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} - 2y &= 6e^{2x} - 2(3e^{2x}) \\ &= 6e^{2x} - 6e^{2x} \\ &= 0\end{aligned}$$

จะพบว่า $y = 3e^{2x}$ สอดคล้องกับสมการ $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

ดังนั้น $y = 3e^{2x}$ จึงเป็นผลเฉลยของสมการ $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

ตัวอย่าง 1.7 จงแสดงว่า $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ เมื่อ $x \in R$ ต่างก็เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

วิธีทำ จาก $y = \sin x$

ได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin x$

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\cos x$$
$$= -\sin x$$

ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2} + y = -\sin x + \sin x = 0$

จะพบว่า $y = \sin x$ สอดคล้องกับสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

จาก $y = \cos x$

ได้ $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\cos x$

$$= -\sin x$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(-\sin x)$$
$$= -\cos x$$

จะได้ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = -\cos x + \cos x = 0$

จะพบว่า $y = \cos x$ สอดคล้องกับสมการ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

ดังนั้น $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

บทนิยาม 1.8 ให้ $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(n)}) = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญอันดับ n ฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นผลเฉลยชัดของสมการนี้บนช่วงเปิด I ถ้าแทนค่า $y = f(x)$ ลงในสมการ $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(n)}) = 0$ แล้วทำให้สมการเป็นจริงทุก ๆ ค่า $x \in I$
(พรชัย สาตรวาหา. 2550 : 4)

จากนิยามจะเห็นได้ว่าผลเฉลยชัดแจ้งของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n จะมีอนุพันธ์ตั้งแต่อันดับที่หนึ่งจนถึงอันดับที่ n บนช่วงเปิด I จะได้ว่า $y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(n-1)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด I โดยทั่วไปในการกำหนด $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(n)}) = 0$ จะไม่ได้ระบุช่วง I ไว้ แต่เป็นที่เข้าใจว่าในการหาผลเฉลยของ $F(x, y, y', y'', y^{(3)}, ..., y^{(n)}) = 0$ นั้นเราจะหา $y = f(x)$ และช่วงเปิด I ที่ใหญ่ที่สุดซึ่งทำให้ $y = f(x)$ นิยามบนช่วงนี้และสอดคล้องกับ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ ทุก ๆ ค่า $x \in I$ ความสัมพันธ์ $g(x, y) = 0$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ บนช่วงเปิด I ถ้า

1. เราสามารถนิยามฟังก์ชัน $y = f_1(x)$ บนช่วงเปิด I ได้อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชันจากความสัมพันธ์ $g(x,y)=0$ แล้วทำให้ $y = f_1(x)$ เป็นผลเฉลยโดยชัดแจ้งของสมการ $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ หรือ

2. ความสัมพันธ์ $g(x,y)=0$ นั้นสอดคล้องกับ $F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})=0$ บนช่วงเปิด I

ตัวอย่าง 1.8 กำหนดให้ $x \in R$ จงแสดงว่า $y = \cos x + \sin x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + y = 0$

วิธีทำ จาก $y = \cos x + \sin x$

ได้
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(\cos x + \sin x) \\ &= -\sin x + \cos x \\ y'' &= \frac{d}{dx}(-\sin x + \cos x) \\ &= -\cos x - \sin x \end{aligned}$$

นำ y และ y'' แทนในสมการ $y'' + y = 0$ ได้

$$y'' + y = (-\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) = 0$$

จะพบว่า $y = \cos x + \sin x$ สอดคล้องกับสมการ $y'' + y = 0$

ดังนั้น $y = \cos x + \sin x$ เป็นผลเฉลยของสมการ $y'' + y = 0$

ตัวอย่าง 1.9 กำหนดให้ $x \in (-3,3)$ จงแสดงว่า $x^2 + y^2 = 9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ $x + yy' = 0$

วิธีทำ จาก $x^2 + y^2 = 9$

หาอนุพันธ์เทียบกับ x ได้

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}9 \\ \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 &= 0 \\ 2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{x}{y} \\ y' &= -\frac{x}{y} \end{aligned}$$

นำ y' แทนลงในสมการ $x + yy' = 0$ ได้

$$\begin{aligned} x + yy' &= x + y\left(-\frac{x}{y}\right) \\ &= x - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

