บทที่ 2
ตัวแปรสุ่มและการแจกแจงความน่าจะเป็น

ในการทดลองทางสถิติโดยทั่วไปแล้ว สมาชิกของสเปซตัวอย่างมักจะอยู่ในรูปของตัวอักษรหรือตัวเลข เพื่อที่แสดงให้เห็นถึงลักษณะของสมาชิกนั้นๆ เช่น ในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ แซมเปิลสเปซของเหตุการณ์นี้ เขียนแทนด้วย S = { HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT } โดยที่ H แทน "หัว" และ T แทน "ก้อย" อย่างไรก็ตาม การแทนสมาชิกของสเปซตัวอย่างด้วยตัวเลข ทำให้อ้างถึงสมาชิกของแซมเปิลสเปซดังกล่าวเป็นไปได้อย่างง่ายและชัดเจน เช่น ถ้าให้ X = จำนวนเหรียญที่ได้หัวจากการโยนเหรียญ 3 เหรียญดังกล่าว จะได้ว่าค่าของ X ที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2, 3 โดยที่ X = 0 หมายถึง TTT, X = 1 หมายถึง HTT, THT, TTH , X = 2 หมายถึง HHT, HTH, THH และ X = 3 หมายถึง HHH ตัวแปร X ดังกล่าว เรียกว่า **ตัวแปรสุ่ม (Random Variable)**

2.1 ตัวแปรสุ่มและชนิดของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่ม (Random variable) คือ ฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง ซึ่งถูกกำหนดโดยผลลัพธ์ของแซมเปิลสเปซ ในที่นี้จะใช้อักษรลาตินตัวใหญ่ เช่น X, Y หรือ Z เป็นสัญลักษณ์แทนตัวแปรสุ่ม และใช้อักษรลาตินตัวเล็ก เช่น x, y หรือ z เป็นสัญลักษณ์แทนค่าของตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง 2.1</u> ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่แทนเหตุการณ์ที่ร้าน JP Shop จะเปิดขายโทรศัพท์มือถือ ในเดือนมีนาคม ซึ่งอาจจะมีค่าต่างๆ ได้ดังนี้

x = 0 ไม่เปิดทำการเลย	x = 1 เปิดทำการ 1 วัน
x = 2 เปิดทำการ 2 วัน	x = 3 เปิดทำการ 2 วัน
x = 31 เปิดทำการ 31 วัน	

<u>ตัวอย่าง 2.2</u> ถ้าให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่แทนเหตุการณ์ที่เครื่องจักรชำรุดของโรงงานอุตสาหกรรมไทยพลาสติกในเดือนที่ผ่านมา ซึ่งมีเครื่องจักรจำนวนทั้งหมด 35 เครื่อง ซึ่งอาจจะมีค่าต่าง ๆ ได้ดังนี้

x = 0 ไม่มีเครื่องจักรชำรุดเลย　　x = 1 เครื่องจักรชำรุด 1 เครื่อง

x = 2 เครื่องจักรชำรุด 2 เครื่อง　　x = 3 เครื่องจักรชำรุด 3 เครื่อง

x = 20 เครื่องจักรชำรุด 20 เครื่อง　　x = 35 เครื่องจักรชำรุดทั้งหมด

<u>ตัวอย่าง 2.3</u> ในการทดสอบหลอดไฟฟ้า 2 หลอด ถ้าให้ D แทนหลอดไฟฟ้าที่เสียและ N แทนหลอดไฟฟ้าที่ดี จะได้แซมเปิลสเปซ คือ S = { DD, DN, ND, NN }

ถ้าให้ X แทน จำนวนหลอดไฟฟ้าที่ดี จะได้ว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่

x	สมาชิกใน S
0	DD
1	DN, ND
2	NN

ชนิดของตัวแปรสุ่ม

ตัวแปรสุ่มแบ่งได้ 2 ชนิด ดังนี้

ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete random variable) หมายถึง ตัวแปรสุ่มที่ให้ค่าเป็นจำนวนนับ ซึ่งได้จากการนับ โดยทั่วไปสามารถจำแนกได้เป็นจำนวนนับจำกัด และจำนวนนับอนันต์ เช่น