จะพบว่า $x^2 + y^2 = 9$ สอดคล้องกับสมการ $x + yy' = 0$

ดังนั้น $x^2 + y^2 = 9$ เป็นผลเฉลยโดยปริยายของสมการ $x + yy' = 0$

บทนิยาม 1.9 กำหนดให้ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ หมายถึงผลเฉลยที่ประกอบด้วยตัวคงค่า n ค่า (Charles E. Roberts,Jr. 2010 : 19)

ตัวอย่าง 1.10 กำหนดให้ c_1, c_2 เป็นตัวคงค่า จงแสดงว่า $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + y = 0$

วิธีทำ จาก $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$

ได้
$$\begin{aligned} y' &= \frac{d}{dx}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) \\ &= -c_1 \sin x + c_2 \cos x \\ y'' &= \frac{d}{dx}(-c_1 \sin x + c_2 \cos x) \\ &= -c_1 \cos x - c_2 \sin x \end{aligned}$$

นำ y และ y'' แทนลงในสมการ $y'' + y = 0$ ได้

$$y'' + y = (-c_1 \cos x - c_2 \sin x) + (c_1 \cos x + c_2 \sin x) = 0$$

จะพบว่า $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ สอดคล้องกับสมการ $y'' + y = 0$

ดังนั้น $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + y = 0$

บทนิยาม 1.10 กำหนดให้ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ เป็นสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ผลเฉลยเฉพาะ ของสมการ $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ หมายถึงผลเฉลยที่ได้จากการแทนที่ค่าคงตัวในผลเฉลยทั่วไปด้วยค่าคงตัวที่ทราบค่าแน่นอนทั้ง n ค่า (Charles E. Roberts,Jr. 2010 : 22)

ตัวอย่าง 1.11 จงแสดงว่า $y = 3\cos x - 2\sin x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y'' + y = 0$

วิธีทำ จาก $y = 3\cos x - 2\sin x$

ได้
$$y' = \frac{d}{dx}(3\cos x - 2\sin x)$$

$$y' = -3\sin x - 2\cos x \quad \text{และได้}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(-3\sin x - 2\cos x)$$
$$= -3\cos x + 2\sin x$$

นำ y และ y'' แทนลงในสมการ $y'' + y = 0$ ได้

$$y'' + y = (-3\cos x - 2\sin x) + (3\cos x + 2\sin x) = 0$$

จะพบว่า $y = 3\cos x - 2\sin x$ สอดคล้องกับสมการ $y'' + y = 0$

ดังนั้น $y = 3\cos x - 2\sin x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y'' + y = 0$

ตัวอย่าง 1.12 จงแสดงว่าสมการ $y' - 3y = 0$ มี $y = ce^{3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปและมี $y = 2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

วิธีทำ จาก $y = ce^{3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' - 3y = 0$

ได้ $y' = 3ce^{3x}$

นำ y และ y' แทนลงในสมการ $y' - 3y = 0$ ได้

$$y' - 3y = 3ce^{3x} - 3ce^{3x} = 0$$

นั่นคือ $y = ce^{3x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' - 3y = 0$ ที่มี c เป็นค่าคงตัว

จาก $y = 2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y' - 3y = 0$

ได้ $y' = 6e^{3x}$

นั่นคือ $y' - 3y = 6e^{3x} - 3(2e^{3x}) = 6e^{3x} - 6e^{3x} = 0$

ดังนั้น $y = 2e^{3x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $y' - 3y = 0$

บทนิยาม 1.11 ผลเฉลยเอกฐาน คือผลเฉลยที่ไม่ได้จากผลเฉลยทั่วไป
(Charles E. Roberts,Jr. 2010 : 19)

ตัวอย่าง 1.13 สมการ $\dfrac{dy}{dx} = (y-3)^2$

วิธีทำ มี $y = 3 - \dfrac{1}{x+c}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $\dfrac{dy}{dx} = (y-3)^2$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

และ $y = 3$ ก็เป็นผลเฉลยของสมการ $\dfrac{dy}{dx} = (y-3)^2$ นี้ด้วย

แต่ผลเฉลยนี้ไม่ได้มาจากการกำหนดค่าเฉพาะใด ๆ ของ c ใน $\dfrac{dy}{dx} = (y-3)^2$

ดังนั้น $y = 3$ เป็นผลเฉลยเอกฐานที่ถูกนิยามบนเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.12 ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่ประกอบด้วยตัวคงค่า c จะเรียกว่า วงศ์ผลเฉลยสำหรับพารามิเตอร์หนึ่งตัว (Charles E. Roberts,Jr. 2010 : 19)

จากผลเฉลยทั่วไป $y = ce^{3x}$ ของสมการ $y' - 3y = 0$ เนื่องจาก c เป็นค่าคงตัวจึงได้ค่า y หลายค่าขึ้นอยู่กับค่า c
ตัวอย่างเช่น

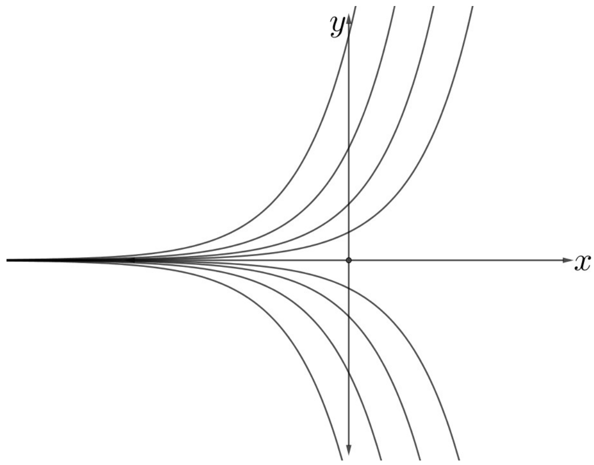
$c = 1$ จะได้ $y = e^{3x}$

$c = 2$ จะได้ $y = 2e^{3x}$

$c = -3$ จะได้ $y = -3e^{3x}$

และค่าอื่น ๆ ตามที่กำหนดค่า c

ในทางเรขาคณิต $y = ce^{3x}$ คือวงศ์เส้นโค้งสำหรับพารามิเตอร์ตัวหนึ่ง เรียกว่าเส้นโค้งเชิงปริพันธ์ ของสมการ $y' - 3y = 0$ ซึ่งแต่ละเส้นโค้งเชิงปริพันธ์คือรูปเรขาคณิตของผลเฉลยของสมการ $y' - 3y = 0$ ดังภาพประกอบที่ 1.1



ภาพประกอบที่ 1.1 เส้นโค้งเชิงปริพันธ์ของสมการ $y' - 3y = 0$
ที่มา : Charles E. Roberts,Jr (2010 : 19)

จากภาพประกอบที่ 1.1 วงศ์เส้นโค้งซึ่งประกอบด้วยเส้นโค้งเชิงปริพันธ์มากมาย ถ้าต้องการทราบว่าเส้นโค้งเชิงปริพันธ์ ได้เป็นเส้นโค้งที่ผ่านจุดใดจุดหนึ่งที่เราต้องการเช่นผ่านจุด $(0,2)$ หมายความว่าถ้า $x = 0$ และ $y = 2$ เมื่อแทนค่า x และ y แล้วจะได้ค่า c เช่นในตัวอย่าง 1.11 จะได้ $c = 2$ นั่นคือเส้นโค้งเชิงปริพันธ์ที่เป็นผลเฉลยเฉพาะสำหรับ $y' - 3y = 0$ เมื่อ $x = 0$ และ $y = 2$ คือ $y = 2e^{3x}$ เราเรียกค่าของ x และ y ที่กำหนดค่าผลเฉลยเฉพาะนี้ว่า เงื่อนไขเริ่มต้นและนิยมเขียน $y = \phi(x)$ เป็นผลเฉลยเฉพาะ

บทนิยาม 1.13 ปัญหาค่าเริ่มต้น คือปัญหาการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ เมื่อ x_0 และ $y_0, y_1, \ldots, y_n$ เป็นค่าคงตัว และเรียกเงื่อนไขที่กำหนดให้ว่า เงื่อนไขเริ่มต้น
(พรชัย สาตรวาหา. 2550 : 4)