1. จำนวนครั้งในการหงายก้อย สำหรับการโยนเหรียญ 4 ครั้ง (จำกัด)
2. ผลรวมแต้มของการโยนลูกเต๋า 2 ครั้ง (จำกัด)
3. จำนวนแผ่น CD ที่ชำรุด ใน 1 กล่อง (จำกัด)
4. จำนวนลูกค้าที่เข้ามาใช้บริการร้านสะดวกซื้อในช่วงเวลา 06.00 – 08.00 น. (อนันต์)
5. จำนวนรถที่วิ่งเข้ามหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งใช่วงเวลา 07.00 – 08.00 น. (อนันต์)
6. จำนวนอุบัติเหตุทางรถยนต์ที่จะเกิดขึ้นในช่วงวันหยุดเทศกาลปีใหม่นี้ (อนันต์)

ตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง (Continuous random variable) หมายถึง ตัวแปรสุ่มที่ให้ค่าเป็นจำนวนจริง ซึ่งได้จากการวัด การตวง และการชั่ง เช่น

1. อุณหภูมิของกรุงเทพฯ ในแต่ละวัน
2. น้ำหนักของนักศึกษาชั้นปีที่ 2
3. ปริมาณนมที่รีดได้จากโคของฟาร์มโคนม
4. ปริมาณข้าวเหนียวต่อไร่ที่ผลิตได้ของภาคตะวันออกเฉียงเหนือในปีหน้า
5. $35 \leq X \leq 80$

2.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง คือ กฎหรือวิธีการที่กำหนดความน่าจะเป็นให้แก่ค่าตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง โดยการหาค่าความน่าจะเป็นของจุดตัวอย่างต่างๆ ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ ที่ให้ค่าเดียวกันกับตัวแปรสุ่มนั้น

การโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง เมื่อทั้ง 8 ผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กัน จะได้ตารางดังนี้

ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการเกิดหัว

ผลลัพธ์	ความน่าจะเป็น	x
(H,H,H)	1/8	3
(H,H,T)	1/8	2
(H,T,H)	1/8	2
(T,H,H)	1/8	2
(H,T,T)	1/8	1
(T,H,T)	1/8	1
(T,T,H)	1/8	1
(T,T,T)	1/8	0

เมื่อ $P(X = x)$ คือ สัญลักษณ์แทนความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่ม X มีค่า x จะได้ตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง X ดังนี้

x	$P(X = x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

<u>คุณสมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง</u>

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง X จะได้ว่า

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x
2. $\sum_{x} f(x) = 1$
3. $P(X = x) = f(x)$

<u>ตัวอย่าง 2.4</u> การโยนเหรียญ 1 อัน 3 ครั้ง

ให้ X เป็นจำนวนครั้งของการเกิดหัว

x	$P(X = x)$
0	1/8
1	3/8
2	3/8
3	1/8

ฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ คือ

$$f(x) = \frac{{}^{3}C_{x}}{8} \quad ; \quad x = 0, 1, 2, 3$$

เนื่องจาก

$$f(0) = P(X = 0) = \frac{{}^{3}C_{0}}{8} = \frac{1}{8}$$

$$f(1) = P(X = 1) = \frac{{}^{3}C_{1}}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(2) = P(X=2) = \frac{{}^{3}C_{2}}{8} = \frac{3}{8}$$

$$f(3) = P(X=3) = \frac{{}^{3}C_{3}}{8} = \frac{1}{8}$$

ดังนั้น จะได้ว่า 1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x

2. $\sum_{x} f(x) = f(0)+f(1)+f(2)+f(3) = \frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8} = 1$

3. $P(X=x) = f(x)$

__ตัวอย่าง 2.5__ ให้ X แทนจำนวนการใช้ห้องสมุดในมหาวิทยาลัยต่อวัน และมีความน่าจะเป็น ดังนี้

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.4	0.3	0.1

จงหา

ก. $P(X \leq 1)$

ข. $P(1 \leq X \leq 3)$

ค. $P(X \geq 2)$

__วิธีทำ__ ก. $P(X \leq 1) = P(X=0)+P(X=1) = 0.2+0.4 = 0.6$

ข. $P(1 \leq X \leq 3) = P(X=1)+P(X=2)+ P(X=3) = 0.4+0.3+0.1 = 0.8$

ค. $P(X \geq 2) = P(X=2)+P(X=3) = 0.3+0.1 = 0.4$

2.3 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง คือ การแจกแจงค่าของตัวแปรสุ่มที่เป็นไปได้ทั้งหมด พร้อมทั้งความน่าจะเป็นที่จะเกิดค่านั้น ๆ แต่เนื่องจากตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่องไม่สามารถกำหนดค่าความน่าจะเป็นให้กับแต่ละค่าได้ เนื่องจากค่าที่เป็นไปได้มีมากมายจนนับไม่ได้ ไม่สามารถเขียนให้อยู่ในรูปตารางได้ การหาความน่าจะเป็นจึงกระทำได้โดยการกำหนดเป็นช่วงของค่า