ตัวอย่าง 1.14 จงแสดงว่า $y = 2x - 3$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $xy' - y = 3$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

วิธีทำ จากสมการ $y = 2x - 3$

ตรวจสอบเงื่อนไขเริ่มต้น $y(2) = 1$

ถ้า $y = 2x - 3$ จะได้ $y = 2(2) - 3 = 1$

นั่นคือ $y = 2x - 3$ ผ่านจุด $x = 2,\ y = 1$ จริง

ตรวจสอบว่า $y = 2x - 3$ เป็นผลเฉลยของสมการ $xy' - y = 3$ หรือไม่

จาก $y = 2x - 3$

ได้ $y' = \dfrac{d}{dx}(2x - 3)$

$y' = 2,$

นำ y และ y' แทนลงในสมการ $xy' - y = 3$ ได้

$$xy' - y = x(2) - (2x - 3) = 2x - 2x + 3 = 3$$

ดังนั้น แสดงว่า $y = 2x - 3$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ $xy' - y = 3$

ตัวอย่าง 1.15 จงแสดงว่า $y = x^2 - 3x + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' - 2x + 3 = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว แล้วจงหาค่า c ที่ทำให้ $y = x^2 - 3x + c$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการเมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น $y(-1) = 2$

วิธีทำ ตรวจสอบผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y = x^2 - 3x + c$

$$\text{ได้} \quad y' = \frac{d}{dx}(x^2 - 3x + c)$$
$$= 2x - 3$$

นำ y' แทนลงในสมการ $y' - 2x + 3 = 0$ ได้

$$\begin{aligned} y' - 2x + 3 &= (2x - 3) - 2x + 3 \\ &= 2x - 3 - 2x + 3 \\ &= 0 \end{aligned}$$

แสดงว่า $y = x^2 - 3x + c$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' - 2x + 3 = 0$

หาตัวค่าคงตัว c จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(-1) = 2$

แทนค่า $x = -1$ และ $y = 2$ ในสมการ $y = x^2 - 3x + c$

$$2 = (-1^2) - 3(-1) + c$$

ได้

$$2 = 1 + 3 + c$$

$$2 - 4 = c$$

$$c = -2$$

แทนค่า $c = -2$ ในสมการ $y' - 2x + 3 = 0$

ดังนั้น $y = x^2 - 3x - 2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ ที่สอดคลองกับเงื่อนไข $y(-1) = 2$

ตัวอย่าง 1.16 จงแสดงว่า $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$ และจงหาผลเฉลยเฉพาะ เมื่อกำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นดังนี้ $y(0) = 1\,,\; y'(0) = 2$

วิธีทำ ตรวจสอบผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$

จาก $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$ ได้

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(c_1e^{-3x} + c_2e^{2x})\\ &= \frac{d}{dx}c_1e^{-3x} + \frac{d}{dx}c_2e^{2x}\\ &= c_1\frac{d}{dx}e^{-3x} + c_2\frac{d}{dx}e^{2x}\\ &= -3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x}\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx}(-3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x})\\ &= \frac{d}{dx}(-3c_1e^{-3x}) + \frac{d}{dx}2c_2e^{2x}\\ &= -3c_1\frac{d}{dx}e^{-3x} + 2c_2\frac{d}{dx}e^{2x}\\ &= 9c_1e^{-3x} + 4c_2e^{2x},\end{aligned}$$

นำ $\dfrac{d^2y}{dx^2}, \dfrac{dy}{dx}$ และ y แทนลงในสมการ $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$ ได้

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y &= (9c_1e^{-3x} + 4c_2e^{2x}) + (-3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x}) - 6(c_1e^{-3x} + c_2e^{2x})\\ &= 9c_1e^{-3x} + 4c_2e^{2x} - 3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x} - 6c_1e^{-3x} - 6c_2e^{2x}\\ &= 9c_1e^{-3x} - 3c_1e^{-3x} - 6c_2e^{2x} + 4c_2e^{2x} + 2c_2e^{2x} - 6c_2e^{2x}\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$$

แสดงว่า $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$

หาผลเฉลยเฉพาะ จากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(0)=1$

แทนค่า $x=0$ และ $y=1$ ในสมการ $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$ ได้

$$1=c_1e^{-3(0)}+c_2e^{2(0)}$$

$$1=c_1+c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

และจากเงื่อนไขเริ่มต้น $y'(0)=2$

แทนค่า $x=0$ และ $y=1$ ในสมการ $y'=-3c_1e^{-3x}+2c_2e^{2x}$ ได้

$$2=-3c_1e^{-3(0)}+2c_2e^{2(0)}$$

$$2=-3c_1+2c_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

นำสมการ $(1)\times 2-(2)$ ได้

$$c_1=0$$

นำ $c_1=0$ แทนในสมการ (1) ได้ $c_2=1$

นำ $c_1=0$ และ $c_2=1$ แทนใน $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{2x}$ จะได้ $y=e^{2x}$

ดังนั้น ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=0$ คือ $y=e^{2x}$

การกำจัดค่าคงตัว

สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์ (2544 : 8) ได้กล่าวว่า ในทางปฏิบัติสมการเชิงอนุพันธ์เกิดขึ้นได้หลายทาง ไม่ว่าจะเป็นปัญหาทางคณิตศาสตร์ ปัญหาทางฟิสิกส์ และปัญหาอื่น ๆ สำหรับปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นได้แก่เรื่องความชันของเส้นสัมผัส ความชันของเส้นปกติ ที่ผ่านจุดใด ๆ อยู่ในรูป $\frac{dy}{dx}$ และผ่านจุด (x_0,y_0) ส่วนปัญหาทางฟิสิกส์นั้นก็จะเป็นเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของวัตถุเมื่อกำหนดความเร็วของการเคลื่อนที่ $v(t)$ และจุดเริ่มต้นของการเคลื่อนที่ จะมีสมการเชิงอนุพันธ์เป็น $\frac{ds}{dt}=v(t)$ เมื่อ s เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุ และ t คือเวลาที่วัตถุใช้ในการเคลื่อนที่ และทางหนึ่งที่จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ คือการกำจัดค่าคงตัวจากความสัมพันธ์ที่กำหนดให้ โดยปกติความสัมพันธ์ที่มีค่าคงตัว n ตัวจะทำให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์ดันดับ n ซึ่งเราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับค่าคงตัว โดยการกำจัดค่าคงตัวเหล่านั้น จะเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ ซึ่งอันดับของสมการที่จะสร้างต้องเท่ากับจำนวนของค่าคงตัว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.17 จงกำจัดค่าคงตัว c_1 และ c_2 จากความสัมพันธ์ $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$

วิธีทำ เนื่องจากมีค่าคงตัวสองตัวคือ c_1 และ c_2 เราต้องได้เชิงอนุพันธ์อันดับที่สอง

หาอนุพันธ์ของสมการ $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$ ....(1)

ได้

$y' = -3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x}$ ....(2)

หาอนุพันธ์ของสมการ $y' = -3c_1e^{-3x} + 2c_2e^{2x}$ ได้

$y'' = 9c_1e^{-3x} + 4c_2e^{2x}$ ....(3)

นำสมการ $(1)\times 3$ ได้

$3y = 3c_1e^{-3x} + 3c_2e^{2x}$ ....(4)

นำสมการ $(2)+(4)$ ได้

$y' + 3y = 5c_2e^{2x}$ ....(5)

นำสมการ $(5)\times \dfrac{1}{5e^{2x}}$ ได้

$\dfrac{y'+3y}{5e^{2x}} = c_2$ ....(6)

นำสมการ $(2)\times 3$ ได้

$3y' = -9c_1e^{-3x} + 6c_2e^{2x}$ ....(7)

นำสมการ $(5)+(7)$ ได้

$y'' + 3y' = 10c_2e^{2x}$

$\dfrac{y''+3y'}{10e^{2x}} = c_2$ ....(8)