เช่น $P(0 < X < 10)$ หรือ $P(X > 2.85)$ ซึ่งการแจกแจงนั้นสามารถแสดงในรูปของกราฟ สูตร หรือฟังก์ชัน

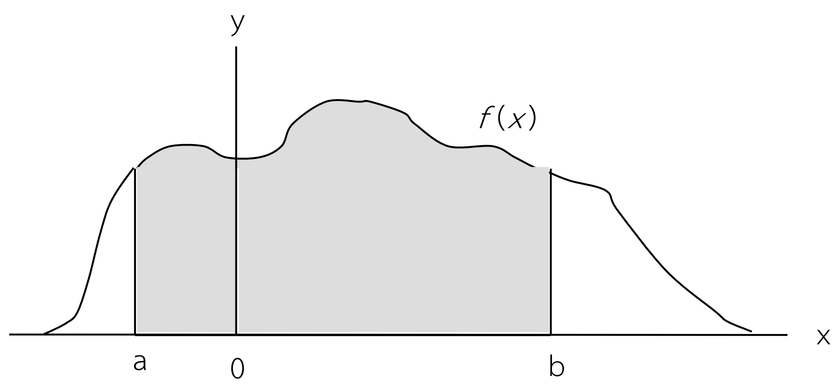
<u>คุณสมบัติของฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง</u>

ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง X จะได้ว่า

1. $f(x) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ x
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
3. $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

โดย $P(a \leq X \leq b)$ คือ พื้นที่ใต้โค้ง $f(x)$ เมื่อ X มีค่าตั้งแต่ a ถึง b ดังรูป ซึ่งเขียนแทนด้วย $\int_{a}^{b} f(x)dx$ และพื้นที่ทั้งหมดใต้โค้ง $f(x)$ รวมกันเท่ากับ 1 ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



แต่ $\quad P(X = a) = \int_{a}^{a} f(x)dx = 0$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P(a < X \leq b) \\ &= P(a \leq X < b) \\ &= P(a < X < b) \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง 2.6</u> กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี p.d.f. เป็น

$$f(x) = \frac{1}{9} \ , \ 0 < x < 7$$

จงหา $P(2 \leq X \leq 5)$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} P(2 \leq X \leq 5) &= \int_2^5 f(x)dx \\ &= \int_2^5 \frac{1}{9}dx = \left.\frac{x}{9}\right|_2^5 = \frac{5}{9} - \frac{2}{9} \\ &= \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง 2.7</u> กำหนดให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มี p.d.f. เป็น

$$f(\mathrm{x}) = \begin{cases} 2x^2 & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $P(1/2 < X < 1)$

วิธีทำ

$$P(1/2 < X < 1) = \int_{1/2}^{1} f(x)dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} 2x^2 dx = \left.\frac{2x^3}{3}\right|_{1/2}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{24} = \frac{14}{24} = \frac{7}{12}$$

ตัวอย่าง 2.8 ให้ X เป็นสัดส่วนปริมาณตะกั่วในโลหะผสม ที่ได้จากการผสมโลหะ 2 ชนิด โดย

$$f(x) = \begin{cases} 20x^3(1-x) & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \ x \ \text{มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ก. จงแสดงว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

ข. จงหา P(X < 2/3)

วิธีทำ ก. จากโจทย์ เราได้ $f(x) \geq 0$ และ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{1} 20x^3(1-x)dx = \left[\frac{20x^4}{4} - \frac{20x^5}{5}\right]_0^1 = 1$$

ดังนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

ข. $$P\left(X < \frac{2}{3}\right) = \int_{-\infty}^{2/3} f(x)dx = \int_{0}^{2/3} 20x^3(1-x)dx$$

$$= \left[\frac{20x^4}{4} - \frac{20x^5}{5}\right]_0^{2/3} = \frac{112}{243}$$

2.4 การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วม

โดยทั่วไปแล้ว เราอาจสนใจผลการทดลองซึ่งประกอบด้วยตัวแปรสุ่มมากกว่าหนึ่งตัวในขณะเดียวกันก็ได้ เช่น ในเด็กนักเรียนประถมคนหนึ่ง ๆ ครูประจำชั้นอาจสนใจทั้งระดับเชาว์ปัญญา น้ำหนักและส่วนสูง แต่ในหัวข้อนี้จะจำกัดเฉพาะ 2 ตัวแปรสุ่มเท่านั้น

ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มของการทดลองสุ่มหนึ่ง จะเรียกฟังก์ชันซึ่งแสดงว่าตัวแปรสุ่ม X มีค่าเท่ากับ x และ Y มีค่าเท่ากับ y มีความน่าจะเป็นเท่าใดว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม** (Joint Probability Function) ของ X และ Y โดยเขียนแทนด้วย $f(x,y)$

นิยาม 2.1 $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X และ Y ถ้า

1. $f(x,y) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ (x, y)
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = 1$
3. $P\left(X=x, Y=y\right) = f(x,y)$ สำหรับทุกค่าของ (x, y)

<u>ตัวอย่าง 2.9</u> ในกล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 3 สี ซึ่งมีสีส้ม 3 ลูก สีเขียว 2 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลอย่างสุ่ม 4 ลูก โดยกำหนดให้ X แทนจำนวนลูกบอลสีส้ม และ Y แทนจำนวนลูกบอลสีเขียว ที่หยิบมา จงหาฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของ X กับ Y

<u>วิธีทำ</u> ในกล่องบรรจุลูกบอลทั้งหมด 8 ลูก หยิบอย่างสุ่ม 4 ลูก จะทำได้ ${}^{8}C_4 = 70$ วิธี

$$P(X=0, Y=1) = P(\text{ได้บอลสีเขียว 1 ลูก, สีเหลือง 3 ลูก})$$

$$= \frac{{}^{3}C_0\,{}^{2}C_1\,{}^{3}C_3}{{}^{8}C_4} = \frac{1}{35}$$

$$P(X=1, Y=1) = P(\text{ได้บอลสีส้ม 1 ลูก, สีเขียว 1 ลูก, สีเหลือง 2 ลูก})$$

$$= \frac{{}^{3}C_1\,{}^{2}C_1\,{}^{3}C_2}{{}^{8}C_4} = \frac{9}{35}$$

ในทำนองเดียวกันอาจคำนวณค่าความน่าจะเป็นร่วมได้ตามตาราง ดังนี้

x	0	1	2
0	0	1/35	3/70
1	3/70	9/35	9/70
2	9/70	9/35	3/70
3	3/70	1/35	0

นิยาม 2.2 $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y ถ้า

1. $f(x,y) \geq 0$ สำหรับทุกค่าของ (x, y)

2. $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$

ตัวอย่าง 2.10 ถ้าตัวแปรสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 2xy & , \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & , \quad (x,y) \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $P(0 < X < 1/2\ ,\ 1/2 < Y < 1)$

วิธีทำ $P(0 < X < 1/2\ ,\ 1/2 < Y < 1) = \int_{1/2}^{1}\int_{0}^{1/2} 2xy\ dxdy$

$$= 2\int_{1/2}^{1} y\left[\frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_0^{1/2} dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^2}{2}\right]\Bigg|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{3}{32}$$

2.5 การแจกแจงความน่าจะเป็นเดี่ยว

ถ้า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง X และ Y แล้ว

$g(x)$ **เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว** (marginal probability function) ของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง X โดย

$$g(x) = \sum_{y} f(x,y)$$

$h(y)$ **เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว** (marginal probability function) ของตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง Y โดย

$$h(y) = \sum_{x} f(x,y)$$

ถ้า $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง X และ Y แล้ว

$g(x)$ **เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว** (marginal probability function) ของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง X โดย

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$h(y)$ **เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นเดี่ยว** (marginal probability function) ของตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง Y โดย

$$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

<u>ตัวอย่าง 2.11</u> ถ้าตัวแปรสุ่ม X และ Y มีฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วม

$$f(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \begin{cases} 2(x+y) & , \quad 0<x<1,\ 0<y<1 \\ 0 & , \quad (x,y) \ \text{มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $g(x)$ และ $h(y)$

<u>วิธีทำ</u>

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{0}^{1} 2(x+y)dy$$

$$= 2xy + y^2 \Big|_{y=0}^{y=1}$$

$$= 2x+1 \quad , \quad 0 < x < 1$$

และ $$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_{0}^{1} 2(x+y)dx$$

$$= x^2 + 2xy \Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$= 1+2y \quad , \quad 0 < y < 1$$