นำสมการ $(6)=(8)$ ได้

$$\frac{y'+3y}{5e^{2x}} = \frac{y''+3y'}{10e^{2x}}$$

$$\frac{10e^{2x}(y'+3y)}{5e^{2x}} = y''+3y'$$

$$2y'+6y = y''+3y'$$

$$0 = y''+3y'-2y'-6y$$

$$y''+3y'-2y'-6y = 0$$

ดังนั้น จากความสัมพันธ์ $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{2x}$ จะสอดคล้องกับสมการ

$$y''+3y'-2y'-6y = 0$$

ตัวอย่าง 1.18 จงกำจัดตัวคงค่า c จากความสัมพันธ์ $cxy + c^2x + 4 = 0$

วิธีทำ เนื่องจากมีตัวคงค่าหนึ่งตัว คือ c เราต้องได้เชิงอนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง

จาก $cxy + c^2x + 4 = 0$

หาอนุพันธ์ได้

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(cxy + c^2x + 4) &= \frac{d}{dx}0 \\
\frac{d}{dx}cxy + \frac{d}{dx}c^2x + \frac{d}{dx}4 &= 0 \\
c\frac{d}{dx}xy + c^2\frac{d}{dx}x + \frac{d}{dx}4 &= 0 \\
c\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right) + c^2 + 0 &= 0 \\
c\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + c^2 + 0 &= 0 \\
c\left(x\frac{dy}{dx} + y\right) + c^2 &= 0
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $c \neq 0$ ดังนั้น $c = -\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$

แทนค่า $c = -\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$ ในสมการ $cxy + c^2x + 4 = 0$ ได้

$$\begin{aligned}
-(x\frac{dy}{dx} + y)xy + \left[-\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)\right]^2 x + 4 &= 0 \\
-\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)xy + \left(x\frac{dy}{dx} + y\right)^2 x + 4 &= 0 \\
-x^2y\frac{dy}{dx} - xy^2 + \left[\left(x\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + y^2\right]x + 4 &= 0 \\
-x^2y\frac{dy}{dx} - xy^2 + x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2x^2y\frac{dy}{dx} + xy^2 + 4 &= 0 \\
x^2y\frac{dy}{dx} + x^3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4 &= 0 \\
x^2yy' + x^3(y')^2 + 4 &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น จากความสัมพันธ์ $cxy + c^2x + 4 = 0$ จะสอดคล้องกับ

$$x^2yy' + x^3(y')^2 + 4 = 0$$

ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและมีผลเฉลยเดียว

ก่อนที่เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ควรจะทราบวิธีตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ที่เราจะหาผลเฉลยนั้น มีผลเฉลยหรือไม่ เพราะถ้าสมการไม่มีผลเฉลยจะได้ไม่ต้องเสียเวลาในการหา หรือถ้าสมการมีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งผลเฉลยก็จะได้ทราบก่อนที่จะเสียเวลาหาผลเฉลยมาแล้วพบว่าไม่ใช่ผลเฉลยที่ต้องการ ซึ่งทฤษฎีที่จะกล่าวต่อไปนี้เรียกว่า ทฤษฎีบทการมีจริงและความเป็นไปได้อย่างเดียว (Existence and Uniqueness Theorem)

ทฤษฎีบท 1.1 ถ้า $f(x,y)$ และ $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องในโดเมน D ซึ่งอยู่ในระนาบ XY และจุด (x_0,y_0) อยู่ในโดเมน D แล้วสมการ $y'=f(x,y)$ และเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(x_0)=y_0$ มีผลเฉลยเดียวคือ ϕ ในบางช่วง $\left|x-x_0\right|<h$ เมื่อ $h\in R$ และ $h>0$ ซึ่ง h มีค่าน้อยมาก ๆ (สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์. 2544 : 9)

ตัวอย่าง 1.19 จงพิจารณาสมการ $y'=2x+y^3$ ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0)=0$ มีผลเฉลยเพียงค่าเดียวหรือไม่

วิธีทำ จากสมการ $y'=2x+y^3$

เนื่องจาก $f(x,y)=2x+y^3$

และ $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}(2x+y^3)=2y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในโดเมน D ใด ๆ

ในระนาบ xy ซึ่งมีจุด $(x_0,y_0)=(0,0)$

ดังนั้น สมการ $y'=2x+y^3$ มีผลเฉลยเพียงค่าเดียว

ตัวอย่าง 1.20 จงพิจารณาสมการ $\dfrac{dy}{dx}=x-\sqrt{y}$ ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นคือ $y(0)=0$ มีผลเฉลยเพียงค่าเดียวหรือไม่