2.6 ค่าคาดหวังของตัวแปรสุ่ม

โดยที่ตัวแปรสุ่มมีค่าได้หลายค่า ค่าที่ถือว่าเป็นตัวแทนที่ดี คือ ค่าเฉลี่ย แต่เนื่องจากตัวแปรสุ่มจะมีค่าเท่าใดก็ด้วยความน่าจะเป็นหนึ่ง ๆ ดังนั้น ค่าเฉลี่ยดังกล่าวจึงเป็นค่าเฉลี่ยที่คาดว่าจะเป็นหรือค่าคาดหวัง (Expected value) ของตัวแปรสุ่ม

<u>นิยาม 2.3</u> ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X แล้ว μ หรือ $E(x)$ คือค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวังของ X โดย

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

$$\mu = E(x) = \sum_x xf(x)$$

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

ตัวอย่าง 2.12 ในการโยนเหรียญเที่ยงตรง 3 อัน 1 ครั้ง ให้ X แทน จำนวนเหรียญที่ขึ้นหน้าก้อย จงหาค่าเฉลี่ยของ X

เหตุการณ์	x	$P(X = x)$
(H,H,H)	0	1/8
(T,H,H), (T,H,T), (H,H,T)	1	3/8
(T,T,H), (H,T,T), (T,H,T)	2	3/8
(T,T,T)	3	1/8
รวม		1

วิธีทำ ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนเหรียญที่ขึ้นหน้าก้อย

ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X คือ

$$\mu = E(x) = \sum_{x} xf(x) = 0\left(\frac{1}{8}\right) + 1\left(\frac{3}{8}\right) + 2\left(\frac{3}{8}\right) + 3\left(\frac{1}{8}\right) = 1.5$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของตัวแปรสุ่ม X เท่ากับ 1.5 หมายความว่า เหรียญจะขึ้นหน้าก้อยโดยเฉลี่ย 1.5 อัน

ตัวอย่าง 2.13 ถ้าจำนวนอุบัติเหตุรถยนต์ต่อวันในเมืองหนึ่ง มีค่าดังตารางต่อไปนี้

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.25	0.05	0.2	0.1

วิธีทำ

$$\mu = E(X) = \sum_{x=0}^{4} x f(x)$$

$$= 0(0.4) + 1(0.25) + 2(0.05) + 3(0.2) + 4(0.1)$$

$$= 1.35$$

ตัวอย่าง 2.14 ถ้าตัวแปรสุ่ม X ซึ่งมีฟังก์ชัน p.d.f

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & , \quad 1 \le x \le 2, \\ 0 & , \quad x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $E(x)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_{1}^{2} x \cdot \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{8}[16-1] \\ &= \frac{45}{8} \end{aligned}$$

นิยาม 2.4 ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X และ $u(X)$ เป็นฟังก์ชันใดๆ ของ X แล้ว $\mu_{u(x)}$ หรือ $E[u(x)]$ คือ ค่าเฉลี่ยหรือค่าคาดหวังของ $u(X)$ โดย

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

$$\mu_{u(X)} = E[u(X)] = \sum_{x} u(x) f(x)$$

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

$$\mu_{u(X)} = E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx$$

ตัวอย่าง 2.15 ถ้า X เป็นจำนวนรถยนต์ที่มารับบริการล้างที่สถานีบริการแห่งหนึ่งในวันเสาร์ระหว่างเวลา 16.00 – 17.00 น. โดยมีการแจกแจงความน่าจะเป็นดังนี้

X	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	1/12	1/12	1/4	1/4	1/6	1/6

ถ้า $u(X) = 4X + 1$ คือ จำนวนเงินที่สถานีบริการต้องจ่ายแก่พนักงานล้างรถ หน่วย : บาท จงหาค่าคาดหวังของจำนวนเงินที่พนักงานล้างรถจะได้รับจากการทำงานในช่วงเวลาดังกล่าว

วิธีทำ

$$E[u(x)] = E(4x+1)$$

$$= \sum_{x=4}^{9}(4x+1)f(x)$$

$$= (17)\left(\frac{1}{12}\right)+(21)\left(\frac{1}{12}\right)+(25)\left(\frac{1}{4}\right)+(29)\left(\frac{1}{4}\right)+(33)\left(\frac{1}{6}\right)+(37)\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$= 28.33$$