วิธีทำ สมการ $\dfrac{dy}{dx}=x-\sqrt{y}$

จากทฤษฎีบท 1.1 ได้ว่า $f(x,y)=x-\sqrt{y}$

และ $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)=\dfrac{\partial}{\partial y}(x-\sqrt{y})=\dfrac{1}{2\sqrt{y}}$

พบว่า $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.1 สมการ $\dfrac{dy}{dx}=x-\sqrt{y}$ ไม่มีผลเฉลยเพียงค่าเดียว นั่นคืออาจมีผลเฉลยหลายค่า หรือไม่มีผลเฉลยเลยก็ได้

สรุปท้ายบท

จากที่เราได้ทราบประวัติการเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ขึ้นมาได้อย่างไรนั้นพร้อมทั้งนิยามของสมการเชิงอนุพันธ์ในรูปแบบต่าง ๆ ทำให้ทราบว่า สมการเชิงอนุพันธ์ คือสมการซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์นั่นเอง ส่วนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญคือสมการเชิงอนุพันธ์ซึ่งประกอบด้วยอนุพันธ์ที่เทียบกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น อันดับของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึงอันดับของอนุพันธ์ที่มีอันดับสูงสุดที่ปรากฏอยู่ในสมการ และระดับขั้นของสมการเชิงอนุพันธ์ หมายถึงเลขชี้กำลังที่มีค่ามากที่สุดของอนุพันธ์ซึ่งมีอันดับสูงสุด ในกรณีที่สามารถทำให้ทุก ๆ อนุพันธ์ในสมการเชิงอนุพันธ์ มีเลขชี้กำลังเป็นเลขจำนวนเต็มบวกนั่นเอง ส่วนผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ คือความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรอิสระ และตัวแปรตามซึ่งไม่อยู่ในรูปอนุพันธ์ ซึ่งสอดคล้องกับสมการเชิงอนุพันธ์นั้น นั่นคือเมื่อนำผลเฉลยไปแทนในสมการเชิงอนุพันธ์แล้วทำให้สมการนั้นเป็นจริง เช่น

$y = 3e^{2x}$ เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

เนื่องจาก $y = 3e^{2x}$ จะได้ $\dfrac{dy}{dx} = 6e^{2x}$ แทนค่า y และ $\dfrac{dy}{dx}$ ในสมการจะได้

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} - 2y &= 6e^{2x} - 2(3e^{2x}) \\ &= 6e^{2x} - 6e^{2x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

สำหรับการกำจัดค่าคงตัวจากความสัมพันธ์นั้น ถ้าความสัมพันธ์ที่มีตัวคงค่า n ตัวจะทำให้เกิดสมการเชิงอนุพันธ์อันดับ n ซึ่งเราสามารถสร้างสมการเชิงอนุพันธ์ได้จากความสัมพันธ์ที่เกี่ยวข้องกับตัวคงค่า โดยการกำจัดค่าคงตัวเหล่านั้น แล้วจะเกิดสมการเชิงอนุพันธ์ และอันดับของสมการที่จะสร้างต้องเท่ากับจำนวนของค่าคงตัวนั่นเอง และก่อนที่เราจะศึกษาวิธีการหาผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ ควรจะต้องตรวจสอบว่าสมการนั้น ๆ มีผลเฉลยหรือไม่ เพราะถ้าสมการไม่มีผลเฉลยจะได้ไม่เสียเวลาในการหา หรือถ้าสมการมีผลเฉลยมากกว่าหนึ่งผลเฉลยก็จะได้ทราบก่อนที่จะเสียเวลาหาผลเฉลยมาแล้วพบว่าไม่ใช่ผลเฉลยที่ต้องการ ซึ่งทฤษฎีที่กล่าวถึงนี้เรียกว่า ทฤษฎีบทการมีอยู่จริงและและมีผลเฉลยเดียว

แบบฝึกหัดท้ายบทที่ 1

1. จงพิจารณาว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้สมการใดเป็นสมการเชิงอนุพันธ์สามัญ สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย สมการเชิงเส้น หรือสมการไม่เชิงเส้น พร้อมทั้งบอกอันดับและระดับขั้น

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - 1$

   1.2 $\dfrac{d^3y}{dx^3} + x^2y = -3$

   1.3 $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + (x^2-2)\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x+3$

   1.4 $(2x - xy^2)dx - (3-x)dy = 0$

   1.5 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x$

   1.6 $r\dfrac{\partial v}{\partial r} + h^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial h^2} = 6$

   1.7 $x\dfrac{d^3y}{dx^3} + (x^2-2)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy = 0$

   1.8 $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \dfrac{\partial f}{\partial z} = 2x$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้แต่ละสมการเป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

   2.1 $y' + y - x = 1$, $y = x + 3e^{-x}$

   2.2 $y'' - 7y' + 12y = 0$, $y = 2e^{3x} - 5e^{4x}$

   2.3 $yy'' = x$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{3}}x^{3/2}$

   2.4 $y''' - 3y' + 2y = 0$, $y = 3e^{-2x} + 4e^{x}$

   2.5, $y''' - 9y' = 0$, $y = 3 + \dfrac{1}{2}e^{-3x} + \dfrac{1}{2}e^{3x}$

3. จงแสดงว่า $y = (x^2 + c)e^{-x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y' + y = 2xe^{-x}$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว และหาค่าของ c เมื่อกำหนด $y(-1) = 3 + e$

4. จงแสดงว่า $y = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ เมื่อ c_1, c_2, c_3 เป็นค่าคงตัว

5. จงแสดงว่า $y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' - 2y' - 8y = 0$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

6. จงแสดงว่า $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x} + c_4 x e^{2x}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y^{(4)} - 3y''' - 4y' = 0$ เมื่อ c_1, c_2, c_3, c_4 เป็นค่าคงตัว

7. จงแสดงว่า $y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + x^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' + 5y = 5x^2 + 4x + 2$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัว

8. จงกำจัดตัวคงค่าจากความสัมพันธ์ต่อไปนี้

   8.1 $y = 1 + cx + c^2$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

   8.2 $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

   8.3 $y = x^2 + c_1 x + c_2 e^{-x}$ เมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงตัว

   8.4 $x^2 y = 1 + cx$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว

   8.5 $y = Ae^{3x} + Bxe^{3x}$ เมื่อ A, B เป็นค่าคงตัว

9. จงพิจารณาว่าสมการที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีผลเฉลยเพียงค่าเดียวหรือไม่

   6.1 $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ เมื่อ $y(0) = 1$

   6.2 $y' = \dfrac{y^2 - 1}{x - 3}$ เมื่อ $y(1) = 0$

   6.3 $y''' - 9y' = 0$ เมื่อ $y(0) = 4, y'(0) = 0, y''(0) = 9$

   6.4 $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$ เมื่อ $y(0) = 1, y'(0) = -7, y''(0) = -1$

10. จงแสดงว่า $y' = x^2 \sin y$ มีผลเฉลยเพียงค่าเดียว เมื่อกำหนดเงื่อนไขค่าเริ่มต้น $y(1) = -2$

11. จงแสดงว่าผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + y = x$ อยู่ในรูป $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x + x$ เมื่อ c_1 และ c_2 เป็นค่าคงตัว

12. จงแสดงว่า $y = xe^{x} + e^{2x} - 4x^2$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ

$$y'' - 3y' + 4y = 2xe^{x} + 2e^{2x} - e^{x} - 16x^2 + 24x - 8$$

เอกสารอ้างอิง

พรชัย สาตรวาหา. (2550). **สมการเชิงอนุพันธ์.** พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพ ฯ : พิทักษ์การพิมพ์

พิมล เชียงกูล. (2543). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** ม.ป.ท : ม.ป.พ.

วารี เกรอต. (2542). **สมการเชิงอนุพันธ์.** กรุงเทพ ฯ : ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

สมศักดิ์ เทศสวัสดิ์วงศ์. (2544). **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ.** บุรีรัมย์ : คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีสถาบันราชภัฏบุรีรัมย์.

Charles E. Roberts,Jr. (2010). **Ordinary Differential Equations.** Taylor & Francis Group. U.S.A.