บาท

ตัวอย่าง 2.16 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}\left(1-x^2\right) & ,-1<x<1 \\ 0 & ,x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหาค่าคาดหวังของ $u(X)=3X-2$

วิธีทำ $E[u(x)] = E(3X-2)$

$$= \int_{-1}^{1}(3x-2)f(x)dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(3x-2)\frac{3}{4}\left(1-x^2\right)dx$$

$$= \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left(-3x^3+2x^2+3x-2\right)dx$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{-3x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{1}$$

$$= -2$$

<u>คุณสมบัติของค่าคาดหวัง</u>

<u>ทฤษฎีที่ 2.1</u> ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

ถ้า $a = 0$ **แล้ว** $E(b) = b$

ถ้า $b = 0$ **แล้ว** $E(aX) = aE(x)$

<u>ทฤษฎีที่ 2.2</u> ถ้า $u_1(X)$ และ $u_2(X)$ เป็นฟังก์ชันใดๆของตัวแปรสุ่ม X แล้ว

$$E\left[u_1(X) \pm u_2(X)\right] = E\left[u_1(X)\right] \pm E\left[u_2(X)\right]$$

<u>ตัวอย่าง 2.17</u> กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 2(x-1)\,,\, 1<x<2 \\ 0 \quad ,\ x \text{ ค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา $E\left(X^2+X-2\right)$

<u>วิธีทำ</u> $E(X^2+X-2) = E(X^2)+E(X)-2$

$$\text{E(X)} = \int_1^2 2x(x-1)dx = \frac{5}{3}$$

$$\text{E(X}^2\text{)} = \int_1^2 2x^2(x-1)dx = \frac{17}{6}$$

ดังนั้น

$$\text{E(X}^2+\text{X}-2) = \frac{17}{6}+\frac{5}{3}-2 = \frac{5}{2}$$

2.7 ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม

ความแปรปรวนเป็นคุณสมบัติที่สำคัญอีกประการหนึ่งของตัวแปรสุ่ม นอกเหนือไปจากค่าเฉลี่ย ซึ่งมักมีการพิจารณาควบคู่กันไปเสมอ โดยความแปรปรวนเป็นค่าที่ใช้วัดการกระจายของตัวแปรสุ่ม

<u>นิยาม 2.5</u> ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X และ ค่าเฉลี่ย μ แล้ว σ^2 หรือ $Var(X)$ คือ ความแปรปรวน (Variance) ของ X โดย

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

$$\sigma^2 = \text{Var(X)} = \text{E}[(\text{X}-\mu)^2] = \sum_x (x-\mu)^2 f(x)$$

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

$$\sigma^2 = \text{Var(X)} = \text{E}[(\text{X}-\mu)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$$

จากความแปรปรวน เรียกค่าบวกของรากที่สองของความแปรปรวนหรือ σ ว่า **ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน** (Standard deviation) ของตัวแปรสุ่ม

<u>ตัวอย่าง 2.18</u> จงหาความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X โดยที่

$$f(x) = \frac{{}^{6}C_x \, {}^{4}C_{3-x}}{{}^{10}C_3}, \quad x = 0,1,2,3$$

ตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ดังนี้

x	0	1	2	3
$f(x)$	1/30	9/30	15/30	5/30

<u>วิธีทำ</u>

$$\mu = \text{E(X)} = \sum_{x=0}^{3} x f(x)$$

$$= (0)\left(\frac{1}{30}\right)+(1)\left(\frac{9}{30}\right)+(2)\left(\frac{15}{30}\right)+(3)\left(\frac{5}{30}\right)$$

$$= 1.8$$

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^{3}(x-1.8)^2 f(x)$$

$$= (0-1.8)^2\left(\frac{1}{30}\right)+(1-1.8)^2\left(\frac{9}{30}\right)$$

$$+(2-1.8)^2\left(\frac{15}{30}\right)+(3-1.8)^2\left(\frac{5}{30}\right)$$

$$= 0.56$$

$$\sigma = \sqrt{0.56} = 0.748$$

<u>ทฤษฎีที่ 2.3</u> ความแปรปรวนของตัวแปรสุ่ม X คือ σ^2 หรือ $Var(X)$ โดย

$$\sigma^2 = \mathrm{Var(X)} = \mathrm{E(X^2)} - \mu^2$$

<u>ตัวอย่าง 2.19</u> ให้ X แทนปริมาณยา (หน่วย : ลบ.ซม.) ที่ใช้กับหนูเพื่อควบคุมโรค A โดยมีฟังก์ชัน p.d.f. คือ

$$f(x) = \frac{25}{2}x \qquad ;\ 0 \le x \le 0.4$$

จงหา ก. ปริมาณยาที่ใช้โดยเฉลี่ย

ข. ความแปรปรวนของปริมาณยาที่ใช้

<u>วิธีทำ</u> ก. จาก $\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$

$$= \int_{0}^{0.4} x\left(\frac{25}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{25}{2}\int_{0}^{0.4} x^2 dx$$

$$= \frac{25}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{0.4}$$

$$= 0.27$$

ดังนั้น ปริมาณยาที่ใช้โดยเฉลี่ย 0.27 ลบ.ซม.

ข. จาก
$$\sigma^2 = \text{Var(X)} = \text{E}(X^2) - \mu^2$$
$$= E(X^2) - (0.27)^2$$

หาค่า $E(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx$

$$E(x^2) = \int_{0}^{0.4} x^2\left(\frac{25}{2}x\right)dx$$
$$= \frac{25}{2}\int_{0}^{0.4} x^3 dx$$
$$= \frac{25}{2}\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{0.4}$$
$$= 0.08$$

นั่นคือ $\sigma^2 = \text{Var(X)} = 0.08 - 0.0729 = 0.0071$

ดังนั้น ค่าความแปรปรวนของปริมาณยาที่ใช้เท่ากับ 0.0071 (ลบ.ซม.)^2

ตัวอย่าง 2.20 กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{18}(x+1) & , -1 < x < 5 \\ 0 & , x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

ถ้า X เป็นกำไรที่ผู้รับเหมาจะได้รับจากการประมูล หน่วย : หมื่นบาท จงหาความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานของ X

<u>วิธีทำ</u>

$$\mu = E(X)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{5} \frac{x}{18}(x+1) dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{54} + \frac{x^2}{36} \right]_{-1}^{5} = 3$$

และ $$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{5} \frac{x^2}{18}(x+1) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{72} + \frac{x^3}{54} \right]_{-1}^{5}$$

$$= 11$$

$$\sigma^2 = E(X^2) - \mu^2$$

$$= 11 - 3^2 = 2$$

$$\sigma = \sqrt{2} = 1.414 \text{ บาท}$$

<u>นิยาม 2.6</u> ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X และ $u(X)$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ของ X แล้ว $\sigma^2_{u(X)}$ คือ ความแปรปรวน ของ $u(X)$ โดย

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดไม่ต่อเนื่อง

$$\sigma^2_{u(X)} = E\left[\left\{ u(X) - \mu_{u(X)} \right\}^2 \right] = \sum_{x} \left\{ u(X) - \mu_{u(X)} \right\}^2 f(x)$$

เมื่อ X เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่อง

$$\sigma^2_{u(X)} = E\left[\left\{ u(X) - \mu_{u(X)} \right\}^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ u(X) - \mu_{u(X)} \right\}^2 f(x) dx$$

คุณสมบัติของความแปรปรวน

<u>ทฤษฎีที่ 2.4</u> ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ แล้ว

$$\sigma^2_{aX+b} = Var(aX+b) = a^2\sigma^2_x = a^2\sigma^2$$

$$\textbf{ถ้า } a = 1 \textbf{ แล้ว } \sigma^2_{X+b} = Var(aX+b) = \sigma^2_x = \sigma^2$$

$$\textbf{ถ้า } b = 0 \textbf{ แล้ว } \sigma^2_{aX} = Var(aX) = a^2\sigma^2_x = a^2\sigma^2$$

<u>ตัวอย่าง 2.21</u> ถ้า $Var(X) = 16$ จงหา $Var(3X+2)$

<u>วิธีทำ</u> $Var(3X+2) = 3^2 Var(X) + Var(2) = 9(16) + 0 = 144$

<u>ตัวอย่าง 2.22</u> ถ้า $Var(X) = 10$ จงหา $Var(X+\frac{5}{3})$

<u>วิธีทำ</u> $Var(X-\frac{5}{3}) = 1^2 Var(X) - Var\left(\frac{5}{3}\right) = 1(10) - 0 = 10$

2.8 บทสรุป

ในทางสถิติตัวแปรสุ่มมีความสำคัญมาก เพราะจะใช้อธิบายลักษณะหรือเหตุการณ์ต่าง ๆ ที่เราสนใจศึกษาได้สะดวกกว่า เราจะอธิบายลักษณะต่าง ๆ ของเรื่องที่เราสนใจด้วยตัวแปรสุ่ม เนื่องจากเราไม่ทราบล่วงหน้าเกี่ยวกับค่าของตัวแปรสุ่ม (แต่เราทราบค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมด) จึงอธิบายด้วยความน่าจะเป็น เช่น การแจกแจงความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นก้อย ซึ่งเรียกว่า การแจกแจงความน่าจะเป็นของ X โดยสามารถจำแนกตัวแปรสุ่มออกเป็น 2 ชนิด คือ ตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete random variable) หมายถึง ตัวแปรสุ่มที่ให้ค่าเป็นจำนวนนับ ซึ่งได้จากการนับ และตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (Continuous random variable) หมายถึง ตัวแปรสุ่มที่ให้ค่าเป็นช่วงของจำนวนจริง

การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบไม่ต่อเนื่องเป็นวิธีการที่กำหนดความน่าจะเป็นให้แก่ค่าตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง โดยการหาค่าความน่าจะเป็นของจุดตัวอย่างต่าง ๆ ที่อยู่ในแซมเปิลสเปซ ที่ให้ค่าเดียวกันกับตัวแปรสุ่มนั้น ส่วนการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง เป็นการแจกแจงค่าของตัวแปรสุ่มที่เป็นไปได้ทั้งหมด พร้อมทั้งความน่าจะเป็นที่จะเกิดค่านั้น ๆ เนื่องจากค่าที่ได้มีมากมายจนนับไม่ได้ จึงกระทำได้โดยการกำหนดเป็นช่วงของค่า

แบบฝึกหัดบทที่ 2

1. ใหพิจารณาวาตัวแปรสุมที่กำหนดในแตละขอยอยตอไปนี้ เปนตัวแปรสุมแบบใด (ตอเนื่องหรือไมตอเนื่อง)

    1.1 จำนวนอุบัติเหตุทางรถยนตที่จะเกิดขึ้นในชวงวันหยุดเทศกาลปใหมนี้

    1.2 จำนวนมะพร้าวที่หล่นในบริเวณมหาวิทยาลัย ระหวางเวลา 01.00 - 05.00 น.

    1.3 ปริมาณขาวเหนียวตอไรที่ผลิตไดของภาคตะวันออกเฉียงเหนือในปหนา

    1.4 จำนวนผูใชบริการรถรับสงของมหาวิทยาลัยในปนี้

    1.5 ปริมาณน้ำฝนที่ตกในวันที่ 16 สิงหาคม พ.ศ. 2560

    1.6 จำนวนจักรยานยนตที่หายในมหาวิทยาลัยบูรพา ในป พ.ศ. 2554

2. ให้ X เป็นช่วงเวลาที่เครื่องบินจากกรุงเทพจะถึงสนามบินขอนแก่นเร็วหรือช้ากว่าเวลากำหนด หน่วย : นาที โดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{288}(36 - x^2) & , -6 < x < 6 \\ 0 & , x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

    ก. จงแสดงว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X

    ข. จงหา $P(X < 1)$

3. ให้ X เป็นจำนวนเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ร้านค้าแห่งหนึ่งขายได้ใน 1 วัน โดยมีฟังก์ชันความน่าจะเป็นของ X คือ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+7}{20} & , x = 0,1,2,\ldots,5 \\ 0 & , x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

    จงหาความน่าจะเป็นที่

    ก. ขายได้ 4 เครื่อง   ข. ขายได้ตั้งแต่ 3 ถึง 6 เครื่อง   ค. ขายได้น้อยกว่า 3 เครื่อง

4. จากตารางการแจกแจงความน่าจะเป็นของ X ต่อไปนี้

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

จงคำนวณหาค่า

ก. $E(X)$

ข. σ^2

ค. $E\left[(2X-8)^2\right]$

5. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \ x \text{ มีค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

จงหา

ก. $E(X)$

ข. σ^2

ค. $E\left[(X+10)^2\right]$

ง. $E\left[(2X+1)^2\right]$

6. ถ้า $E(X) = 5$ และ $Var(X+5) = 10$

ก. $E(X^2 - 5X - 10)$

ข. $Var\left(7X + \frac{1}{2}\right)$